

<b>WYDZIAŁ MATEMATYKI</b>	
<b>KARTA PRZEDMIOTU</b>	
Nazwa w języku polskim <b>TEORIA MIARY</b>	
Nazwa w języku angielskim <b>MEASURE THEORY</b>	
Kierunek studiów (jeśli dotyczy): <b>Matematyka</b>	
Specjalność (jeśli dotyczy):	
Stopień studiów i forma:	<b>I stopień*, stacjonarna / <del>niestacjonarna*</del></b>
Rodzaj przedmiotu:	<b>obowiązkowy / <del>wybieralny / ogólnouczelniany*</del></b>
Kod przedmiotu	<b>MAP1118</b>
Grupa kursów	<b>TAK / <del>NIE*</del></b>

	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Projekt	Seminarium
Liczba godzin zajęć zorganizowanych w Uczelni (ZZU)	45	30			
Liczba godzin całkowitego nakładu pracy studenta (CNPS)	180				
Forma zaliczenia	Egzamin				
Dla grupy kursów zaznaczyć kurs końcowy (X)	X				
Liczba punktów ECTS	6				
w tym liczba punktów odpowiadająca zajęciom o charakterze praktycznym (P)	2				
w tym liczba punktów ECTS odpowiadająca zajęciom wymagającym bezpośredniego kontaktu (BK)	3				

#### WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

Znajomość pojęć i twierdzeń rachunku różniczkowego oraz przede wszystkim całkowego funkcji jednej i wielu zmiennych. Znajomość rachunku zbiorów.

#### CELE PRZEDMIOTU

- C1 Poznanie podstawowych własności miar – ze szczególnym uwzględnieniem miary Lebesgue’a
- C2 Zrozumienie znaczenia całki Lebesgue’a
- C3 Opanowanie pojęć zbieżności według miary oraz zasad przechodzenia z granicą pod całkę
- C4 Poznanie podstawowych narzędzi i twierdzeń abstrakcyjnej teorii miary
- C5 Nabycie umiejętności dostrzegania zjawisk teorio-miarowych w zagadnieniach z pokrewnych działach matematyki oraz w zastosowaniach praktycznych

\*niepotrzebne skreślić

### PRZEDMIOTOWE EFEKTY KSZTAŁCENIA

Z zakresu wiedzy student powinien:

PEK\_W01 znać aksjomatykę i własności miar, przestrzeni mierzalnych i miarowych

PEK\_W02 rozumieć konstrukcję miary, w tym miary Lebesgue'a, poprzez miarę zewnętrzną i pojęcie mierzalności w sensie Caratheodory'ego

PEK\_W03 znać pojęcie mierzalności funkcji i wiedzieć o aproksymacji funkcjami prostymi

PEK\_W04 rozumieć pojęcie całki Lebesgue'a, rozumieć jej powiązania z całką Riemanna i znać twierdzenia Lebesgue'a

PEK\_W05 opanować fundamentalne narzędzia teorii miary: twierdzenie Fubini'ego, twierdzenie Radona-Nikodyma

Z zakresu umiejętności, w wyniku odbycia kursu student winien

PEK\_U01 umieć obliczać wartości miary Lebesgue'a oraz innych miar borelowskich konkretnych zbiorów na prostej i na płaszczyźnie

PEK\_U02 rozpoznawać funkcje mierzalne i przeprowadzać dowody metodą „komplikacji funkcji”, rozpoznawać zbieżność wg miary i prawie wszędzie

PEK\_U03 mieć opanowane techniki całkowania całką Lebesgue'a, w szczególności umieć przechodzić z granicą pod całkę

PEK\_U04 Potrafić stosować podstawowe twierdzenia teorii miary w przykładach i zadaniach, samodzielnie przeprowadzać proste dowody

PEK\_U05 umieć stosować narzędzia teorii miary i całki Lebesgue'a w pokrewnych dziedzinach matematyki

Z zakresu kompetencji społecznych student:

PEK\_K01 potrafi korzystać z dostępnej literatury naukowej

PEK\_K02 rozumie potrzebę systematycznej i samodzielnej pracy nad opanowaniem materiału

PEK\_K03 hartuje się w dążeniu do osiągnięcia celu (np. rozwiązania zadania) i nie zraża się początkowymi trudnościami

PEK\_K04 potrafi prezentować swoje rozumowania i dyskutować na temat wystąpień kolegów

### TREŚCI PROGRAMOWE

Forma zajęć - wykłady		Liczba godzin
Wy1	operacje na zbiorach, pierścienie, ciała, rodziny monotoniczne, sigma-ciała	4
Wy2	miara Jordana na prostej, miara (nieujemna, przeliczalnie addytywna) na sigma-ciele, przykłady miar	4
Wy3	zbiory borelowskie w przestrzeni metrycznej, miara zewnętrzna, miara zewnętrzna Lebesgue'a na prostej	6
Wy4	mierzalność w sensie Caratheodory'ego, sigma-ciało zbiorów mierzalnych, miara Lebesgue'a na prostej	4
Wy5	funkcje mierzalne, (funkcje charakterystyczne, funkcje proste, aproksymacja)	3
Wy6	zbieżność prawie wszędzie i zbieżność wg miary	5
Wy7	całka Lebesgue'a na przestrzeni miarowej, własności, funkcje całkowne	6
Wy8	związki i porównanie całki Lebesgue'a z całką Riemanna	3

Wy9	dystrybuanty i miary borelowskie na prostej, całka Riemanna-Stieltjesa	2
Wy10	lemat Fatou i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności całek	4
Wy11	miary produktowe i tw. Fubinięgo	2
Wy12	absolutna ciągłość miar, singularność, tw. o rozkładzie miary na część singularną i absolutnie ciągłą, tw. Radona-Nikodyma.	4
	Suma godzin	<b>45</b>

<b>Forma zajęć - ćwiczenia</b>		<b>Liczba godzin</b>
Ćw1	operacje na zbiorach, granica dolna i górna ciągu zbiorów	2
Ćw2	obliczanie miary Jordana zbiorów na prostej, przykłady miar, własności: ciągłość z dołu, ciągłość z góry	2
Ćw3	generowanie sigma-ciała zbiorów borelowskich przez różne rodziny zbiorów, sprawdzanie własności miar na podrodzinach zbiorów	2
Ćw4	uzupełnienie sigma-ciała zbiorów borelowskich względem miary Lebesgue'a, inne własności miary Lebesgue'a: niezmienniczość na przesunięcia	2
Ćw5	funkcje mierzalne, operacje na funkcjach prostych i mierzalnych, testowanie mierzalności	2
Ćw6	przykłady ciągów funkcji zbieżnych p.w. ale nie wg. miary i na odwrót, własności obu zbieżności i związku między nimi	2
Ćw7	własności całki Lebesgue'a w przykładach, obliczanie całek przykładowych funkcji	4
Ćw8	przykłady funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a ale nie w sensie Riemanna, interpretacja całki niewłaściwej Riemanna w przykładach	2
Ćw9	własności dystrybuant, przykłady, całkowanie całką Riemanna-Stieltjesa	2
Ćw10	uogólnienie tw. Lebesgue'a dla zbieżności wg. miary, przykłady wymagające przejścia z granicą pod całkę, przykłady negatywne	4
Ćw11	miara produktowa Lebesgue'a na płaszczyźnie, inne przykłady miar produktowych, całkowanie z zastosowaniem tw. Fubinięgo	2
Ćw12	rozkładnie przykładowych miar, miary z gęstością, jednoznaczność gęstości Radona-Nikodyma, własności i zastosowania tw. Radona-Nikodyma w zadaniach	2
Ćw13	powtórka materiału, lista powtórkowa	2
	Suma godzin	<b>30</b>

<b>STOSOWANE NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE</b>
1. wykład problemowy – metoda tradycyjna 2. ćwiczenia problemowe – metoda tradycyjna. 3 konsultacje 4 praca własna studenta

#### **OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW KSZTAŁCENIA**

<b>Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P</b>	<b>Numer efektu kształcenia</b>	<b>Sposób oceny osiągnięcia efektu kształcenia</b>
---	---------------------------------	--

– podsumowująca (na koniec semestru)		
F1	PE_U01—PE_U05 PE_W01—PE_W05 PE_K01—PE_K04	odpowiedzi ustne, kartkówki,
F2	PE_U01—PE_U04 PE_W01—PE_W05 PE_K01—PE_K03	kolokwia
F3	PE_U01—PE_U05 PE_W01—PE_W05 PE_K01—PE_K03	Egzamin
$P = 0,3 * F1 + 0,3 * F2 + 0,4 * F3$		

### **LITERATURA PODSTAWOWA I UZUPEŁNIAJĄCA**

#### **LITERATURA PODSTAWOWA:**

- [1] . Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, Warszawa 1976.
- [2] S. Hartman i J. Mikusiński, Teoria miary i całki Lebesgue'a, PWN, Warszawa 1957.
- [3] J. C. Oxtoby, Measure and Category, Springer, 1971.
- [4]

#### **LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA:**

- [1] Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York 1950.
- [2] K. Falconer, Techniques in Fractal Geometry, Wiley & Sons, Chichester 1997.
- [3] C. A. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge Univ. Press, 1970.

#### **OPIEKUN PRZEDMIOTU (IMIE, NAZWISKO, ADRES E-MAIL)**

**prof. dr hab. Tomasz Downarowicz (downar@pwr.wroc.pl)**

**MACIERZ POWIĄZANIA EFEKTÓW KSZTAŁCENIA DLA PRZEDMIOTU  
TEORIA MIARY  
Z EFEKTAMI KSZTAŁCENIA NA KIERUNKU MATEMATYKA  
I SPECJALNOŚCI .....**

<b>Przedmiotowy efekt kształcenia</b>	<b>Odniesienie przedmiotowego efektu do efektów kształcenia zdefiniowanych dla kierunku studiów i specjalności (o ile dotyczy)</b>	<b>Cele przedmiotu**</b>	<b>Treści programowe**</b>	<b>Numer narzędzia dydaktycznego**</b>
<b>PEK_W01</b>	K1MAT_W01, K1MAT_W02, K1MAT_W03	C1, C4	Wy1, Wy2	1,3,4
<b>PEK_W02</b>	K1MAT_W01, K1MAT_W02, K1MAT_W05	C1, C4	Wy2, Wy3, Wy4,	1,3,4
<b>PEK_W03</b>	K1MAT_W01, K1MAT_W02, K1MAT_W03, K1MAT_W05	C1, C4	Wy5	1,3,4
<b>PEK_W04</b>	K1MAT_W02, K1MAT_W04, K1MAT_W05, K1MAT_W08, K1MAT_W12	C2, C3, C4	Wy5, Wy6, Wy7, Wy8, Wy9, Wy10	1,3,4
<b>PEK_W05</b>	K1MAT_W02, K1MAT_W04, K1MAT_W05, K1MAT_W08, K1MAT_W12	C4, C5	Wy10, Wy11, Wy12	1,3,4
<b>PEK_U01</b>	K1MAT_U01, K1MAT_U02, K1MAT_U03	C1	Ćw1, Ćw2, Ćw3, Ćw4	2,3,4
<b>PEK_U02</b>	K1MAT_U01, K1MAT_U03, K1MAT_U05	C1, C3	Ćw5, Ćw6	2,3,4
<b>PEK_U03</b>	K1MAT_U01, K1MAT_U05, K1MAT_U08	C2, C3	Ćw7, Ćw8, Ćw9, Ćw10	2,3,4
<b>PEK_U04</b>	K1MAT_U01, K1MAT_U03, K1MAT_U05	C4	Ćw11, Ćw12	2,3,4
<b>PEK_U05</b>	K1MAT_U01, K1MAT_U26, K1MAT_U27	C5	Ćw11, Ćw12, Ćw13	2,3,4
<b>PEK_K01</b>	K1MAT_K01, K1MAT_K02, K1MAT_K06	C1—C4	Wy1—Wy12	1,2,3,4
<b>PEK_K02</b>	K1MAT_K01, K1MAT_K02, K1MAT_K03,	C1—C4	Wy1—Wy12 Ćw1—Ćw13	1,2,3,4
<b>PEK_K03</b>	K1MAT_K01, K1MAT_K02, K1MAT_K03	C4, C5	Ćw1—Ćw13	1,2,3,4
<b>PEK_K04</b>	K1MAT_K03, K1MAT_K04, K1MAT_K05, K1MAT_K06	C1—C5	Ćw1—Ćw13	1,2,3,4

\*\* - z tabeli powyżej