

**WYDZIAŁ MATEMATYKI
KARTA PRZEDMIOTU**

Nazwa w języku polskim Teoria Miary

Nazwa w języku angielskim Measure Theory

Kierunek studiów (jeśli dotyczy): Matematyka i Statystyka

Stopień studiów i forma: I stopień*, stacjonarna / ~~niestacjonarna*~~

Rodzaj przedmiotu: ~~obowiązkowy~~ / ~~wybieralny~~ / ~~ogólnouczelniany*~~

Kod przedmiotu MAT001606

Grupa kursów TAK / NIE*

| | Wykład | Ćwiczenia | Laboratorium | Projekt | Seminarium |
|---|---------|-----------|--------------|---------|------------|
| Liczba godzin zajęć zorganizowanych w Uczelni (ZZU) | 45 | 30 | | | |
| Liczba godzin całkowitego nakładu pracy studenta (CNPS) | 210 | | | | |
| Forma zaliczenia | Egzamin | | | | |
| Dla grupy kursów zaznaczyć kurs końcowy (X) | X | | | | |
| Liczba punktów ECTS | 7 | | | | |
| w tym liczba punktów odpowiadająca zajęciom o charakterze praktycznym (P) | 3 | | | | |
| w tym liczba punktów ECTS odpowiadająca zajęciom wymagającym bezpośredniego kontaktu (BK) | 3 | | | | |

WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

Znajomość pojęć i twierdzeń rachunku różniczkowego oraz przede wszystkim całkowitego funkcji jednej i wielu zmiennych. Znajomość rachunku zbiorów.

CELE PRZEDMIOTU

- C1 Poznanie podstawowych własności miar – ze szczególnym uwzględnieniem miary Lebesgue’a
- C2 Zrozumienie znaczenia całki Lebesgue’a
- C3 Opanowanie pojęć zbieżności według miary oraz zasad przechodzenia z granicą pod całkę
- C4 Poznanie podstawowych narzędzi i twierdzeń abstrakcyjnej teorii miary
- C5 Nabycie umiejętności dostrzegania zjawisk teorio-miarowych w zagadnieniach z pokrewnych działach matematyki oraz w zastosowaniach praktycznych

*niepotrzebne skreślić

PRZEDMIOTOWE EFEKTY KSZTAŁCENIA

Z zakresu wiedzy student powinien:

PEK_W01 znać aksjomatykę i własności miar, przestrzeni mierzalnych i miarowych

PEK_W02 rozumieć konstrukcję miary, w tym miary Lebesgue'a, poprzez miarę zewnętrzną i pojęcie mierzalności w sensie Caratheodory'ego

PEK_W03 znać pojęcie mierzalności funkcji i wiedzieć o aproksymacji funkcjami prostymi

PEK_W04 rozumieć pojęcie całki Lebesgue'a, rozumieć jej powiązania z całką Riemanna i znać twierdzenia Lebesgue'a

PEK_W05 opanować fundamentalne narzędzia teorii miary: twierdzenie Fubiniego, twierdzenie Radona-Nikodyma

Z zakresu umiejętności, w wyniku odbycia kursu student winien

PEK_U01 umieć obliczać wartości miary Lebesgue'a oraz innych miar borelowskich konkretnych zbiorów na prostej i na płaszczyźnie

PEK_U02 rozpoznawać funkcje mierzalne i przeprowadzać dowody metodą „komplikacji funkcji”, rozpoznawać zbieżność wg miary i prawie wszędzie

PEK_U03 mieć opanowane techniki całkowania całką Lebesgue'a, w szczególności umieć przechodzić z granicą pod całkę

PEK_U04 Potrafić stosować podstawowe twierdzenia teorii miary w przykładach i zadaniach, samodzielnie przeprowadzać proste dowody

PEK_U05 umieć stosować narzędzia teorii miary i całki Lebesgue'a w pokrewnych dziedzinach matematyki

Z zakresu kompetencji społecznych student:

PEK_K01 potrafi korzystać z dostępnej literatury naukowej

PEK_K02 rozumie potrzebę systematycznej i samodzielnej pracy nad opanowaniem materiału

PEK_K03 hartuje się w dążeniu do osiągnięcia celu (np. rozwiązania zadania) i nie zraża się początkowymi trudnościami

PEK_K04 potrafi prezentować swoje rozumowania i dyskutować na temat wystąpień kolegów

TREŚCI PROGRAMOWE

| Forma zajęć - wykłady | | Liczba godzin |
|-----------------------|---|---------------|
| Wy1 | operacje na zbiorach, pierścienie, ciała, rodziny monotoniczne, sigma-ciała | 4 |
| Wy2 | miara Jordana na prostej, miara (nieujemna, przeliczalnie addytywna) na sigma-ciele, przykłady miar | 4 |
| Wy3 | zbiory borelowskie w przestrzeni metrycznej, miara zewnętrzna, miara zewnętrzna Lebesgue'a na prostej | 6 |
| Wy4 | mierzalność w sensie Caratheodory'ego, sigma-ciało zbiorów mierzalnych, miara Lebesgue'a na prostej | 4 |
| Wy5 | funkcje mierzalne, (funkcje charakterystyczne, funkcje proste, aproksymacja) | 3 |
| Wy6 | zbieżność prawie wszędzie i zbieżność wg miary | 5 |
| Wy7 | całka Lebesgue'a na przestrzeni miarowej, własności, funkcje całkowne | 6 |
| Wy8 | związki i porównanie całki Lebesgue'a z całką Riemanna | 3 |

| | | |
|------|---|-----------|
| Wy9 | dystrybuanty i miary borelowskie na prostej, całka Riemanna-Stieltjesa | 2 |
| Wy10 | lemat Fatou i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności całek | 4 |
| Wy11 | miary produktowe i tw. Fubinięgo | 2 |
| Wy12 | absolutna ciągłość miar, singularność, tw. o rozkładzie miary na część singularną i absolutnie ciągłą, tw. Radona-Nikodyma. | 4 |
| | Suma godzin | 45 |

| Forma zajęć - ćwiczenia | | Liczba godzin |
|--------------------------------|---|----------------------|
| Ćw1 | operacje na zbiorach, granica dolna i górna ciągu zbiorów | 2 |
| Ćw2 | obliczanie miary Jordana zbiorów na prostej, przykłady miar, własności: ciągłość z dołu, ciągłość z góry | 2 |
| Ćw3 | generowanie sigma-ciała zbiorów borelowskich przez różne rodziny zbiorów, sprawdzanie własności miar na podrodzinach zbiorów | 2 |
| Ćw4 | uzupełnienie sigma-ciała zbiorów borelowskich względem miary Lebesgue'a, inne własności miary Lebesgue'a: niezmienniczość na przesunięcia | 2 |
| Ćw5 | funkcje mierzalne, operacje na funkcjach prostych i mierzalnych, testowanie mierzalności | 2 |
| Ćw6 | przykłady ciągów funkcji zbieżnych p.w. ale nie wg. miary i na odwrót, własności obu zbieżności i związku między nimi | 2 |
| Ćw7 | własności całki Lebesgue'a w przykładach, obliczanie całek przykładowych funkcji | 4 |
| Ćw8 | przykłady funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a ale nie w sensie Riemanna, interpretacja całki niewłaściwej Riemanna w przykładach | 2 |
| Ćw9 | własności dystrybuant, przykłady, całkowanie całką Riemanna-Stieltjesa | 2 |
| Ćw10 | uogólnienie tw. Lebesgue'a dla zbieżności wg. miary, przykłady wymagające przejścia z granicą pod całkę, przykłady negatywne | 4 |
| Ćw11 | miara produktowa Lebesgue'a na płaszczyźnie, inne przykłady miar produktowych, całkowanie z zastosowaniem tw. Fubinięgo | 2 |
| Ćw12 | rozkładnie przykładowych miar, miary z gęstością, jednoznaczność gęstości Radona-Nikodyma, własności i zastosowania tw. Radona-Nikodyma w zadaniach | 2 |
| Ćw13 | powtórka materiału, lista powtórkowa | 2 |
| | Suma godzin | 30 |

| STOSOWANE NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE |
|--|
| 1. wykład problemowy – metoda tradycyjna 2. ćwiczenia problemowe – metoda tradycyjna. 3 konsultacje 4 praca własna studenta |

OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW KSZTAŁCENIA

| Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P | Numer efektu kształcenia | Sposób oceny osiągnięcia efektu kształcenia |
|---|---------------------------------|--|
|---|---------------------------------|--|

| | | |
|--------------------------------------|---|------------------------------|
| – podsumowująca (na koniec semestru) | | |
| F1 | PE_U01—PE_U05 PE_W01—PE_W05 PE_K01—PE_K04 | odpowiedzi ustne, kartkówki, |
| F2 | PE_U01—PE_U04 PE_W01—PE_W05 PE_K01—PE_K03 | kolokwia |
| F3 | PE_U01—PE_U05 PE_W01—PE_W05 PE_K01—PE_K03 | Egzamin |
| $P = 0,3 * F1 + 0,3 * F2 + 0,4 * F3$ | | |

LITERATURA PODSTAWOWA I UZUPEŁNIAJĄCA

LITERATURA PODSTAWOWA:

- [1] . Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, Warszawa 1976.
- [2] S. Hartman i J. Mikusiński, Teoria miary i całki Lebesgue'a, PWN, Warszawa 1957.
- [3] J. C. Oxtoby, Measure and Category, Springer, 1971.
- [4]

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA:

- [1] Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York 1950.
- [2] K. Falconer, Techniques in Fractal Geometry, Wiley & Sons, Chichester 1997.
- [3] C. A. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge Univ. Press, 1970.

OPIEKUN PRZEDMIOTU (IMIE, NAZWISKO, ADRES E-MAIL)

prof. dr hab. Tomasz Downarowicz (downar@pwr.wroc.pl)

**MACIERZ POWIĄZANIA EFEKTÓW KSZTAŁCENIA DLA PRZEDMIOTU
TEORIA MIARY
Z EFEKTAMI KSZTAŁCENIA NA KIERUNKU MATEMATYKA I STATYSTYKA**

| Przedmiotowy efekt kształcenia | Odniesienie przedmiotowego efektu do efektów kształcenia zdefiniowanych dla kierunku studiów i specjalności (o ile dotyczy) | Cele przedmiotu** | Treści programowe** | Numer narzędzia dydaktycznego** |
|---------------------------------------|--|--------------------------|-------------------------------|--|
| PEK_W01 | K1MIS_W01, K1MIS_W02, K1MIS_W03 | C1, C4 | Wy1, Wy2 | 1,3,4 |
| PEK_W02 | K1MIS_W01, K1MIS_W02, K1MIS_W05 | C1, C4 | Wy2, Wy3, Wy4, | 1,3,4 |
| PEK_W03 | K1MIS_W01, K1MIS_W02, K1MIS_W03, K1MIS_W05 | C1, C4 | Wy5 | 1,3,4 |
| PEK_W04 | K1MIS_W02, K1MIS_W04, K1MIS_W05, K1MIS_W08, K1MIS_W12 | C2, C3, C4 | Wy5, Wy6, Wy7, Wy8, Wy9, Wy10 | 1,3,4 |
| PEK_W05 | K1MIS_W02, K1MIS_W04, K1MIS_W05, K1MIS_W08, K1MIS_W12 | C4, C5 | Wy10, Wy11, Wy12 | 1,3,4 |
| PEK_U01 | K1MIS_U01, K1MIS_U02, K1MIS_U03 | C1 | Ćw1, Ćw2, Ćw3, Ćw4 | 2,3,4 |
| PEK_U02 | K1MIS_U01, K1MIS_U03, K1MIS_U05 | C1, C3 | Ćw5, Ćw6 | 2,3,4 |
| PEK_U03 | K1MIS_U01, K1MIS_U05, K1MIS_U08 | C2, C3 | Ćw7, Ćw8, Ćw9, Ćw10 | 2,3,4 |
| PEK_U04 | K1MIS_U01, K1MIS_U03, K1MIS_U05 | C4 | Ćw11, Ćw12 | 2,3,4 |
| PEK_U05 | K1MIS_U01, K1MIS_U26, K1MIS_U27 | C5 | Ćw11, Ćw12, Ćw13 | 2,3,4 |
| PEK_K01 | K1MIS_K01, K1MIS_K02, K1MIS_K06 | C1—C4 | Wy1—Wy12 | 1,2,3,4 |
| PEK_K02 | K1MIS_K01, K1MIS_K02, K1MIS_K03, | C1—C4 | Wy1—Wy12 Ćw1—Ćw13 | 1,2,3,4 |
| PEK_K03 | K1MIS_K01, K1MIS_K02, K1MIS_K03 | C4, C5 | Ćw1—Ćw13 | 1,2,3,4 |
| PEK_K04 | K1MIS_K03, K1MIS_K04, K1MIS_K05, K1MIS_K06 | C1—C5 | Ćw1—Ćw13 | 1,2,3,4 |

** - z tabeli powyżej