

**WYDZIAŁ MATEMATYKI  
KARTA PRZEDMIOTU**

**Nazwa w języku polskim Wstęp Do Układów Dynamicznych**

**Nazwa w języku angielskim An Introduction To Dynamical Systems M1**

**Kierunek studiów (jeśli dotyczy): Matematyka i Statystyka**

**Stopień studiów i forma: I stopień\*, stacjonarna / ~~niestacjonarna\*~~**

**Rodzaj przedmiotu: ~~obowiązkowy / wybieralny / ogólnouczelniany\*~~**

**Kod przedmiotu MAT001629**

**Grupa kursów TAK / NIE\***

|                                                                                           | Wykład              | Ćwiczenia | Laboratorium | Projekt | Seminarium |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-----------|--------------|---------|------------|
| Liczba godzin zajęć zorganizowanych w Uczelni (ZZU)                                       | 30                  | 30        |              |         |            |
| Liczba godzin całkowitego nakładu pracy studenta (CNPS)                                   | 120                 |           |              |         |            |
| Forma zaliczenia                                                                          | Zaliczenie na ocenę |           |              |         |            |
| Dla grupy kursów zaznaczyć kurs końcowy (X)                                               | X                   |           |              |         |            |
| Liczba punktów ECTS                                                                       | 4                   |           |              |         |            |
| w tym liczba punktów odpowiadająca zajęciom o charakterze praktycznym (P)                 | 2                   |           |              |         |            |
| w tym liczba punktów ECTS odpowiadająca zajęciom wymagającym bezpośredniego kontaktu (BK) | 2                   |           |              |         |            |

**WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI**

Podstawy algebry, topologii, teorii miary i analizy funkcjonalnej.

**CELE PRZEDMIOTU**

C1 Poznanie najważniejszych typów układów dynamicznych

C2 Zdobyć wiedzę na temat różnych własności pozwalających na rozróżnienie układów dynamicznych, w sensie izomorfizmu bądź sprzężenia

C3 Zapoznanie z różnymi aspektami zjawiska powracania i z konsekwencjami twierdzeń ergodycznych

C4 Zdobyć podstawowej wiedzy o topologicznych układach dynamicznych i ich własnościach

C5 Poznanie pojęcia entropii teorii-miarowej i entropii topologicznej; związków pomiędzy tymi pojęciami i ich interpretacjami.

\*niepotrzebne skreślić

## PRZEDMIOTOWE EFEKTY KSZTAŁCENIA

Z zakresu wiedzy, student:

PEK\_W01 zna fundamentalne modele układów dynamicznych (obroty, przesunięcia, topologiczne łańcuchy Markowa)

PEK\_W02 rozumie rolę układów dynamicznych w badaniu ewolucji zjawisk opisywanych przez modele matematyczne; rozumie pojęcie izomorfizmu i sprzężenia topologicznego

PEK\_W03 zna twierdzenie Poincarego o powracaniu oraz podstawowe twierdzenia ergodyczne (von Neumanna i Birkhoffa)

PEK\_W04 dobrze rozumie znaczenie pojęć takich jak ergodyczność, mieszanie, słabe mieszanie, tranzytywność, minimalność, mieszanie topologiczne, distalność

PEK\_W05 zna definicje entropii oraz entropii topologicznej; rozumie znaczenie tych wielkości.

Z zakresu umiejętności, student:

PEK\_U01 zna podstawowe własności układów dynamicznych, potrafi je stosować do zagadnień identyfikacji (bądź rozróżniania) układów, potrafi stosować pojęcie faktora miarowego i topologicznego

PEK\_U02 potrafi sprawdzić własności spektralne, ergodyczności bądź mieszania w odpowiednich klasach układów dynamicznych

PEK\_U03 potrafi stosować twierdzenia ergodyczne

PEK\_U04 potrafi badać podstawowe własności topologicznych układów dynamicznych, takie jak minimalność czy mieszanie topologiczne

PEK\_U05 zna pojęcie entropii, potrafi wyznaczyć entropię teorii-miarową bądź topologiczną układu (dla odpowiednich klas układów)

PEK\_U06 potrafi interpretować entropię w zagadnieniach kodowania układów, w zagadnieniach powracania i w elementarnej teorii informacji

Z zakresu kompetencji społecznych, student:

PEK\_K01 potrafi wyszukiwać i korzystać z literatury naukowej do kursu oraz samodzielnie zdobywać wiedzę

PEK\_K02 potrafi precyzyjnie formułować pytania

PEK\_K03 rozumie i docenia znaczenie uczciwości intelektualnej, postępuje uczciwie

## TREŚCI PROGRAMOWE

| Forma zajęć – wykłady |                                                                                                                                                                                              | Liczba godzin |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Wy1                   | Naturalne przykłady układów dynamicznych: teorii-miarowe (teoria ergodyczna), topologiczne (dynamika topologiczna) oraz inspirowane teorią równań różniczkowych (gładkie układy dynamiczne). | 2             |
| Wy2                   | Zjawisko powracania, przekształcenie indukowane. Twierdzenie Poincarego, lemat Kaca.                                                                                                         | 2             |
| Wy3                   | Pojęcia ergodyczności, słabego mieszania i mocnego mieszania. Różne charakterystyki tych pojęć. Twierdzenia ergodyczne: von Neumanna oraz Birkhoffa.                                         | 4             |
| Wy4                   | Pojęcie faktora miarowego oraz topologicznego, izomorfizmu oraz sprzężenia topologicznego.                                                                                                   | 2             |
| Wy5                   | Elementy dynamiki topologicznej: tranzytywność, minimalność, mieszanie, równościowość, distalność. Zbiór miar niezmienniczych                                                                | 4             |

|     |                                                                                                                                                                              |           |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|     | topologicznego układu dynamicznego, twierdzenie Bogoliubowa.                                                                                                                 |           |
| Wy6 | Elementy teorii spektralnej układów dynamicznych.                                                                                                                            | <b>4</b>  |
| Wy7 | Definicja entropii teorio-miarowej. Twierdzenie Kołmogorowa-Sinaja. Twierdzenie Kriegera o skończonym generatorze oraz Ornsteina o izomorfizmie układów Bernoulliego.        | <b>4</b>  |
| Wy8 | Definicja entropii topologicznej, przykłady obliczania entropii. Własności funkcji entropii na sympleksie miar niezmienniczych. Zasada Wariacyjna.                           | <b>4</b>  |
| Wy9 | Różne interpretacje entropii: twierdzenie Shannona-McMillana-Breimana, twierdzenie Ornsteina-Weissa, entropia a kody prefiksowe, kompresja danych, rozszerzenia symboliczne. | <b>4</b>  |
|     | Suma godzin                                                                                                                                                                  | <b>30</b> |

| <b>Forma zajęć – ćwiczenia</b> |                                                                                                                                          | <b>Liczba godzin</b> |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Ćw1                            | Elementarne układy dynamiczne pochodzenia teorio-miarowego i topologicznego.                                                             | <b>2</b>             |
| Ćw2                            | Przykłady ilustrujące zjawisko powracania i lemat Kaca.                                                                                  | 2                    |
| Ćw3                            | Przykłady ilustrujące ergodyczność, słabe mieszanie i mocne mieszanie. Zastosowania twierdzeń ergodycznych.                              | 4                    |
| Ćw4                            | Konstrukcje czynników miarowych i topologicznych. Izomorfizm a własności ergodyczne.                                                     | 4                    |
| Ćw5                            | Przykłady układów tranzytywnych, minimalnych. Badanie równości i distalności układów. Zastosowania twierdzenia Bogoliubowa.              | 2                    |
| Ćw6                            | Elementy teorii spektralnej: przegląd różnych typów spektrum.                                                                            | 4                    |
| Ćw7                            | Wyznaczanie entropii teorio-miarowej. Zastosowania twierdzenia Kriegera oraz twierdzenia Ornsteina o izomorfizmie układów Bernoulliego.  | 4                    |
| Ćw8                            | Przykłady wyznaczania entropii topologicznej. Układy ekspansywne. Zastosowania zasady Wariacyjnej.                                       | 4                    |
| Ćw9                            | Zastosowania teorii entropii: twierdzenie o ekwipartycji, twierdzenie o czasach powrotu, entropia w teorii informacji; kompresja danych. | 4                    |
|                                | Suma godzin                                                                                                                              | <b>30</b>            |

| <b>STOSOWANE NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE</b>                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Wykład problemowy – metoda tradycyjna<br>2. Ćwiczenia problemowe i rachunkowe – metoda tradycyjna<br>3. Konsultacje<br>4. Praca własna studenta -przygotowanie do ćwiczeń |

### **OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW KSZTAŁCENIA**

| <b>Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P – podsumowująca (na</b> | <b>Numer efektu kształcenia</b> | <b>Sposób oceny osiągnięcia efektu kształcenia</b> |
|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------------------|
|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------------------|

|                  |                                                                                                                                                        |                                       |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| koniec semestru) |                                                                                                                                                        |                                       |
| F1               | PEK_U01<br>PEK_U02<br>PEK_U03<br>PEK_U04<br>PEK_U05<br>PEK_U06<br>PEK_K02<br>PEK_K03                                                                   | odpowiedzi ustne, kartkówki, kolokwia |
| F2               | PEK_W01<br>PEK_W02<br>PEK_W03<br>PEK_W04<br>PEK_W05<br>PEK_U01<br>PEK_U02<br>PEK_U03<br>PEK_U04<br>PEK_U05<br>PEK_U06<br>PEK_K01<br>PEK_K02<br>PEK-K03 | Zaliczenie na ocenę                   |
| P=0,5*F1+0,5*F2  |                                                                                                                                                        |                                       |

### **LITERATURA PODSTAWOWA I UZUPEŁNIAJĄCA**

#### **LITERATURA PODSTAWOWA:**

- [1] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer-Verlag, 1982.
- [2] K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge University Press, 1983.
- [3] T. Downarowicz, Entropy in Dynamical Systems, Cambridge University Press, 2011.

#### **LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA:**

- [1] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1995.

#### **OPIEKUN PRZEDMIOTU (IMIE, NAZWISKO, ADRES E-MAIL)**

**dr hab. inż. Jacek Serafin ( serafin@pwr.wroc.pl)**

**MACIERZ POWIĄZANIA EFEKTÓW KSZTAŁCENIA DLA PRZEDMIOTU  
WSTĘP DO UKŁADÓW DYNAMICZNYCH  
Z EFEKTAMI KSZTAŁCENIA NA KIERUNKU MATEMATYKA I STATYSTYKA**

| <b>Przedmiotowy efekt kształcenia</b> | <b>Odniesienie przedmiotowego efektu do efektów kształcenia zdefiniowanych dla kierunku studiów i specjalności (o ile dotyczy)</b> | <b>Cele przedmiotu**</b> | <b>Treści programowe**</b> | <b>Numer narzędzia dydaktycznego**</b> |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------------------|
| <b>PEK_W01 (wiedza)</b>               | K1MIS_W01, K1MIS_W02<br>K1MIS_W03, K1MIS_W04,<br>K1MIS_W05, K1MIS_W12                                                              | C1                       | Wy1                        | 1,3                                    |
| <b>PEK_W02</b>                        | K1MIS_W01, K1MIS_W02<br>K1MIS_W03, K1MIS_W04,<br>K1MIS_W05, K1MIS_W12                                                              | C2                       | Wy2, Wy4                   | 1,3                                    |
| <b>PEK_W03</b>                        | K1MIS_W01, K1MIS_W02<br>K1MIS_W03, K1MIS_W04,<br>K1MIS_W05, K1MIS_W12                                                              | C3                       | Wy3                        | 1,3                                    |
| <b>PEK_W04</b>                        | K1MIS_W01, K1MIS_W02<br>K1MIS_W03, K1MIS_W04,<br>K1MIS_W05, K1MIS_W12                                                              | C2, C4                   | Wy3, Wy4,<br>Wy5, Wy6      | 1,3                                    |
| <b>PEK_W05</b>                        | K1MIS_W01, K1MIS_W02<br>K1MIS_W03, K1MIS_W04,<br>K1MIS_W05, K1MIS_W12                                                              | C2, C4, C5               | Wy7, Wy8,<br>Wy9           | 1,3                                    |
| <b>PEK_U01 (umiejętności)</b>         | K1MIS_U01, K1MIS_U22,<br>K1MIS_U30_MAT                                                                                             | C1, C2, C4               | Ćw1-Ćw4,<br>Ćw6            | 2,3,4                                  |
| <b>PEK_U02</b>                        | K1MIS_U01, K1MIS_U22,<br>K1MIS_U30_MAT                                                                                             | C2                       | Ćw3,<br>Ćw4, Ćw6           | 2,3,4                                  |
| <b>PEK_U03</b>                        | K1MIS_U01, K1MIS_U22,<br>K1MIS_U30_MAT                                                                                             | C3                       | Ćw2, Ćw3                   | 2,3,4                                  |
| <b>PEK_U04</b>                        | K1MIS_U01, K1MIS_U22,<br>K1MIS_U30_MAT                                                                                             | C4                       | Ćw4, Ćw5                   | 2,3,4                                  |
| <b>PEK_U05</b>                        | K1MIS_U01, K1MIS_U22,<br>K1MIS_U30_MAT                                                                                             | C5                       | Ćw7, Ćw8                   | 2,3,4                                  |
| <b>PEK_U06</b>                        | K1MIS_U01, K1MIS_U22,<br>K1MIS_U30_MAT                                                                                             | C2, C5                   | Ćw4, Ćw9                   | 2,3,4                                  |
| <b>PEK_K01 (kompetencje)</b>          | K1MIS_K01, K1MIS_K05                                                                                                               | C1, C2, C3,<br>C4, C5    | Wy1-Wy9<br>Ćw1-Ćw9         | 1,2,3,4                                |
| <b>PEK_K02</b>                        | K1MIS-K04                                                                                                                          | C1, C2, C3,<br>C4, C5    | Wy1-Wy9<br>Ćw1-Ćw9         | 1,2,3,4                                |
| <b>PEK_K03</b>                        | K1MIS_K04, K1MIS_K06                                                                                                               | C1, C2, C3,<br>C4, C5    | Wy1-Wy9<br>Ćw1-Ćw9         | 1,2,3,4                                |

\*\* - z tabeli powyżej