STRESZCZENIE PRACY DOKTORSKIEJ „OPERATORY MAKSYMALNE W NIEDUBLUJĄCYCH PRZESTRZENIACH METRYCZNO MIAROWYCH"

Celem rozprawy jest badanie własności operatorów maksymalnych Hardy'ego–Littlewoda, scentrowanego $\mathcal{M}^c$ oraz niescentrowanego $\mathcal{M}$, stowarzyszonych z niedublującymi przestrzeniami metryczno-miarowymi $\mathfrak{X} = (X, \rho, \mu)$. Zauważamy brak wielu istotnych własności dobrze znanych z przypadku dublującego, a także demonstrujemy różne fenomeny, które mają szansę zaistnieć jedynie w pewnych bardzo szczególnych niedublujących warunkach. Aby to zrobić, wprowadzamy nowe klasy przestrzeni, które pozwalają wygenerować wiele interesujących przykładów. Pierwszy rozdział pracy stanowi wstęp. Zawartość kolejnych przedstawiamy pokrótce poniżej.

W rozdziale drugim badamy nierówności mocnego, słabego oraz restrykcyjnie słabego typu (p, p). Naszym celem jest podać pełną charakteryzację możliwości w odniesieniu do pytania „dla jakiego zakresu parametru p operatory $\mathcal{M}^c$ oraz $\mathcal{M}$ zachowują trzy wyżej wspomniane typy nierówności?". Innymi słowy, rozważamy sześć zbiorów wartości parametru, odpowiadających konkretnemu typowi nierówności dla konkretnego operatora, a następnie opisujemy wszystkie możliwe ich konfiguracje. Każda taka konfiguracja jest zilustrowana odpowiednim przykładem.

Rozdział trzeci jest poświęcony badaniu nierówności mocnego oraz słabego typu (p, p) dla zmodyfikowanych operatorów $\mathcal{M}^c_\kappa$ oraz $\mathcal{M}_\kappa$. Tym razem, przy zadanym $\kappa \in [1, \infty)$, mamy cztery zbiory wartości parametru p i, podobnie jak poprzednio, analizowane są wszystkie występujące między nimi relacje. Badamy następujące trzy przypadki: $\kappa \in [1, 2)$, $\kappa \in [2, 3)$ oraz $\kappa \in [3, \infty)$. W każdym z nich prezentujemy pełne spektrum możliwych konfiguracji. Podejmujemy się też analizy bardziej złożonego problemu, dotyczącego sytuacji, w których parametr κ jest zmienny.

Rozdział czwarty jest punktem kulminacyjnym rozprawy. W tym miejscu badane są własności scentrowanego operatora $\mathcal{M}^c$ w kontekście ich działania na przestrzeniach Lorentza $L^{p,q}(\mathfrak{X})$. Wprowadzamy odpowiednią klasę przestrzeni metryczno-miarowych w celu pokazania, że nadmienione własności mogą być bardzo specyficzne. Analiza przebiega w trzech etapach, w których rozważane są różne zagadnienia o rosnącym stopniu trudności.

Rozdział piąty jest pierwszym z dwóch rozdziałów uzupełniających, których celem jest wzbogacenie uzyskanej wiedzy o pewne dodatkowe obserwacje. Badamy tutaj rodzinę przestrzeni $\{BMO^p(\mathfrak{X})\colon p \in [1, \infty)\}$. Opisujemy relacje pomiędzy tymi przestrzeniami rozumianymi jako zbiory funkcji. Zamieszczamy też pewne rozważania związane z nierównością Johna–Nirenberga.

W rozdziale szóstym badamy własności dychotomii dla $\mathcal{M}^c$ oraz $\mathcal{M}$. Uściślając, jest wiadome, że dla dowolnej przestrzeni dublującej $\mathfrak{X}$ oraz $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X})$ zachodzi następująca implikacja: jeśli $\mathcal{M}^c f(x) < \infty$ dla pewnego $x \in \mathfrak{X}$, to funkcja $\mathcal{M}^c f$ jest skończona prawie wszędzie. Pokazujemy, że taka własność nie musi zachodzić w przypadku niektórych przestrzeni niedublujących.

W dodatku zamieszczonym po rozdziale szóstym prezentujemy elementarny dowód twierdzenia interpolacyjnego, które pojawia się w rozdziale czwartym w kontekście przestrzeni $L^{p,q}(\mathfrak{X})$.

Treść rozprawy bazuje na wynikach zawartych w siedmiu artykułach autora. Opisane metody oraz konstrukcje w większości są zaczerpnięte stamtąd i nie zawierają żadnych istotnych zmian. Mimo to jest kilka części, w szczególności w rozdziałach drugim i trzecim, które prezentujemy inaczej, niż było to robione oryginalnie. Zdecydowaliśmy się na to, ponieważ z obecnego punktu widzenia nowe podejście wygląda bardziej naturalnie, a przy tym pozwala uniknąć wielu technicznych uciążliwości.

Dłoa