

## Autoreferat

### 1. Imię i nazwisko:

Jacek Małecki

### 2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe - z podaniem nazwy miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

2005 dyplom magistra matematyki,

Instytut Matematyki i Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wroclawska, praca magisterska *Teoria potencjału na przestrzeniach hiperbolicznych* napisana pod kierunkiem Prof. dr. hab. Tomasza Byczkowskiego.

2008 dyplom doktora nauk matematycznych,

Instytut Matematyki i Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wroclawska, rozprawa doktorska *Teoria potencjału na przestrzeniach hiperbolicznych* napisana pod kierunkiem Prof. dr. hab. Tomasza Byczkowskiego.

### 3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2008 – 2009	asystent w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wroclawskiej
2009 – 2014	adiunkt w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wroclawskiej
2010 – 2011	staż podoktorski w LAREMA, Univeristé d'Angers, Francja
2014* – 2015	adiunkt w Katedrze Matematyki Wydziału PPT Politechniki Wroclawskiej
2015* – obecnie	adiunkt na Wydziale Matematyki Politechniki Wroclawskiej

\* - zmiany miejsce zatrudnienia wynikały ze zmian organizacyjnych na Uczelni, tzn. przekształcenia Instytutu Matematyki i Informatyki w Katedrę Matematyki na Wydziale PPT, a następnie utworzenie Wydziału Matematyki.

4. Wskazanie osiągnięcia uzyskanego zgodnie z art. 16. ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

(a) Tytuł osiągnięcia naukowego

*Teoria potencjału procesów Bessela na półprostych*

(b) Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

- [H1] T. Byczkowski, J. Małecki, M. Ryznar, *Hitting half-spaces by Bessel-Brownian diffusions*, Potential Anal. 33(1), 47–83 (2010).
- [H2] T. Byczkowski, J. Małecki, M. Ryznar, *Hitting times of Bessel processes*, Potential Anal. 38(3), 753–786 (2013).
- [H3] K. Bogus, J. Małecki, *Sharp estimates of transition probability density for Bessel process in half-line*, Potential Anal. 43(1), 1–22 (2015).
- [H4] K. Bogus, J. Małecki, *Heat kernel estimates for the Bessel differential operator in half-line.*, Math. Nachr. doi: 10.1002/mana.201500163 (2016).

(c) Omówienie celu wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

**Wstęp**

Procesy Bessela pojawiają się w naturalny sposób przy badaniu norm wielowymiarowych procesów Wienera, jednak spektrum teoretycznych zastosowań zarówno procesów Bessela, jak i kwadratowych procesów Bessela jest dużo szersze. Ich systematyczne badanie zapoczątkowane zostało w 1960r. przez H.P. McKean'a w pracy [55], choć już wcześniej można było napotkać różnego rodzaju tzw. rozkłady Bessela, pojawiające się np. przy okazji zrandomizowanego błędzenia losowego, czy też jako rozkład pierwszego przejścia przez ustalony poziom w pewnym błędzeniu losowym (zob. np. [26], Tom II). Pierwszym zaskakującym wynikiem w teorii procesów Bessela było pionierskie twierdzenie Ciesielskiego-Taylor'a z 1962r. z pracy [14] mówiące, że całkowity czas, który  $(d + 2)$ -wymiarowy ruch Browna spędza we wnętrzu kuli jednostkowej jest co do rozkładu identyczny z czasem pierwszego dojścia  $d$ -wymiarowego ruchu Browna do sfery jednostkowej. Twierdzenie to było rozszerzone na procesy Bessela dowolnego (dodatniego) wymiaru; doczekało się wielu uogólnień i interpretacji np. w terminach czasów lokalnych ruchu Browna; było inspiracją badań prowadzonych przez wielu znakomitych matematyków. Kolejnymi głębokimi i ważnymi wynikami w tej teorii są rezultaty z 1963r. udowodnione niezależnie przez D.B. Raya [62] i F.B. Knighta [45], czyli tzw. twierdzenia Raya-Knighta. Identyfikują one czasy lokalne ruchu Browna, rozważane jako funkcje startu procesu, zastopowanego w odpowiednim momencie, jako kwadratowe ruchy Bessela wymiaru 2 bądź 0. Twierdzenia te są kluczowe przy badaniu różnego rodzaju subtelnych własności czasów lokalnych. Warto także wspomnieć głębokie związki procesów Bessela z geometrycznym ruchem Browna i funkcjami addytywnymi, opisane twierdzeniem Lampertiego, zastosowania trójwymiarowego procesu Bessela w opisie ruchu Browna odbitego w swoim supremum, czy też dekompozycję trajektorii procesu Wienera (tzw. twierdzenie Williamsa o rozkładzie trajektorii ruchu Browna [67]). Procesy Bessela pojawiają się też w

naturalny sposób w opisie miary wycieczek ruchu Browna, w teorii mostów i meandrów Browna oraz przy badaniu hiperbolicznego ruchu Browna i jego teorii potencjału. Ponieważ odwrotnymi do czasów lokalnych procesów Bessela w zerze są  $\alpha$ -stabilne subordynatory, znajdują one swoje zastosowania także w badaniu procesów skokowych. Co więcej, istnieje szereg praktycznych zastosowań, w których kluczową rolę odgrywają właśnie procesy Bessela. Wspomnijmy tylko w tym kontekście związki procesów Bessela z procesem Coxa–Ingersolla–Rossa, będącym powszechnym modelem w matematyce finansowej. Nie sposób omówić wszystkich istotnych wyników dotyczących teorii procesów Bessela, dlatego dodajmy tylko, że oprócz wspomnianych już wcześniej badaczy, swój ogromny wkład w dalszy jej rozwój mieli m.in. tacy matematycy jak P. Biane, R.K. Gettoor, J.T. Kent, J.W. Lamperti, H. Matsumoto, S.A. Molchanov, J. Pitman, M. Yor.

W omawianych pracach kontynuujemy badania nad procesami Bessela, koncentrując się w szczególności nad badaniami procesów zabitych w momencie wyjścia z półprostych. Dokładniej, celem rozprawy habilitacyjnej, zawartej w cyklu prac, było opisanie podstawowych obiektów teorii potencjału procesów Bessela, zabitych w momencie wyjścia z półprostej  $(a, \infty)$ , dla ustalonego  $a \geq 0$ , takich jak czasy pierwszego trafienia, rozkłady trafienia i gęstości prawdopodobieństw przejścia. Poprzez podanie opisu rozumiemy tutaj wyprowadzenie jawnych wzorów lub udowodnienie dokładnych obustronnych oszacowań w pełnym zakresie rozważanych parametrów.

- W pracy [H1] badaliśmy rozkłady łączne czasu i miejsca trafienia dyfuzji Bessela-Browna w pewne zbiory kowymiaru 1. Wyprowadziliśmy jawne formuły na gęstości tychże rozkładów w języku zmodyfikowanych funkcji Bessela. Otrzymane wyniki zastosowaliśmy do opisu rozkładów trafienia pewnych klas procesów skokowych.
- Praca [H2] poświęcona jest wyprowadzeniu dokładnych obustronnych oszacowań gęstości czasu pierwszego trafienia procesu Bessela w zadany poziom  $a > 0$  w przypadku, gdy proces ten startuje z punktu  $x > a$ .
- W pracach [H3] i [H4] podaliśmy dokładne obustronne oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia procesów Bessela zabitych w momencie wyjścia z półprostej  $(a, \infty)$ . Oszacowania uzyskane w pracach [H2], [H3] i [H4] w sposób dokładny opisują zachowanie eksponencjalne badanych obiektów.

Zanim przejdziemy do dokładnego opisu tychże wyników przedstawimy podstawowe definicje, wzory oraz własności trajektorii procesów Bessela, które były wykorzystywane w omawianych pracach. Bardziej kompletne i pełne opracowanie można znaleźć w książce [63], czy też pracach [53], [54], ale warto też wspomnieć bardzo przydatne kompendium wiedzy o procesach Bessela, które zawarte jest w książce [6].

## Procesy Bessela

Istnieje kilka równoważnych definicji procesów Bessela, które w zależności od badanego zagadnienia oraz stosowanych metod dowodowych okazują się bardziej lub mniej użyteczne. Nasze rozważania rozpoczniemy od podejścia bazującego na stochastycznych równaniach różniczkowych. Pozwala ono bowiem w bardzo naturalny sposób przejść od norm wielowymiarowych ruchów Browna do procesów Bessela dowolnego wymiaru. Dodatkowo metody analizy stochastycznej są kluczowe z punktu widzenia wyników uzyskanych w pierwszej pracy [H1] omawianego cyklu. Zauważmy zatem, że definiując proces

$$Z_t = B_1^2(t) + \dots + B_n^2(t), \quad t \geq 0,$$

gdzie  $B^n = (B_1, \dots, B_n)$  jest procesem Wienera w  $\mathbf{R}^n$ , otrzymujemy jednowymiarową dyfuzję na półprostej  $[0, \infty)$ . Stosując wzór Itô wraz z charakteryzacją Lévy'ego procesu Wienera można pokazać, że tak

zdefiniowany proces spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dZ_t = 2\sqrt{|Z_t|}d\beta_t + ndt, \quad Z_0 = \|B(0)\|^2,$$

gdzie  $\beta_t$  jest pewnym jednowymiarowym ruchem Browna. Nie ma jednak powodu, dla którego w badaniu powyższego równania powinniśmy ograniczać się tylko do naturalnych wartości stałej występującej w części o wahanii ograniczonym. W związku z tym wprowadzamy następującą definicję.

**DEFINICJA 1.** Dla  $x \geq 0$  jedyne mocne rozwiązanie równania

$$dZ_t = 2\sqrt{|Z_t|}d\beta_t + \delta dt, \quad Z_0 = x, \quad (1)$$

nazywamy kwadratowym procesem Bessela wymiaru  $\delta$  startującym z  $x$  i oznaczamy je  $BESQ^\delta(x)$ .

Mocna jedyność rozwiązań równania (1) wynika z twierdzenia Yamady-Watanabe pochodzącego oryginalnie z pracy [68]. Warto podkreślić, że klasyczne twierdzenia o jednoznaczności dla równań o lipschitzowskich współczynnikach nie mają tutaj zastosowania ze względu na występujący w równaniu pierwiastek kwadratowy. Łatwo także sprawdzić, że dla  $\delta = 0$  oraz  $x = 0$  rozwiązaniem powyższego równania jest proces stałe równy zero, co na mocy twierdzenia o porównywaniu (rozdział IX, Twierdzenie 3.7 w [63]) implikuje, że dla  $\delta \geq 0$  oraz  $x \geq 0$  proces  $BESQ^\delta(x)$  jest nieujemny. Okazuje się jednak, że dla  $\delta < 0$  trajektorie kwadratowych procesów Bessela stają się ujemne z prawd. 1 i po czasie uderzenia w zero proces zachowuje się jak minus proces Bessela wymiaru dodatniego startujący z zera, tzn.  $-BESQ^{-\delta}(0)$  (zob. rozdział 3 w pracy [31]). Mimo, że nadal mamy do czynienia z dyfuzją, to jednak jest to znacznie bardziej skomplikowany obiekt i np. wzory na gęstości prawdopodobieństw przejścia są dużo bardziej skomplikowane (gdy  $x > 0$ , zaś  $y < 0$ ). W związku z ujemnością trajektorii zdefiniowanie procesu Bessela wymiaru ujemnego jako pierwiastka kwadratowego z  $BESQ^\delta(x)$  wymaga wcześniejszego zabicia procesu  $BESQ^\delta(x)$  w momencie pierwszego uderzenia w 0.

**DEFINICJA 2.** Procesem Bessela  $BES^\delta(x)$  startującym z punktu  $x \geq 0$  wymiaru  $\delta \in \mathbf{R}$  nazywamy pierwiastek kwadratowy z procesu  $BESQ^\delta(x^2)$ , gdzie dla  $\delta < 0$  proces  $BESQ^\delta(x^2)$  uprzednio zabijamy w momencie pierwszego uderzenia w zero. Przez  $\mathbf{P}_x^\delta$  oznaczamy rozkład procesu Bessela (na  $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ ).

Podobnie jak w przypadku kwadratowych procesów Bessela, liczbę  $\delta$  nazywamy wymiarem procesu  $BES^\delta(x)$ . Wprowadzamy ponadto tzw. **indeks** procesu Bessela (kwadratowego procesu Bessela) kładąc  $\nu = \delta/2 - 1$ . Będziemy stosować zapis  $BESQ^{(\nu)}(x)$  oraz  $BES^{(\nu)}(x)$ ,  $\mathbf{P}_x^{(\nu)}$ , gdy odnosić się będziemy do indeksu rozważanych procesów zamiast do ich wymiarów.

Rozkłady procesów Bessela są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a, zaś ich gęstości wyrażają się przez zmodyfikowane funkcje Bessela w następujący sposób. Dla  $\nu > -1$  mamy

$$\begin{aligned} p^{(\nu)}(t, x, y) &= \frac{1}{t} \left(\frac{y}{x}\right)^\nu y \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \quad x, y > 0, \quad t > 0, \\ p^{(\nu)}(t, 0, y) &= \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu t^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right), \quad y > 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

oraz dla  $\nu \leq -1$  zachodzi

$$p^{(\nu)}(t, x, y) = \frac{1}{t} \left(\frac{y}{x}\right)^\nu y \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_{|\nu|}\left(\frac{xy}{t}\right), \quad x, y > 0, \quad t > 0.$$

Powyższe gęstości stają się symetryczne ze względu na zmienne przestrzenne  $x$  i  $y$ , gdy jako miarę odniesienia rozpatrzmy miarę prędkości (z ang. *speed measure*), która w przypadku procesów Bessela zadana jest

wzorem  $m^{(\nu)}(dy) = 2y^{2\nu+1}dy$ . Jedną z kluczowych z punktu widzenia omawianych rezultatów własności rozkładów procesów Bessela jest absolutna ciągłość rozkładów procesów o różnych indeksach. Przed jej sformułowaniem doprecyzujemy, że pracujemy na przestrzeni kanonicznej trajektorii ciągłych  $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbf{R})$ , zaś przez  $\mathcal{F}_t$  oznaczamy  $\sigma$ -ciało generowane przez trajektorie do czasu  $t$ . Dodatkowo definiujemy pierwszy moment uderzenia w zadany poziom

$$T_a = \inf\{t > 0 : R(t) = a\}, \quad a \geq 0,$$

określony dla każdej trajektorii  $R \in \Omega = \mathcal{C}([0, \infty), \mathbf{R})$ . Będziemy czasami pisać  $R^{(\nu)} = (R_t^{(\nu)})_{t \geq 0}$  zaznaczając indeks rozważanego procesu Bessela. Jednak w przypadku, gdy będziemy operować różnymi miarami na przestrzeni kanonicznej, z wiadomych powodów, oznaczenie indeksu pojawiać się będzie tylko przy notacji odpowiednich rozkładów i wartości oczekiwanych, tzn.  $\mathbf{P}_x^{(\nu)}$ ,  $\mathbf{E}_x^{(\nu)}$ . Dla dowolnych  $\mu \geq 0$  oraz  $\nu \in \mathbf{R}$  zachodzi

$$\left. \frac{d\mathbf{P}_x^{(\mu)}}{d\mathbf{P}_x^{(\nu)}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \left( \frac{R(t)}{x} \right)^{\mu-\nu} \exp \left( -\frac{\mu^2 - \nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R^2(s)} \right), \quad (2)$$

gdzie  $x \geq 0$ , zaś powyższa zależność zachodzi  $\mathbf{P}_x^{(\nu)}$ -p.n. na zbiorze  $\{T_0^{(\nu)} > t\}$ , czyli do pierwszego momentu uderzenia trajektorii w zero. Warunek ten można pominąć w przypadku nieujemnych indeksów, ponieważ wtedy  $\mathbf{P}_x^{(\nu)}(T_0 = \infty) = 1$ . Dla  $\nu < 0$  ( $\delta < 2$ ) proces uderza w zero prawie na pewno. Dodatkowo dla  $0 < \delta < 2$  zero jest punktem odbijającym (z ang. *instantaneously reflecting*), zaś dla  $\delta = 0$  zero jest pochłaniające (zob. rozdział XI, Proposition 1.5 w [63]). Co więcej, proces Bessela jest tranzytywny, gdy  $\nu > 0$  ( $\delta > 2$ ) i rekurencyjny w pozostałych przypadkach. Zauważmy, że przytoczone własności korespondują ze znanym zachowaniem trajektorii wielowymiarowego procesu Wienera.

Na procesy Bessela można także spojrzeć z punktu widzenia jednowymiarowych dyfuzji. Definiujemy wtedy proces Bessela z indeksem  $\nu \in \mathbf{R}$  jako dyfuzję na półprostej  $[0, \infty)$  lub  $(0, \infty)$ , której generatorem infinitesimalnym jest  $\frac{1}{2}L^{(\nu)}$ , gdzie

$$L^{(\nu)} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{d}{dx}, \quad x > 0, \quad (3)$$

jest operatorem Bessela. Jednoznaczność powyższej definicji wymaga doprecyzowania dziedziny generatora lub równoważnie dookreślenia warunku brzegowego w zerze w przypadku, gdy  $\nu \in (-1, 0)$ . Zadanie w tym przypadku warunku odbijania sprawia, że podejście to pokrywa się z definicją przy użyciu stochastycznych równań różniczkowych.

## Rozkłady czasu i miejsca trafienia dyfuzji Bessela-Browna (praca [H1])

Badania procesów Bessela zabitych w momencie dojścia do zadanego poziomu zaczynamy od najbardziej naturalnego przypadku, tzn. sytuacji uderzenia w zero. Zważywszy na opisane powyżej własności trajektorii procesu  $BES^{(\nu)}(x)$ , problem ten wart jest uwagi tylko dla  $\nu < 0$ , ponieważ w przeciwnym przypadku czas pierwszego trafienia  $T_0$  jest nieskończony  $\mathbf{P}_x^{(\nu)}$ -prawie na pewno. Jednakże zarówno rozkłady pierwszego czasu trafienia jak i gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu zabitego w momencie  $T_0$  są bardzo dobrze znane. Rzeczywiście, dla  $\nu < 0$  oraz  $x > 0$  zachodzi [44, 30]

$$\mathbf{P}_x^{(\nu)}(T_0 \in dt) = \frac{2^\nu}{x^{2\nu} \Gamma(-\nu) t^{1-\nu}} \exp \left( -\frac{x^2}{2t} \right) dt, \quad t > 0. \quad (4)$$

Natomiast stosując własność absolutnej ciągłości (wzór (2) dla  $\mu = -\nu$ ) można prosto wyrazić gęstość prawdopodobieństw przejścia procesu Bessela o ujemnym indeksie  $\nu$  zabitego w momencie uderzenia w zero przy pomocy funkcji  $p^{(-\nu)}(t, x, y)$ . Sytuacja robi się jednak dużo bardziej skomplikowana, gdy do naszego bazowego procesu Bessela  $R^{(\nu)}$  dołączymy niezależny  $n$ -wymiarowy proces Wienera  $B^n = (B_1, \dots, B_n)$ . Utworzony w ten sposób  $(n+1)$ -wymiarowy proces o niezależnych współrzędnych  $\mathbf{Y}(t) = (R^{(\nu)}(t), B^n(t))$  nazywamy **dyfuzją Bessela-Browna**. Dodatkowo, dla otwartego zbioru  $\tilde{D} \subset \mathbf{R}^n$ , rozważmy

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : R^{(-\nu)}(t) = 0, \quad B^n(t) \notin \tilde{D}\}, \quad (5)$$

tnz. pierwszy moment wyjścia procesu  $\mathbf{Y}$  ze zbioru  $D = (\{0\} \times \tilde{D}^c)^c$  lub równoważnie pierwszy moment trafienia  $\mathbf{Y}$  w  $\{0\} \times \tilde{D}^c$ . W tym przypadku interesować nas będzie zarówno rozkład momentu stopu  $\tau_D$ , jak i rozkład  $\mathbf{Y}(\tau_D)$ . W związku z ciągłością trajektorii procesu oraz definicją  $\tau_D$  sprowadza się to *de facto* do badania rozkładu zmiennej losowej  $(\tau_D, B^n(\tau_D))$ . Zauważmy ponadto, że problem ten jest interesujący tylko wtedy, gdy  $\nu \in (-1, 0)$  i zero jest punktem odbijającym dla  $R^{(\nu)}$ . W przeciwnym bowiem przypadku problem znalezienia rozkładu  $(\tau_D, B^n(\tau_D))$  trywializuje się (wobec założonej niezależności składowych procesu  $\mathbf{Y}$  i definicji  $\tau_D$ ).

Choć przedstawione powyżej zagadnienie może się wydawać na pozór sztuczne, to motywacje do podjęcia tej tematyki wyjaśnia Lemat 1 (Proposition 3.1 w [H1]) wiążący ze sobą rozkłady łączne czasu i miejsca trafienia dyfuzji Bessela-Browna z miarami harmonicznymi  $\alpha$ -stabilnego procesu relatywistycznego z parametrem  $m \geq 0$ , czyli procesu Lévy'ego  $X^m$  na  $\mathbf{R}^n$ , którego funkcja charakterystyczna zadana jest wzorem

$$\mathbf{E}^0 e^{i\xi \cdot X^m(t)} = e^{mt} e^{-t(|\xi|^2 + m^2/\alpha)^{\alpha/2}}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Generator infinitesimalny procesu relatywistycznego jest zatem postaci

$$H_\alpha = mI - (m^2/\alpha I - \Delta)^{\alpha/2}.$$

W szczególności dla  $m = 0$  dostajemy izotropowy proces  $\alpha$ -stabilny. Podstawowym obiektem badań jest dla nas  $\lambda$ -miara harmoniczna zbioru  $\tilde{D} \subset \mathbf{R}^n$  zdefiniowana wzorem

$$P_{\tilde{D}}^{\lambda, m}(x, A) = \mathbf{E}^x \left[ \tau_{\tilde{D}} < \infty; e^{-\lambda \tau_{\tilde{D}}} \mathbf{1}_A(X^m(\tau_{\tilde{D}})) \right], \quad x \in \tilde{D}, \quad A \in \text{Borel}(\mathbf{R}^n),$$

gdzie  $\tau_{\tilde{D}} = \inf\{t > 0 : X^m(t) \notin \tilde{D}\}$  jest pierwszym momentem wyjścia procesu  $X^m(t)$  ze zbioru  $\tilde{D}$ . W przypadku  $\lambda = m$  będziemy używać skróconego zapisu  $P_{\tilde{D}}^m(x, A)$  zamiast  $P_{\tilde{D}}^{m, m}(x, A)$ . Okazuje się, że ma miejsce następująca zależność.

**Lemat 1** (Proposition 3.1 w [H1]). *Niech  $\tilde{D} \subset \mathbf{R}^n$  będzie zbiorem otwartym o własności stożka zewnętrznego oraz niech  $x = (0, \tilde{x}) \in \{0\} \times \tilde{D}$ . Załóżmy ponadto, że  $\mathbf{P}^x(\tau_D < \infty)$ , gdzie  $\tau_D$  jest zdefiniowanym w (5) czasem pierwszego trafienia dyfuzji  $\mathbf{Y} = (R_t^{-\alpha/2}, B^n(t))$ ,  $\alpha \in (0, 2)$ , w zbiór  $D = \{0\} \times \tilde{D}^c$ . Wtedy  $m$ -miara harmoniczna dla  $\alpha$ -stabilnego procesu relatywistycznego z parametrem  $m \geq 0$  wyraża się wzorem*

$$P_{\tilde{D}}^m(\tilde{x}, A) = \mathbf{E}^x [e^{-\frac{m^2/\alpha}{2} \tau_D}; B^n(\tau_D) \in A], \quad A \subset \text{Borel}(\mathbf{R}^n). \quad (6)$$

Powyższy wzór jest także prawdziwy dla  $m = 0$ , tzn. dla miary harmoniczej izotropowego procesu  $\alpha$ -stabilnego.

Techniczny warunek stożka zewnętrznego gwarantuje regularność punktów brzegowych, tzn.  $P^y(\tau_D = 0) = 1$  dla każdego  $y \in \{0\} \times \bar{D}$ . Dowód lematu polega na wykazaniu, że prawa strona powyższej równości spełnia równanie całkowe zwane wzorem na wymiatanie

$$\int_{\bar{D}^c} U_m^m(z-y) P_{\bar{D}}^m(x, dz) = U_m^m(x-y), \quad x \in \bar{D}, \quad y \in \bar{D}^c,$$

które w sposób jednoznaczny charakteryzuje  $m$ -miarę harmoniczną, czyli lewą stronę równości (6). Tutaj  $U_\lambda^m(x)$  jest jądrem  $\lambda$ -rezolwenty, które w szczególnym przypadku  $\lambda = m$  wyraża się jawnym wzorem

$$U_m^m(x, y) = \frac{2^{1-(d+\alpha)/2} K_{(d-\alpha)/2}(|x-y|)}{\Gamma(\alpha/2)\pi^{d/2} |x-y|^{(d-\alpha)/2}}, \quad (7)$$

gdzie  $K_\nu(z)$  oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju. Ogólna idea spojrzenia na skokowe procesy Markowa jako na ślady odpowiednich dyfuzji ma swoje początki w pracy Molchanova i Ostrowskiego [56] i była wykorzystywana w różnych aspektach m.in. przez DeBlaisse, Bañuelos i Kulczyckiego, Kwaśnickiego, czy Isozackiego. Analogiczne techniki w analizie znane są pod nazwą rozszerzeń Caffarelli–Silvestre’a, po tym jak zostały one odkryte na nowo w pracy [12]. Choć w omawianej pracy nie wykorzystujemy bezpośrednio żadnych ze znanych wyników tego typu, to wpisuje się ona w ten nurt badań. Wracając do Lematu 1 zauważmy, że znajomość rozkładu  $(\tau_D, B^n(\tau_D))$ , a dokładniej transformaty Laplace’a czasu  $\tau_D$  i rozkładu miejsca trafienia  $B^n(\tau_D)$ , daje natychmiast wzór na  $m$ -miarę harmoniczną  $\alpha$ -stabilnego procesu relatywistycznego z parametrem  $m$ . Warto w tym miejscu podkreślić, że jawne wzory na gęstości miar harmonicznych w przypadku procesów skokowych są z jednej strony sporą rzadkością, zaś z drugiej ich znajomość pozwala na rozwój teorii potencjału związanej z rozważanym procesem. Samo zainteresowanie procesami relatywistycznymi, które były w ostatnich latach intensywnie badane, wynika między innymi z ich zastosowań w relatywistycznej mechanice kwantowej. Mówiąc dokładniej, relatywistyczny Hamiltonian, zwany także pierwiastkowym operatorem Kleina-Gordona, tj. operator postaci

$$\mathcal{H} = (-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4)^{1/2}, \quad (8)$$

opisujący energię kinetyczną cząstki relatywistycznej o masie  $m$  (tutaj  $c$  jest prędkością światła, zaś  $\hbar$  stałą Plancka) może być w prosty sposób wyrażony przez generator infinitesimalny relatywistycznego procesu 1-stabilnego. Druga zasadnicza motywacja do podjęcia tych badań wiąże się z prostą obserwacją: miara  $P_{\bar{D}}^m(x, A)$  jest miarą harmoniczną zbioru  $\bar{D}$  dla operatora  $-(m^{\alpha/2}I - \Delta)^{\alpha/2}$ . Operator ten zaś pojawia się w kontekście tzw. interpolacyjnych przestrzeni potencjałów Bessela  $J_\alpha = (I - \Delta)^{-\alpha/2}$ , czyli operatorów (formalnie) odwrotnych do  $(I - \Delta)^{\alpha/2}$ . Operatory te posiadają reprezentację splotową z jądrem całkowym zadanym wzorem (7), które w tym kontekście nazywane jest jądrem Bessela. Znaczenie potencjałów Bessela obrazuje chociażby fakt, że pozwalają one zdefiniować przestrzenie Sobolewa  $L_\alpha^p(\mathbf{R}^d)$  jako podprzestrzeń  $L^p(\mathbf{R}^d)$  składającą się z funkcji postaci  $J_\alpha g$ , gdzie  $g \in L^p(\mathbf{R}^d)$  (zob. [66] rozdz. V). Szerokie zastosowania przestrzeni Sobolewa w analizie harmonicznej, czy też teorii równań różniczkowych cząstkowych są powszechnie znane. Co ciekawe, tak ważny element teorii potencjału związanej z  $J_\alpha$  jak znajomość dokładnej postaci miar harmonicznych i funkcji Greena dla najbardziej podstawowych zbiorów jakimi są półproste (półprzestrzenie), czy też odcinki (pasy) nie był do tej pory znany. Dopiero w pracy [D2], wchodzącej w skład mojego doktoratu, udowodniliśmy wzór na postać gęstości miary harmonicznej oraz funkcji Greena w przypadku półprzestrzeni. Niestety, przedstawiony tam dowód nie był konstruktywny, co uniemożliwiało wyznaczenie postaci miar harmonicznych w przypadku innych zbiorów, np. dla odcinka. Wyniki omawianej pracy [H1] bazują na innym podejściu (przepisaniu problemu w języku dyfuzji Bessela-Browna), które pozwala ten defekt usunąć i w szczególności podać pewien opis miar harmonicznych dla odcinków, czy też pasów.

**Przypadek półprostej.** Rozważania rozpoczynamy od przypadku trafiania dwuwymiarowej dyfuzji Bessela-Browna  $\mathbf{Y} = (R_t^{-\alpha/2}, B(t))$  w jednowymiarową półprostą  $\tilde{D} = (-\infty, 0) \subset \mathbf{R}$ , tzn. definiujemy

$$D_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 : y_1 = 0, y_2 > 0\}^c = (\{0\} \times \tilde{D}^c)^c$$

oraz czas pierwszego wyjścia  $\mathbf{Y}$  ze zbioru  $D_1$ , tzn.

$$\tau_{D_1} = \inf\{t > 0 : \mathbf{Y} \notin D_1\} = \inf\{t > 0 : R_t^{-\alpha/2} = 0 \wedge B(t) > 0\}.$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3** (Theorem 4.4 w [H1]). Dla  $(R_0^{-\alpha/2}, B(0)) = (z_1, z_2) \in D_1$ ,  $z_1 > 0$ ,  $\lambda > 0$  miara

$$\mathbf{E}^{(z_1, z_2)} \left[ e^{-\frac{\lambda^2}{2} \tau_{D_1}} ; B(\tau_{D_1}) \in A \right]$$

jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a na półprostej  $r > 0$  o gęstości zadanej wzorem

$$\frac{(|z| + z_2)^{\frac{\alpha}{4}} (|z| - z_2)^{\frac{\alpha}{2}}}{2^{\frac{3\alpha}{4}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) r^{\alpha/4}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-(|z|+r)s} (s^2 - \lambda^2)^{\alpha/4} I_{-\frac{\alpha}{2}} \left( \sqrt{2r} \sqrt{|z| + z_2} \sqrt{s^2 - \lambda^2} \right) ds$$

Dla  $z_1 = 0$  oraz  $z_2 = u < 0$  mamy

$$\mathbf{E}^{(0, u)} \left[ e^{-\frac{\lambda^2}{2} \tau_{D_1}} ; B(\tau_{D_1}) \in dr \right] = \frac{\sin(\pi\alpha/2)}{\pi} \left( \frac{-u}{r} \right)^{\alpha/2} \frac{e^{-\lambda(r-u)}}{r-u}. \quad (9)$$

Główna idea dowodu bazuje na adoptowaniu do rozważanej przez nas sytuacji bardzo klasycznej własności ruchu Browna na płaszczyźnie, mówiącej o jego konformalnej niezmienniczości. Obrazem zespolonego ruchu Browna  $B_1 + iB_2$  przez funkcję holomorficzną  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  jest zespolony proces Wienera ze zmienionym czasem, zaś zmiana ta opisana jest przez funkcjonal całkowy postaci  $\int_0^t |f'(B(s))|^2 ds$ . Okazuje się, że podobne zjawisko zachodzi także w kontekście dyfuzji Bessela-Browna. Ponieważ dowód tej własności bazuje na rachunku stochastycznym, lepiej jest zamiast procesu Bessela rozważać kwadratowy proces Bessela. Oznaczmy zatem przez  $Y = (Y_1, Y_2)$  proces opisany równaniami

$$\begin{cases} dY_1 = 2\sqrt{Y_1}d\beta_1 + (2 - \alpha)dt \\ dY_2 = d\beta_2 \end{cases}, \quad (10)$$

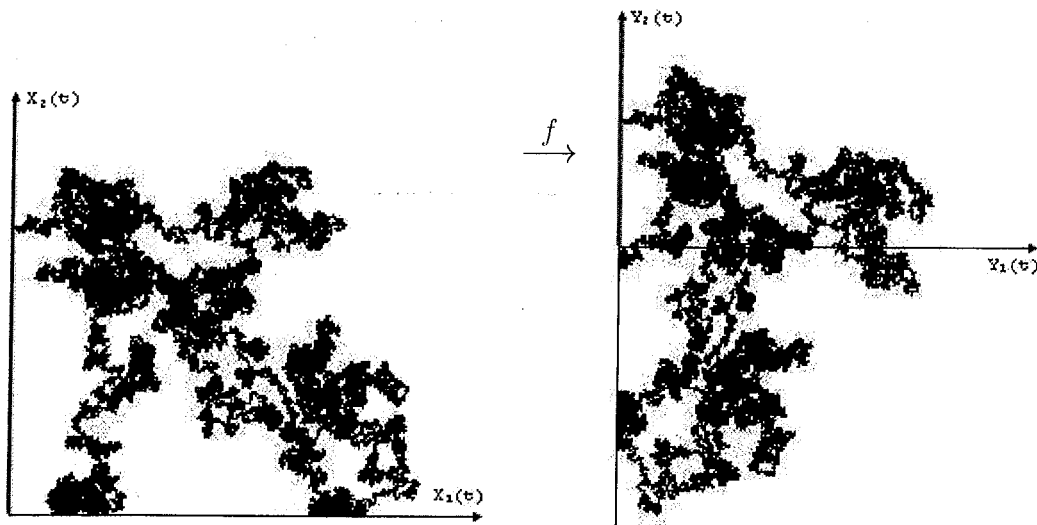
gdzie  $\beta_1$  i  $\beta_2$  są niezależnymi procesami Wienera. Proces  $Y$  powstaje z dyfuzji Bessela-Browna  $\mathbf{Y}$  przez podniesienie do kwadratu pierwszej współrzędnej (zamienienie procesu Bessela na odpowiadający mu kwadratowy proces Bessela). Rozważymy także dwa niezależne kwadratowe procesy Bessela

$$\begin{cases} dX_1 = 2\sqrt{X_1}dB_1 + (2 - \alpha)dt \\ dX_2 = 2\sqrt{X_2}dB_2 + (2 - \alpha)dt \end{cases},$$

i zdefiniujemy  $Z = (Z_1, Z_2) = f(X_1, X_2)$ , gdzie  $f(x, y) = (4xy, y^2 - x^2)$ . Okazuje się (zob. Section 2 w [H1]), że funkcja  $f$  przekształca dwa niezależne kwadratowe procesy Bessela  $(X_1, X_2)$  w proces  $Y$  ze zmienionym czasem, tzn.  $Y = Z \circ \sigma_1$ , gdzie  $\sigma_1 = \inf\{t > 0 : A_1(t) > s\}$  jest uogólnioną funkcją odwrotną do funkcjonału całkowego

$$A_1(t) = 4 \int_0^t (X_1(s) + X_2(s)) ds.$$





Rysunek 1: Ślad trajektorii procesu  $(X_1, X_2)$  zatrzymanej w chwili pierwszego wyjścia ze zbioru  $H$  i jego obraz przez funkcję  $f$ .

Fakt ten wynika ze wzoru Itô oraz charakterystyki Lévy'ego. Wybierając postać funkcji  $f$  wzorowaliśmy się na funkcji holomorficznej  $z \rightarrow -iz^2 = 2\Re z \Im z + i((\Im z)^2 - (\Re z)^2)$ . Współczynnik  $-i$  występuje tutaj ze względów czysto technicznych. Ponieważ pracujemy na kwadratowych procesach Bessela musimy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy ze współrzędnych, a następnie podnieść do kwadratu pierwszą współrzędną obrazu, tzn.  $f(x_1, x_2) = ((2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2})^2, \sqrt{x_2^2} - \sqrt{x_1^2})$ . Dodatkowo,  $f$  przekształca

$$H = \{(x_1, x_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x_1 > 0\}$$

w rozważany przez nas zbiór  $D_1$ , zaś pierwszy moment wyjścia procesu  $(X_1, X_2)$  ze zbioru  $H$  tj.  $\tau_H = \inf\{t > 0 : X_1(t) = 0\}$  odpowiada pierwszemu momentowi uderzenia  $Z = (Z_1, Z_2)$  w półprostą  $\{0\} \times [0, \infty)$ , co obrazuje rys. 1. Dokładniej, zachodzi następujący

**Lemat 2** (Lemma 4.1 w [H1]). *Rozkład  $(\tau_{D_1}, Y(\tau_{D_1}))$  względem  $\mathbf{P}^{(y_1, y_2)}$  jest taki sam, jak rozkład zmiennej  $(A_1(\tau_H), f(X(\tau_H)))$  względem  $\mathbf{P}^{(x_1, x_2)}$ , gdzie  $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ .*

Powyższy lemat pozwala przetłumaczyć problem wyznaczenia rozkładów czasu i miejsca trafienia dyfuzji Bessela-Browna w przypadku, gdy czas ten zależy od obu współrzędnych, na podobne zagadnienie dla dwóch niezależnych kwadratowych procesów Bessela  $(X_1, X_2)$ , w którym jednak czas trafienia zależy tylko od pierwszego z nich. Kosztem takiej zmiany jest występowanie bardziej skomplikowanego obiektu  $A_1(\tau_H)$  w miejsce  $\tau_{D_1}$ . Mimo to, korzystając z postaci funkcjonału całkowego  $A_1(t)$ , który jest sumą całek zależnych tylko od  $X_1$  i  $X_2$  odpowiednio, możemy cały problem sprowadzić do przypadku jednowymiarowego. Korzystając z niezależności współrzędnych mamy bowiem

$$\mathbf{E}^{(x_1, x_2)} \left[ e^{-\frac{\lambda^2}{2} A_1(\tau_H)} ; X_2(\tau_H) \in dr \right] = \int_0^\infty w(dt, x_1) \psi(t, x_2, dr),$$

gdzie

$$w(t, x_2) = \mathbf{E}^{x_1} \left[ \exp \left( -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^{\tau_H} X_1(s) ds \right) ; \tau_H \in dt \right],$$

oraz

$$\psi(t, x_2, dr) = \mathbf{E}^{x_2} \left[ \exp \left( -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^t X_2(s) ds \right); X_2(t) \in dr \right].$$

Powyższe wyrażenia są jednowymiarowe ( $\tau_H$  zależy tylko od  $X_1$ ) i dobrze poznane w teorii procesów Bessela. Jawne wzory na oba rozkłady w języku funkcji Whittakera i zmodyfikowanych funkcji Bessela zostały także wyprowadzone w Lematach 4.2 i 4.3 omawianej pracy i prowadzą one bezpośrednio do formuł występujących w Twierdzeniu 3.

**Przypadek dwóch półprostych.** Kolejnym rozważanym zagadnieniem było trafianie dwuwymiarowej dyfuzji Bessela-Browna  $\mathbf{Y} = (R^{-\alpha/2}, B(t))$  w dwie półproste i było ono motywowane potrzebą wyznaczenia  $m$ -miary harmonicznej odcinka dla procesu relatywistycznego. Oznaczmy zatem

$$C_1 = \{(y_1, y_2) \in [0, \infty) \times \mathbf{R} : y_1 = 0, |y_2| > 1\}^c$$

i niech  $\tau_{C_1}$  będzie pierwszym momentem wyjścia  $\mathbf{Y}$  z  $C_1$ , tzn.

$$\tau_{C_1} = \inf\{t > 0 : R_t^{(-\alpha/2)} = 0 \wedge |B(t)| > 1\}.$$

Opis transformaty Laplace'a czasu i rozkładu miejsca trafienia w tym przypadku jest następujący.

**Twierdzenie 4** (Theorem 4.6 in [H1]). Dla  $(R_0^{(-\alpha/2)}, B(0)) = (z_1, z_2) \in C_1$  i  $r > x_2 \geq 1$  zachodzi

$$\mathbf{E}^{(z_1, z_2)} \left[ e^{-\frac{\lambda^2}{2} \tau_{C_1}}; B(\tau_{C_1}) \in dr \right] = \frac{1}{(r^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\alpha}{4} - i\infty}^{\frac{\alpha}{4} + i\infty} m_{-\vartheta, \lambda}(x_1) w_\lambda(\vartheta) \phi_{\vartheta, \lambda}^\uparrow(x_2) \phi_{\vartheta, \lambda}^\downarrow(r) d\vartheta,$$

gdzie

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{z_1^2 + (z_2 + 1)^2} + \sqrt{z_1^2 + (z_2 - 1)^2} \right), \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{z_1^2 + (z_2 + 1)^2} - \sqrt{z_1^2 + (z_2 - 1)^2} \right) \end{aligned}$$

i funkcja  $m_{\vartheta, \lambda}(\cdot)$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$(1 - x^2)y''(x) - (2 - \alpha)x y'(x) - (\lambda^2(1 - x^2) + 2\vartheta)y(x) = 0, \quad |x| < 1, \quad (11)$$

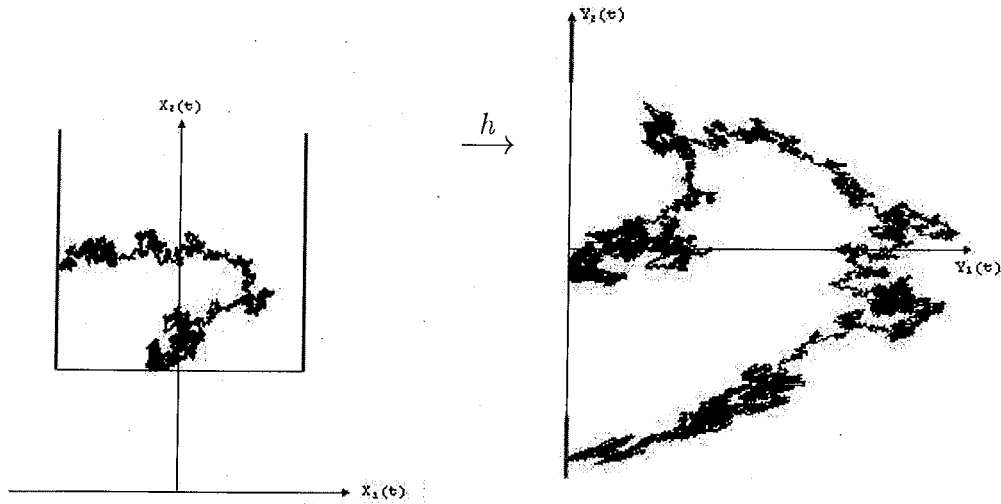
z warunkami brzegowymi  $m_{\vartheta, \lambda}(-1) = 0$ ,  $m_{\vartheta, \lambda}(1) = 1$ . Funkcje  $\phi_{\vartheta, \lambda}^\uparrow(\cdot)$  i  $\phi_{\vartheta, \lambda}^\downarrow(\cdot)$  są odpowiednio rosnącym i malejącym dodatnim rozwiązaniem równania różniczkowego

$$(r^2 - 1)y''(r) + (2 - \alpha)r y'(r) - (\lambda^2(r^2 - 1) + 2\vartheta)y(r) = 0, \quad r > 1. \quad (12)$$

spełniającymi  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi_{\vartheta, \lambda}^\uparrow(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_{\vartheta, \lambda}^\downarrow(x) = 0$  i

$$w_\lambda(\vartheta) = \frac{2}{(1 - r^2)^{\alpha/2 - 1} W\{\phi_{\vartheta, \lambda}^\uparrow, \phi_{\vartheta, \lambda}^\downarrow\}(r)},$$

gdzie  $W\{\phi_{\vartheta, \lambda}^\uparrow, \phi_{\vartheta, \lambda}^\downarrow\}$  jest Wrońskianem pary  $\{\phi_{\vartheta, \lambda}^\uparrow, \phi_{\vartheta, \lambda}^\downarrow\}$ .



Rysunek 2: Ślad trajektorii procesu  $(X_1, X_2)$  zatrzymanej w chwili pierwszego wyjścia ze zbioru  $H$  i jego obraz przez funkcję  $h$ .

Idea dowodu jest analogiczna do przypadku jednej półprostej. Zaczynamy od procesu  $Y$  opisanego równaniami (10) oraz dwóch niezależnych procesów jednowymiarowych spełniających

$$\begin{cases} dX_1 = \sqrt{|1 - X_1^2|} dB_1 - \frac{2 - \alpha}{2} X_1 dt \\ dX_2 = \sqrt{|X_2^2 - 1|} dB_2 + \frac{2 - \alpha}{2} |X_2| dt \end{cases}, \quad (13)$$

gdzie  $|X_1(0)| < 1$  oraz  $X_2(0) > 1$ . Pierwszy z nich jest pewną wersją procesu Legendre'a o trajektoriach w  $[-1, 1]$ , zaś drugi związany jest z tzw. hiperbolicznym procesem Bessela i jest dyfuzją na półprostej  $[1, \infty)$ . Definiujemy  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  wzorem  $h(x_1, x_2) = ((1 - x_1^2)(x_2^2 - 1), x_1 x_2)$ . Funkcja  $h$  jest bijekcją między

$$G = \{(x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [1, \infty) : -1 < x_1 < 1\}$$

a zbiorem  $C_1$ . Podobnie jak poprzednio, pokazujemy, że proces  $Z = (Z_1, Z_2) = h(X_1, X_2)$  jest procesem  $Y = (Y_1, Y_2)$  ze zmienionym czasem przez  $\sigma_2$ , które jest uogólnionym odwrotnym do funkcjonau całkowego

$$A_2(t) = \int_0^t (X_2^2(s) - X_1^2(s)) ds.$$

Postać funkcji  $h$  została zapostulowana na podstawie wzoru  $z \rightarrow \sin(z) = \sin(\Re z) \operatorname{ch}(\Im z) + i \operatorname{sh}(\Im z) \cos(\Re z)$  oraz prostego spostrzeżenia, że dla  $\alpha = 0$  procesy  $X_1(t) = \sin B_1(t)$  oraz  $X_2(t) = \cosh B_2(t)$  spełniają powyższe stochastyczne równania różniczkowe. Okazuje się, że w rozważanym przez nas przypadku  $\alpha \in (0, 2)$ , pomimo braku tak prostej reprezentacji procesów  $X_1$  i  $X_2$ , ta sama funkcja  $h$  pozwala uzyskać odpowiednią zależność między rozkładami procesów  $(X_1, X_2)$  i  $(Y_1, Y_2)$ .

**Lemat 3** (Lemat 4.5 w [H1]). *Rozkład  $(\tau_{C_1}, Y(\tau_{C_1}))$  względem  $\mathbf{P}^{(y_1, y_2)}$  jest taki sam jak rozkład zmiennej  $(A_2(\tau_G), h(X(\tau_G)))$  względem  $\mathbf{P}^{(x_1, x_2)}$ , gdzie  $h(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ .*

Także w tym przypadku funkcjonal  $A_2(t)$  rozkłada się na sumę dwóch całek zależnych tylko od  $X_1$  i  $X_2$  odpowiednio, zaś pierwszy moment wyjścia z  $G$  jest niezależny od  $X_2$ . Pozwala to na redukcję całego zagadnienia do przypadków jednowymiarowych. Niestety brakuje dobrze rozwiniętej teorii procesów opisanych równaniami (13) i dlatego stosując ogólną teorię półgrup Feynmana-Kaca sprowadzamy cały problem do szukania rozwiązań odpowiednich równań różniczkowych drugiego rzędu. Są to dość ogólne równania, tzw. *spheroidal wave equation*. Choć w pewnych szczególnych przypadkach redukują się one do bardziej znanych i zbadanych klas równań (np. równań Mathieu), to brakuje narzędzi analitycznych do lepszego opisu ich rozwiązań i tym samym do bardziej klarownej reprezentacji szukanych rozkładów. Całość sprawia, że uzyskane reprezentacje rozkładów w przypadku trafiania w dwie półproste są dużo bardziej skomplikowane i w pewnym sensie mniej jawne. Mimo wszystko, w przypadku  $\lambda = 0$  otrzymane formuły pozwalają na wyprowadzenie wzoru na jądro Poissona odcinka symetrycznego procesu  $\alpha$ -stabilnego (Corollary 4.7), który pierwotnie wyprowadzony został przez M. Riesz przy pomocy przekształcenia Kelvina.

**Przypadek wielowymiarowy.** Rozpatrywamy przez nas wielowymiarowymi odpowiednikami zbiorów  $C_1$  oraz  $D_1$  są

$$\begin{aligned} D_n &= \{y \in \mathbf{R}^{n+1} : y_1 = 0, y_2 > 0\}^c, \\ C_n &= \{y \in \mathbf{R}^{n+1} : y_1 = 0, |y_2| > 1\}^c. \end{aligned}$$

Pierwszy z nich jest dopełnieniem  $n$ -wymiarowej półprzestrzeni w  $\mathbf{R}^{n+1}$ , zaś drugi stanowi dopełnienie  $n$ -wymiarowego pasa. Pierwsze czasy wyjścia dyfuzji Bessela-Browna  $\mathbf{Y} = (R_t^{-\alpha/2}, B^n(t))$  z powyższych zbiorów oznaczamy przez  $\tau_{D_n}$  i  $\tau_{C_n}$  odpowiednio i są to jednocześnie pierwsze momenty trafienia w półprzestrzeń i pas kowymiaru 1. Rozpocniemy od przypadku półprzestrzeni przy dodatkowym założeniu, że dyfuzja startuje z punktu  $y \in \mathbf{R}^{n+1}$  takiego, że  $y_1 = 0$ . Przypomnijmy, że jest to przypadek kluczowy z punktu widzenia zastosowań do wyznaczania miar harmonicznych relatywistycznego procesu  $\alpha$ -stabilnego i teorii potencjałów Bessela.

**Twierdzenie 5** (Theorem 5.1 w [H1]). *Dla  $y = (0, y_2, \dots, y_{n+1})$  takiego, że  $y_2 < 0$  zachodzi*

$$\mathbf{E}^y[\tau_{D_n} \in dt, \mathbf{Y}(\tau_{D_n}) \in d\tilde{\sigma}] = \frac{\sin(\pi\alpha/2)}{2^{n/2}\pi^{1+n/2}} \left(\frac{-y_2}{\sigma_2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{t^{1+n/2}} \exp\left(-\frac{|\tilde{\sigma} - y|^2}{2t}\right), \quad (14)$$

gdzie  $t > 0$  oraz  $\tilde{\sigma} = (\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma_2 > 0$ .

Dowód powyższej reprezentacji polega na wyznaczeniu rozkładu  $(\tau_{D_1}, B(\tau_{D_1}))$  poprzez odwrócenie transformaty Laplace'a z wykorzystaniem wzoru (9). Kluczowa okazuje się tutaj bardzo prosta postać wzoru (9) (w porównaniu do przypadku  $y_1 > 0$ ), która pozwala w efektywny sposób wyznaczyć transformatę odwrotną. Produktowy charakter zbioru  $D_n$  sprawia, że czas pierwszego wyjścia zależy tylko od pierwszych dwóch współrzędnych i *de facto* pokrywa się z  $\tau_{D_1}$ . Pozwala to wyznaczyć rozkład  $(\tau_{D_n}, B(\tau_{D_n}))$  w oparciu o przypadek dwuwymiarowy.

Skomplikowany charakter wzoru (9) w ogólnym przypadku sprawia, że wyznaczenie transformaty odwrotnej i otrzymanie zwięzłego wzoru na rozkład  $(\tau_{D_1}, B(\tau_{D_1}))$  w przypadku  $y_1 > 0$  jest bardzo trudne. Dlatego ograniczamy się w tym przypadku do wyznaczenia transformaty Laplace'a czasu i rozkładu miejsca trafienia, czyli uogólnienia Twierdzenia 3 na przypadek dowolnego wymiaru. Dowód bazuje na mocnej własności Markowa, wykorzystaniu wzoru na gęstość rozkładu pierwszego czasu trafienia procesu Bessela w zero (4) i oczywiście na wyniku dwuwymiarowym.

**Twierdzenie 6** (Theorem 5.2 w [H1]). Dla  $y \in \mathbf{R}^{n+1}$  takiego, że  $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in D_n$  zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^y [e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_{D_n}}; Y(\tau_{D_n}) \in d\tilde{\sigma}] &= \frac{2y_1^\alpha \lambda^{\frac{n+\alpha}{2}}}{(2\pi)^{n/2} 2^{\alpha/2} \Gamma(\alpha/2)} \frac{K_{\frac{n+\alpha}{2}}(\lambda|y - \tilde{\sigma}|)}{|y - \tilde{\sigma}|^{\frac{n+\alpha}{2}}} + \\ &+ c_{n,\alpha} y_1^\alpha \lambda^{n+\frac{\alpha}{2}} \int_{(-\infty, 0) \times \mathbf{R}^{n-1}} \left( \frac{-z_2}{\tilde{\sigma}_2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{K_{\frac{n+\alpha}{2}}(\lambda|y - \tilde{z}|)}{|y - \tilde{z}|^{\frac{n+\alpha}{2}}} \frac{K_{\frac{n}{2}}(\lambda|\tilde{\sigma} - \tilde{z}|)}{|\tilde{\sigma} - \tilde{z}|^{\frac{n}{2}}} d\tilde{z}, \end{aligned}$$

gdzie  $c_{n,\alpha} = \frac{4\sin(\pi\alpha/2)}{2^{n+\alpha/2}\pi^{n+1}\Gamma(\alpha/2)}$  oraz  $\tilde{\sigma} = (\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma_2 > 0$ .

Dla  $y_1 = 0$  w szczególności dostajemy

$$\mathbf{E}^y [e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_{D_n}}; Y(\tau_{D_n}) \in d\tilde{\sigma}] = \frac{2\sin(\pi\alpha/2)\lambda^{n/2}}{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n+2}{2}}} \left( \frac{-y_2}{\sigma_2} \right)^{\alpha/2} \frac{K_{n/2}(\lambda|y - \tilde{\sigma}|)}{|y - \tilde{\sigma}|^{n/2}}. \quad (15)$$

Bezpośrednim wnioskiem z powyższych twierdzeń jest następujący wzór na  $m$ -miarę harmoniczną procesu relatywistycznego z parametrem  $m$ , który został uprzednio wyprowadzony w pracy [D1] przy użyciu innych, opisanych powyżej, metod.

**WNIOSEK 7** (Corollary 5.3 w [H1]). Niech  $\tilde{D}_n \subset \mathbf{R}^n$  będzie półprzestrzenią  $\{\tilde{x} \in \mathbf{R}^n; x_1 < 0\} \subset \mathbf{R}^n$ . Wtedy  $m$ -jądro Poissona zbioru  $\tilde{D}_n$  dla relatywistycznego procesu  $\alpha$ -stabilnego z parametrem  $m > 0$  zadane jest wzorem

$$P_{\tilde{D}_n}^m(\tilde{y}, \tilde{\sigma}) = \frac{2\sin(\pi\alpha/2)m^{\frac{n}{2\alpha}}}{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n+2}{2}}} \left( \frac{-y_1}{\sigma_1} \right)^{\alpha/2} \frac{K_{n/2}(m^{\frac{1}{\alpha}}|\tilde{y} - \tilde{\sigma}|)}{|\tilde{y} - \tilde{\sigma}|^{n/2}},$$

gdzie  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \tilde{D}_n$  i  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \tilde{D}_n^c$ . Dla  $m = 0$  otrzymujemy jądro Poissona  $\tilde{D}_n$  dla izotropowego procesu  $\alpha$ -stabilnego

$$P_{\tilde{D}_n}(\tilde{y}, \tilde{\sigma}) = \frac{\sin(\pi\alpha/2)\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n+2}{2}}} \left( \frac{-y_1}{\sigma_1} \right)^{\alpha/2} \frac{1}{|\tilde{y} - \tilde{\sigma}|^n}.$$

Ze względu na bardzo skomplikowany charakter opisu badanych rozkładów z Twierdzenia 4 wprowadzmy następujące oznaczenie

$$H(z_1, z_2, \lambda, r) = \mathbf{E}^{(z_1, z_2)} \left[ e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_{C_1}}; B_2(\tau_{C_1}) \in dr \right], \quad |r| > 1,$$

gdzie  $(z_1, z_2) \in C_1$ . Dodatkowo, niech

$$h(\lambda, y, \tilde{\sigma}) = \mathbf{E}^y [e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_{C_n}}; B^n(\tau_{C_n}) \in d\tilde{\sigma}], \quad \tilde{\sigma} = (\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}) \in \mathbf{R}^n, |\sigma_2| > 1.$$

Ponieważ odtransformowanie wzoru na  $H(z_1, z_2, \lambda, r)$  podanego w Twierdzeniu 4 wydaje się być poza zasięgiem, charakteryzujemy transformatę Laplace'a czasu i rozkład miejsca trafienia w pas kowymiaru jeden (czyli funkcję  $h$  zdefiniowaną powyżej) po przez wyznaczenie jej transformaty Fouriera.

**Twierdzenie 8** (Theorem 5.4 w [H1]). Niech  $n \geq 2$ . Dla  $y = (0, y_2, \dots, y_{n+1})$  takiego, że  $|y_2| < 1$  i  $\tilde{z} \in \mathbf{R}^{n-1}$  zachodzi

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} h(\lambda, y, \tilde{\sigma}) e^{i(\tilde{\sigma}, \tilde{z})} d\tilde{\sigma} = H(0, y_2, \sqrt{|\tilde{y} - \tilde{z}|^2 + \lambda^2}, \sigma_2). \quad (16)$$

Tutaj  $\tilde{\sigma} = (\sigma_2, \bar{\sigma})$ .

Natychmiastowym wnioskiem z powyższego Twierdzenia jest następujący wynik.

**WNIOSEK 9** (Corollary 5.5 w [H1]). *Załóżmy, że  $n \geq 2$ . Niech  $\tilde{C}_n \subset \mathbf{R}^n$  będzie pasem  $\{\tilde{x} \in \mathbf{R}^n; |x_1| < 1\} \subset \mathbf{R}^n$ . Wtedy  $(n-1)$ -wymiarowa transformata Fouriera  $m$ -jądra Poissona zbioru  $\tilde{C}_n$  dla relatywistycznego procesu  $\alpha$ -stabilnego z parametrem  $m \geq 0$  zadana jest przez*

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} P_{\tilde{C}_n}^m(\tilde{y}; \tilde{\sigma}) e^{i(\tilde{\sigma}, \tilde{z})} d\tilde{\sigma} = H(0, y_1, \sqrt{|\tilde{y} - \tilde{z}|^2 + m^2/\alpha}, \sigma_1),$$

gdzie  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \tilde{C}_n$  i  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \tilde{\sigma}) \in \tilde{C}_n^c$ .

W przypadku odcinka (pasa) natura problemu okazała się bardzo skomplikowana. Pomimo tego udało się uzyskać zamknięty opis postaci szukanych rozkładów i w efekcie odpowiadających im miar harmonicznych dla procesu relatywistycznego. Jednocześnie otrzymane wyniki pokazują, że bez wypracowania efektywnych metod wyznaczania tego typu rozkładów nie ma możliwości "żgadnięcia" ich postaci, jak to miało miejsce w przypadku półprostej (półprzestrzeni) w pracy [D1].

**Trafianie w zbiory kowymiaru 2 i dalsze zastosowania.** W ostatniej części pracy [H1] prezentujemy zastosowania otrzymanych rezultatów do wyznaczenia rozkładów czasu i miejsca trafienia w przypadku trafiania  $(n+1)$ -wymiarowej dyfuzji w zbiory  $(n-1)$ -wymiarowe. Niech  $\mathbf{Y} = (Y_1, B_1, B_2, \dots, B_n)$  będzie zatem dyfuzją Bessela-Browna, gdzie  $Y_1$  jest procesem Bessela z indeksem  $-\alpha/2$ , dla  $\alpha \in (1, 2)$ . Rozważmy dopełnienie w  $\mathbf{R}^{n+1}$  półprzestrzeni wymiaru  $(n-1)$

$$H_n = \{y \in \mathbf{R}^{n+1} : y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 > 0\}^c$$

i oznaczmy przez  $\tau_{H_n}$  pierwszy moment wyjścia  $\mathbf{Y}$  z  $H_n$ , czyli pierwszy moment uderzenia w półprzestrzeń kowymiaru 2. Zauważmy, że proces  $Z = \sqrt{Y_1^2 + B_1^2}$  jest procesem Bessela z indeksem  $(1-\alpha)/2$ , co wynika z własności addytywności kwadratowych procesów Bessela. W związku z tym proces  $\mathbf{W} = (Z, B_3, \dots, B_n)$  jest  $n$ -wymiarową dyfuzją Bessela-Browna. Definiując

$$\tilde{H}_n = \{\tilde{y} \in \mathbf{R}^n : y_1 = 0, y_2 > 0\}$$

możemy nasze zagadnienie przetłumaczyć na trafianie procesu  $\mathbf{W}$  w zbiór  $\tilde{H}_n$ , ponieważ dyfuzja  $\mathbf{Y}$  wychodzi z  $H_n$  wtedy, gdy  $\mathbf{W}$  opuszcza  $\tilde{H}_n$ . Tym samym korzystając z opisanych uprzednio wyników z  $n$  zamienionym na  $n-1$  oraz  $\alpha$  na  $\alpha-1$  otrzymujemy

**Twierdzenie 10** (Theorem 5.6 w [H1]). *Dla  $y \in \mathbf{R}^{n+1}$  takiego, że  $y_1^2 + y_2^2 > 0$  i  $1 < \alpha < 2$  zachodzi*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^y[e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_{H_n}}; \mathbf{Y}(\tau_{H_n}) \in d\tilde{\sigma}] &= \frac{2(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \lambda^{\frac{n-2+\alpha}{2}} K_{\frac{n-2+\alpha}{2}}(\lambda|y - \tilde{\sigma}|)}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{\alpha-1}{2}} \Gamma(\frac{\alpha-1}{2}) |y - \tilde{\sigma}|^{\frac{n-2+\alpha}{2}}} + \\ &+ G_{y_1^2+y_2^2} \int_{(-\infty, 0) \times \mathbf{R}^{n-2}} \left( \frac{-z_3}{\sigma_3} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{K_{\frac{n-2+\alpha}{2}}(\lambda|y - \tilde{z}|) K_{\frac{n-1}{2}}(\lambda|\tilde{\sigma} - \tilde{z}|)}{|y - \tilde{z}|^{\frac{n-2+\alpha}{2}} |\tilde{\sigma} - \tilde{z}|^{\frac{n-1}{2}}} d\tilde{z}, \end{aligned}$$

gdzie

$$G_{y_1^2+y_2^2} = \frac{4 \sin(\pi \frac{\alpha-1}{2}) (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \lambda^{\frac{2n-3+\alpha}{2}}}{2^{\frac{2n-3+\alpha}{2}} \pi^n \Gamma(\frac{\alpha-1}{2})}$$

i  $\tilde{\sigma} = (\sigma_3, \dots, \sigma_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ ,  $\sigma_3 > 0$ . Dla  $y_1 = y_2 = 0$  otrzymujemy

$$\mathbf{E}^y[e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_{H_n}}; \mathbf{Y}(\tau_{H_n}) \in d\tilde{\sigma}] = \frac{2 \sin(\pi \frac{\alpha-1}{2}) \lambda^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}}} \left( \frac{-y_3}{\sigma_3} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{K_{\frac{n-1}{2}}(\lambda|y - \tilde{\sigma}|)}{|y - \tilde{\sigma}|^{(n-1)/2}}.$$

W przypadku  $n = 2$  pierwsza z formuł upraszcza się do

$$\mathbf{E}^{(z_1, z_2, z_3)} \left[ e^{-\frac{\lambda^2}{2} \tau_{H_2}}; B_3(\tau_{H_2}) \in dr \right] = \frac{(|z| + z_3)^{\frac{\alpha-1}{4}} (|z| - z_3)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2^{\frac{3(\alpha-1)}{4}} \Gamma(\frac{\alpha-1}{2}) r^{(\alpha-1)/4}} \times \\ \times \int_{\lambda}^{\infty} e^{-(|z|+r)s} (s^2 - \lambda^2)^{\frac{\alpha-1}{4}} I_{1-\frac{\alpha}{2}} \left( \sqrt{2r} \sqrt{|z| + z_3} \sqrt{s^2 - \lambda^2} \right) ds, \quad (17)$$

gdzie  $|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$  oraz  $z_1^2 + z_2^2 > 0$ .

Znając rozkłady czasu i miejsca trafienia dla dyfuzji Bessela-Browna możemy otrzymać odpowiednie wyniki dla miar harmonicznych dla procesu relatywistycznego.

**WNIOSEK 11** (Corollary 5.7 w [H1]). Niech  $\tilde{H}_2 \subset \mathbf{R}^2$  będzie dopełnieniem półprostej  $\{\tilde{x} \in \mathbf{R}^2; x_1 = 0, x_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$ . Wtedy  $m$ -jądro Poissona zbioru  $\tilde{H}_2$  dla  $\alpha$ -stabilnego procesu relatywistycznego z parametrem  $m > 0$  i  $1 < \alpha < 2$  zadane jest przez

$$P_{\tilde{H}_2}^m(\tilde{y}, r) = \frac{(|\tilde{y}| + y_2)^{\frac{\alpha-1}{4}} (|\tilde{y}| - y_2)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2^{\frac{3(\alpha-1)}{4}} \Gamma(\frac{\alpha-1}{2}) r^{(\alpha-1)/4}} \times \\ \times \int_{m^{\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} e^{-(|\tilde{y}|+r)s} (s^2 - m^{2/\alpha})^{\frac{\alpha-1}{4}} I_{1-\frac{\alpha}{2}} \left( \sqrt{2r} \sqrt{|\tilde{y}| + y_2} \sqrt{s^2 - m^{2/\alpha}} \right) ds,$$

gdzie  $r > 0$  i  $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{H}_2$ ,  $y_1 \neq 0$ . Jeśli  $y_1 = 0$  i  $y_2 < 0$  to

$$P_{\tilde{H}_2}^m(\tilde{y}, r) = \frac{\sin(\pi(\alpha - 1)/2)}{\pi} \left( \frac{-y_2}{r} \right)^{(\alpha-1)/2} \frac{e^{-m^{1/\alpha}(r-u)}}{r-u}.$$

Dla  $m = 0$  otrzymujemy postać jądra Poissona  $\tilde{H}_2$  dla izotropowego procesu  $\alpha$ -stabilnego

$$P_{\tilde{H}_2}(\tilde{y}, r) = \frac{(|\tilde{y}| + y_2)^{\frac{\alpha-1}{4}} (|\tilde{y}| - y_2)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2^{\frac{3(\alpha-1)}{4}} \Gamma(\frac{\alpha-1}{2}) r^{(\alpha-1)/4}} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-(|\tilde{y}|+r)s} s^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{1-\frac{\alpha}{2}} \left( s \sqrt{2r} \sqrt{|\tilde{y}| + y_2} \right) ds, \quad (18)$$

gdzie  $r > 0$  i  $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{H}_2$ ,  $y_1 \neq 0$ . W przypadku  $y_1 = 0$  i  $y_2 < 0$  otrzymujemy

$$P_{\tilde{H}_2}((0, y_2), r) = \frac{\sin(\pi(\alpha - 1)/2)}{\pi} \left( \frac{-y_2}{r} \right)^{(\alpha-1)/2} \frac{1}{r-u}.$$

W przypadku wielowymiarowym mamy natomiast

**WNIOSEK 12** (Corollary 5.8 w [H1]). Niech  $\tilde{H}_n \subset \mathbf{R}^n$  będzie dopełnieniem  $(n-1)$ -wymiarowej półprzeźreni  $\{\tilde{x} \in \mathbf{R}^n; x_1 = 0, x_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^n$ . Wtedy  $m$ -jądro Poissona zbioru  $\tilde{H}_n$  dla  $\alpha$ -stabilnego procesu relatywistycznego z parametrem  $m > 0$  i  $1 < \alpha < 2$  zadane jest przez

$$P_{\tilde{H}_n}^m(\tilde{y}, \bar{\sigma}) = \frac{2 \sin(\pi(\alpha - 1)/2) m^{\frac{n}{2\alpha}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}}} \left( \frac{-y_2}{\sigma_2} \right)^{(\alpha-1)/2} \frac{K_{(n-1)/2}(m^{\frac{1}{\alpha}} |\tilde{y} - \bar{\sigma}|)}{|\tilde{y} - \bar{\sigma}|^{(n-1)/2}},$$

gdzie  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ;  $y_1 = 0, y_2 < 0$  i  $\bar{\sigma} = (\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ;  $\sigma_2 > 0$ .

Dla  $m = 0$  otrzymujemy jądro Poissona  $\tilde{H}_n$  izotropowego procesu  $\alpha$ -stabilnego postaci

$$P_{\tilde{H}_n}(\tilde{y}, \bar{\sigma}) = \frac{\sin(\pi(\alpha - 1)/2) \Gamma(\frac{(n-1)}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left( \frac{-y_2}{\sigma_2} \right)^{(\alpha-1)/2} \frac{1}{|\tilde{y} - \bar{\sigma}|^{n-1}}.$$

Co ciekawe, powyższe formuły nie były znane nawet w najbardziej klasycznym przypadku izotropowego procesu stabilnego (dla  $m = 0$ ).

## Dokładne obustronne oszacowania gęstości czasu trafienia (praca [H2])

Kolejne naturalne pytanie w tym kontekście dotyczy trafiania procesów Bessela w zadany poziom  $a > 0$ . Okazuje się, że sytuacja jest w tym przypadku dużo bardziej skomplikowana i znacząco odbiega od przypadku  $a = 0$ . Na początku zaznaczmy, że rozważać będziemy przypadek startu procesu Bessela z punktu  $x > a$ , czyli wychodzenie procesu Bessela z półprostej  $(a, \infty)$  (przypadek  $x < a$  został zbadany w pracy [P13]). W związku z tym dopuszczamy pełen zakres indeksów  $\mu \in \mathbb{R}$ , ponieważ w oczywisty sposób  $T_a < T_0$  prawie na pewno względem  $\mathbf{P}_x^{(\mu)}$  i tym samym nie ogranicza nas problem definiowania zachowania naszej dyfuzji w zerze (dla każdego warunku brzegowego w 0 wynik jest ten sam). Z drugiej strony, własność absolutnej ciągłości (2) pozwala zredukować dowody twierdzeń do przypadku  $\mu \geq 0$  (lub  $\mu \leq 0$ ). Należy także pokreślić, że czasy pierwszego trafienia w zadany poziom wiążą się z funkcjonalami całkowymi od geometrycznego ruchu Browna. Stosując reprezentację Lampertiego (zob. [51]) można bowiem pokazać, że

$$T_a \stackrel{d}{=} A_x^{(\mu)}(\tau_a) := x^2 \int_0^{\tau_a} \exp(2\beta_s - 2\mu s) ds, \quad (19)$$

gdzie rozkład  $T_a$  rozważamy względem  $\mathbf{P}_x^{(\mu)}$ , zaś  $\beta_t$  jest procesem Wienera startującym z zera oraz  $\tau_a = \inf\{t > 0 : x \exp(\beta_t - \mu t) = a\}$ . Funkcjonał całkowity  $A_x^{(\mu)}(t)$  był przedmiotem wielu badań [1], [3], [4], [5], [25], [15], [16], [29], [33], [52], [53], [54], [69], [70] w związku z jego zastosowaniami m.in. w matematyce finansowej, teorii dyfuzji, czy też analizie ruchu Browna na przestrzeniach hiperbolicznych. Rozkłady czasów trafienia procesów Bessela był badane już w latach 70tych i 80tych poprzedniego stulecia [44], [30], [60]. Kent [44] wyznaczył postać transformaty Laplace'a  $T_a$ , która zadana jest wzorem

$$\mathbf{E}_x^{(\mu)} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T_a\right) = \left(\frac{a}{x}\right)^\mu \frac{K_\mu(x\lambda)}{K_\mu(a\lambda)}, \quad \lambda \geq 0.$$

Ilorazy różnego rodzaju zmodyfikowanych funkcji Bessela pojawiały się w literaturze w kontekście ich całkowitej monotoniczności, co czyniło je transformatami Laplace'a pewnych miar probabilistycznych [37], [38], [39]. Do tej tematyki powrócono na początku obecnego stulecia w związku z rozwojem teorii potencjału hiperbolicznego ruchu Browna [3], [4], [10] i potrzebą lepszego opisu i wyznaczenia asymptotycznych własności gęstości rozkładu  $\mathbf{P}_x^{(\mu)}(T_a \in dt)$ . Praca [H2] wpisuje się w ten nurt i poświęcona jest zbadaniu zachowania gęstości pierwszego czasu trafienia w zadany poziom  $a > 0$  przez proces Bessela o indeksie  $\mu \in \mathbb{R}$ . Oznaczmy przez  $q_{x,a}^{(\mu)}(t)$  gęstość względem miary Lebesgue'a pierwszego czasu trafienia  $T_a$  procesu Bessela o indeksie  $\mu$  w zadany poziom  $a > 0$ , tzn.

$$q_{x,a}^{(\mu)}(t) = \frac{\mathbf{P}_x^{(\mu)}(T_a \in dt)}{dt}.$$

W związku z własnościami skalowania procesów Bessela, mamy

$$q_{x,a}^{(\mu)}(t) = \frac{q_{x/a,1}^{(\mu)}(t/a^2)}{a^2}, \quad x > a > 0,$$

co pozwala zredukować nasze rozważania do przypadku  $a = 1$ . Wyznaczenie asymptotyk, czy też obustronnych oszacowań funkcji  $q_{x,a}^{(\mu)}(t)$  bezpośrednio z postaci transformaty Laplace'a wydaje się niewykonalne poza kilkoma szczególnymi zakresami zmiennych  $x$  i  $t$ . Dlatego kluczowymi z naszego punktu widzenia są wyniki pracy [11], gdzie wyprowadzono reprezentacje całkowite gęstości  $q_{x,1}^{(\mu)}(t)$  w języku zmodyfikowanych funkcji Bessela.



**Twierdzenie 1** (Byczkowski, Ryznar 2006). Dla  $\mu \geq 0$  istnieje funkcja  $w_\lambda$  taka, że

$$q_{x,1}^{(\mu)}(t) = \lambda \frac{e^{-\lambda^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \left( \frac{x^{\mu-1/2}}{t} + \int_0^\infty (e^{-\kappa/2t} - 1) w_\lambda(v) dv \right), \quad (20)$$

gdzie  $\kappa = \kappa(v) = (\lambda + v)^2 - \lambda^2 = v(2\lambda + v)$ , i  $\lambda = x - 1$ .

Funkcja  $w_\lambda$  występująca w tej reprezentacji jest sumą dwóch składowych

$$w_\lambda(v) = w_{1,\lambda}(v) + w_{2,\lambda}(v), \quad (21)$$

gdzie pierwsza z nich wyraża się przez (zespolone) zera  $\{z_1, \dots, z_{k_\mu}\}$ ,  $k_\mu \in \mathbf{N}$ , rozszerzenia analitycznego funkcji  $K_\nu(z)$

$$w_{1,\lambda}(v) = -\frac{x^\mu}{\lambda} \sum_{i=1}^{k_\mu} \frac{z_i e^{\lambda z_i} K_\mu(x z_i)}{K_{\mu-1}(z_i)} e^{z_i v}.$$

Drugi składnik ma następującą postać całkową

$$w_{2,\lambda}(v) = -\cos(\pi\mu) \frac{x^\mu}{\lambda} \int_0^\infty \frac{I_\mu(xu) K_\mu(u) - I_\mu(u) K_\mu(xu)}{\cos^2(\pi\mu) K_\mu^2(u) + (\pi I_\mu(u) + \sin(\pi\mu) K_\mu(u))^2} e^{-\lambda u} e^{-vu} u du. \quad (22)$$

Twierdzenie to dobrze obrazuje jak bardzo przypadek dowolnego  $a > 0$  różni się od rozważanego poprzednio zagadnienia uderzenia w zero. Poziom komplikacji powyższego wzoru mocno kontrastuje z bardzo prostym wzorem na gęstość  $q_{x,0}^{(\mu)}(t)$  podanym w (4). Z drugiej strony naturalnie wymusza ono pytanie o bardziej przystępny opis badanej gęstości po przez podanie oszacowań lub wyznaczenie asymptotyk. W pracy [11] podano kilka wyników opisujących zachowanie asymptotyczne  $q_{x,a}^{(\mu)}(t)$ . Pogłębiona analiza zachowania asymptotycznego  $q_{x,a}^{(\mu)}(t)$  oraz dystrybuanty rozkładu  $T_a$  została przeprowadzona w późniejszych pracach (wyniki pracy [36] zostały upublicznione na stronie arXiv.org 9 miesięcy później niż te z pracy [H2]) Y. Hamana i H. Matsumoto [34], [35], [36]. Celem omawianej pracy było uzupełnienie opisu rozkładu  $\mathbf{P}_x^{(\mu)}(T_a \in dt)$  po przez podanie dokładnych obustronnych oszacowań jego gęstości w pełnym zakresie parametrów  $x$  i  $t$ , zaś jej głównym wynikiem jest poniższe twierdzenie. Zapis  $f(t, x) \stackrel{\mu}{\approx} g(t, x)$  oznacza tutaj, że istnieją stałe  $c_1(\mu)$ ,  $c_2(\mu)$  (zależne tylko od  $\mu$ ) takie, że  $c_1(\mu)g(t, x) \leq f(t, x) \leq c_2(\mu)g(t, x)$  dla wszystkich rozważanych  $x$  i  $t$ .

**Twierdzenie 2** (Theorem 2 w [H2]). Dla każdego  $\mu \neq 0$  zachodzi

$$q_{x,1}^{(\mu)}(t) \stackrel{\mu}{\approx} (x-1) \left( \frac{1}{1+x^{2\mu}} \right) \frac{e^{-(x-1)^2/2t}}{t^{3/2}} \frac{x^{2|\mu|-1}}{(t+x)^{|\mu|-1/2}} \quad (23)$$

dla wszystkich  $x > 1$  i  $t > 0$ . Dodatkowo

$$q_{x,1}^{(0)}(t) \approx (x-1) \frac{e^{-(x-1)^2/2t}}{t^{3/2}} \frac{\sqrt{x+t}}{x} \frac{1 + \ln x}{(1 + \ln(1+t/x))(1 + \ln(t+x))},$$

dla każdego  $x > 1$  i  $t > 0$ .

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w sformułowaniu (nie dowodzie) powyższego twierdzenia w opublikowanej wersji artykułu znalazł się błąd polegający na tym, że zamiast  $(t+x)^{|\mu|-1/2}$  w mianowniku oszacowania dla  $\mu \neq 0$  znalazło się wyrażenie  $t^{|\mu|-1/2} + x^{|\mu|-1/2}$ . Dla  $|\mu| \geq 1/2$  oba wyrażenia są porównywalne, jednak w przypadku  $|\mu| < 1/2$  sformułowanie z [H2] jest błędne. Błąd ten został także zauważony i skorygowany w pracy [H3].

Natychmiastową konsekwencją powyższego wyniku są odpowiadające mu oszacowania gęstości pierwszego czasu trafienia  $n$ -wymiarowego procesu Wienera w sferę jednostkową.

**Twierdzenie 3** (Theorem 3 w [H2]). *Niech  $\sigma^{(n)}$  będzie pierwszym czasem uderzenia w sferę jednostkową przez  $n$ -wymiarowy ruch Browna  $W^{(n)} = \{W_t^{(n)}, t \geq 0\}$ , tzn.*

$$\sigma^{(n)} = \inf\{t > 0; |W_t^{(n)}| = 1\}.$$

Wtedy, dla  $W_0^{(n)} = x \in \mathbf{R}^n$  takiego, że  $|x| > 1$  mamy

$$\frac{P^x(\sigma^{(n)} \in dt)}{dt} \approx \frac{|x| - 1}{|x|} \frac{e^{-(|x|-1)^2/2t}}{t^{3/2}} \frac{1}{t^{(n-3)/2} + |x|^{(n-3)/2}}, \quad n > 2,$$

dla każdego  $t > 0$ . Co więcej, zachodzi

$$\frac{P^x(\sigma^{(2)} \in dt)}{dt} \approx \frac{|x| - 1}{|x|} \frac{e^{-(|x|-1)^2/2t} (|x| + t)^{1/2}}{t^{3/2}} \frac{1 + \log|x|}{(1 + \log(1 + \frac{t}{|x|}))(1 + \log(t + |x|))}$$

Analogicznie jak poprzednio, własności skalowania pozwalają uzyskać wyniki dla sfer o dowolnym promieniu. Z jednej strony należy pokreślić, że bardzo skomplikowaną w sensie analitycznym funkcję  $q_{x,1}^{(\mu)}(t)$  udało się opisać przy pomocy bardzo prostych funkcji elementarnych w pełnym zakresie parametrów przestrzennych  $x$  i czasowych  $t$  ze stałymi zależnymi tylko i wyłącznie od indeksu rozważanego procesu. Z drugiej strony sporą rzadkością w teorii dyfuzji jest uzyskanie obustronnych oszacowań, które precyzyjnie opisują zachowanie eksponencjalne rozważanego obiektu. Okazuje się, że nawet w przypadku ruchu Browna wyniki tego typu są pewnego rodzaju nowością. Dostępne zazwyczaj oszacowania czasów trafienia są bowiem tylko jakościowo dokładne, co oznacza, że w czynnikach eksponencjalnych występujących w dolnych i górnych oszacowaniach pojawiają się różne stałe. Tego typu wyniki można znaleźć na przykład w pracy [32], gdzie w oszacowaniach występują czynniki postaci  $\exp(-c_i|x|^2/t)$  z różnymi stałymi  $c_1$  i  $c_2$  w dolnym i górnym oszacowaniu. Czynniki to takie oszacowania dokładnymi tylko w przypadku, gdy  $|x|^2 < t$ . Twierdzenie 2 można traktować jako uzupełnienie [32], w którym usuwamy ten defekt i uogólniamy wynik na procesy Bessela dowolnego wymiaru (indeksu). Na mocy (19) oszacowania przenoszą się także na zatrzymane funkcjonały całkowe od geometrycznego ruchu Browna.

Należy także podkreślić odmienny charakter oszacowań w przypadku  $\mu = 0$ . Pojawienie się zachowania logarytmicznego nie jest dużym zaskoczeniem, jeżeli pamiętamy, że proces Bessela z indeksem 0 odpowiada normie dwuwymiarowego ruchu Browna. Proces Wienera na płaszczyźnie jest bowiem bardzo specyficzny, chociażby ze względu na jego rekurencyjność. Można w tym kontekście przywołać także postać potencjałów ruchu Browna, które w przypadku  $\mathbf{R}^2$  wyrażają się przez logarytmy (potencjały kompensowane), zaś w przypadku wyższych wymiarów są funkcjami potęgowymi. Czysto technicznym powodem pojawienia się logarytmów w przypadku  $\mu = 0$  jest fakt, że zmodyfikowana funkcja Bessela  $K_0(z)$  występująca w reprezentacji całkowej gęstości  $q_{x,1}^{(0)}(t)$  zachowuje się w zerze jak  $-\ln z$ , zaś dla  $\mu \neq 0$  mamy  $K_\mu(z) \sim z^{-\mu}$ , gdy  $z \rightarrow 0^+$ . Zaznaczmy jednak, że czynnik logarytmiczny w (23) ma znaczenie tylko wtedy, gdy  $t$  jest duże w stosunku do  $x$ . W przeciwnym wypadku jest on porównywalny ze stałą i oszacowania dla  $\mu$  równego i różnego od zera są tego samego typu.

Dodajmy także, że w pewnych przypadkach otrzymujemy wyniki dokładniejsze, niż to wynika ze sformułowania Twierdzenia 2. Poniższy lemat z jednej strony daje odpowiednie oszacowania w przypadku, gdy  $t$  jest relatywnie małe w stosunku do  $x$ . Z drugiej strony wynik jest mocniejszy, ponieważ dostarcza postaci kolejnego członu w rozwinięciu asymptotycznym w przypadku  $t/x \rightarrow 0$ .

**Lemat 4** (Lemma 4 w [H2]). Dla  $\mu \geq 0$  zachodzi

$$q_{x,1}^{(-\mu)}(t) = \lambda \frac{e^{-\lambda^2/4t}}{(2\pi)^{1/2} t^{3/2}} x^{\mu-1/2} \left( 1 + \frac{1-4\mu^2 t}{8} \frac{t}{x} + E(t, x) \right),$$

gdzie

$$|E(t, x)| \leq C \frac{t}{x} (\sqrt{t} \wedge \frac{t}{\lambda}).$$

Dodatkowo, dla  $0 \leq \mu < 1/2$  mamy

$$\lambda \frac{e^{-\lambda^2/2t}}{(2\pi)^{1/2} t^{3/2}} x^{\mu-1/2} \leq q_{x,1}^{(-\mu)}(t) \leq \lambda \frac{e^{-\lambda^2/4t}}{(2\pi)^{1/2} t^{3/2}} x^{\mu-1/2} \left( 1 + \frac{1-4\mu^2 t}{8} \frac{t}{x} \right)$$

dla każdego  $x > 1, t > 0$ .

**Techniki dowodowe.** Dowód Twierdzenia 2 w dużej mierze polega na delikatnych i niejednokrotnie pracochłonnych szacowaniach z wykorzystaniem przytoczonej reprezentacji całkowej z [11], co czyni pracę dość techniczną. Z całą mocą należy podkreślić, że główną wartością omawianej pracy jest przejrzysty, prosty w sformułowaniu i bardzo dokładny wynik, za którym stoi pracochłonny, techniczny i żmudny dowód. Dlatego też omówimy główne kroki dowodowe bez zbędnego wchodzenia w szczegóły i skomplikowane rachunki. W związku z własnością absolutnej ciągłości, która implikuje

$$q_{x,1}^{(-\mu)}(t) = x^{2\mu} q_{x,1}^{(\mu)}(t), \quad t > 0, x > 1, \quad (24)$$

będziemy rozważać tylko przypadek niedodatnich indeksów  $-\mu$  dla  $\mu \geq 0$ . Dodatkowo w sformułowaniu lematów będziemy używać oznaczeń  $\kappa = \kappa(v) = (\lambda + v)^2 - \lambda^2 = v(2\lambda + v)$  i  $\lambda = x - 1$  wprowadzonych już uprzednio przy okazji reprezentacji (20). W pracy [H2] opuściliśmy indeks 1 w notacji rozważanej gęstości pisząc  $q_x^{(\mu)}(t)$  zamiast  $q_{x,1}^{(-\mu)}(t)$ , jednak dla spójności notacji autoreferatu pozostaniemy przy pełniejszej notacji. Pierwszym etapem dowodu jest wyprowadzenie formuły zawartej w Lemacie 4. Wykorzystując reprezentację całkową (20) wraz z tożsamością

$$\int_0^\infty w_\lambda(v) dv = \frac{x^{\mu-1/2}}{2x} (\mu^2 - 1/4),$$

która została wyprowadzona w [11], pokazujemy, że

$$E(x, t) = \frac{t}{x^{\mu-1/2}} \int_0^\infty e^{-\kappa/2t} w_\lambda(v) dv.$$

Oszacowanie funkcji  $w_\lambda(v)$  w rozważanym zakresie parametrów prowadzi do wyznaczenia oszacowań górnych dla  $E(x, t)$ . Dodatkowe własności dla  $0 < \mu \leq 1/2$  wynikają z następujących prostych oszacowań

$$0 \leq \int_0^\infty (e^{-\kappa/2t} - 1) w_\lambda(v) dv \leq - \int_0^\infty w_\lambda(v) dv = x^{\mu-1/2} (1/4 - \mu^2) / 2x.$$

Kolejnym krokiem jest rozszerzenie powyższego wyniku na przypadek  $x/t > C$  dla dowolnie zadanej stałej  $C > 0$ . Zaznaczmy, że Lemat 4 pozwala otrzymać żądane oszacowania dla dostatecznie dużej stałej  $C$ , co oznacza konieczność udowodnienia oszacowań w przypadku  $C < x/t < C'$  dla arbitralnie wybranych  $C$  i  $C'$ .

**Lemat 5** (Lemma 6 w [H2]). *Dla dowolnego  $C > 0$  istnieje stała  $c_1 > 0$  zależna od  $C$  i  $\mu > 0$  taka, że*

$$\frac{1}{c_1} \lambda \frac{e^{-\lambda^2/2t}}{t^{3/2}} x^{\mu-1/2} \leq q_{x,1}^{(-\mu)}(t) \leq c_1 \lambda \frac{e^{-\lambda^2/2t}}{t^{3/2}} x^{\mu-1/2},$$

*gdy tylko  $x > Ct$ ,  $x > 1$ .*

Niestety, w opublikowane sformułowanie powyższego lematu wkradł się błąd i zamiast poprawnej nierówności  $x > Ct$  znalazła się tam nierówność przeciwna  $x < Ct$ , zaś w dowodzie odwrócona została rola stałych  $C$  i  $C'$ . W każdym razie dowód kluczowego przypadku  $C < x/t < C'$  dla dowolnych stałych  $C$  i  $C'$  jest w pełni poprawny i polega w pierwszej kolejności na pokazaniu, że iloraz gęstości  $q_{x,1}^{(\mu)}(t)$  i wyrażenia po prawej stronie oszacowania (23) posiada granicę, gdy  $x/t$  zbiega do pewnej stałej  $c > 0$  i jednocześnie  $x \rightarrow \infty$  (Proposition 5 w [H2]). Wykorzystujemy tutaj jawną postać funkcji  $w_\lambda(v)$ . Następnie przy pomocy metody pokryciowej oraz własności absolutnej ciągłości (2) pokazujemy oszacowania w rozważanym przypadku. Wynik dla  $x/t > C'$  dla dostatecznie dużej stałej  $C'$  (a nie dla dostatecznie małej, jak napisano w [H2]) wynika bezpośrednio z Lematu 4. Podkreślimy, że otrzymanie oszacowań w przypadkach pośrednich ( $x/t$  nie zbiega ani do zera ani do nieskończoności) jest zazwyczaj bardzo trudne, co zwiększa rangę powyższego lematu w kontekście dowodu Twierdzenia 2.

Kolejne dwa lematy dotyczą sytuacji, gdy  $t$  jest relatywnie duże w porównaniu do  $x$  i jak zaznaczyliśmy na wstępie mamy w tym przypadku rozróżnienie na  $\mu \neq 0$  i  $\mu = 0$ . Ta część pracy jest najbardziej techniczna i w dużej mierze opiera się na ostrożnym szacowaniu całek. Rozważania rozpoczynamy od szczególnego przypadku  $\mu - 1/2 \in \mathbf{N}$ . Zmodyfikowane funkcje Bessela  $K_{l+1/2}(z)$ ,  $l \in \mathbf{N}$ , redukują się wtedy do funkcji elementarnych i tym samym upraszcza się postać funkcji  $w_\lambda(v)$ , ponieważ  $w_{2,\lambda}(v) \equiv 0$  ze względu na czynnik  $\cos(\pi\mu) = 0$  występujący w (22). Pozwala to uzyskać następujący wynik

**Lemat 6** (Lemma 7 w [H2]). *Załóżmy, że  $\mu - 1/2 \in \mathbf{N}$ . Mamy*

$$q_{x,1}^{(-\mu)}(t) = \frac{(x^{2\mu} - 1)}{\Gamma(\mu)2^\mu} e^{-\lambda^2/2t} \frac{1}{t^{\mu+1}} (1 + E(x, t)).$$

*Dodatkowo, istnieje stała  $c > 0$  taka, że dla  $t > 0$ ,*

$$|E(x, t)| \leq c \frac{x}{t}.$$

Dowód bazuje na reprezentacji całkowej (24) z pracy [11], która jest pewną modyfikacją wzoru (20). Co do zasady polega on na uważnej analizie dowodu zachowania asymptotycznego  $q_{x,1}^\mu(t)$  przy  $t \rightarrow \infty$  i ustalonym  $x > 0$ , który został przeprowadzony w [11]. W naszym przypadku istotna jest zależność stałych występujących w granicy od zmiennej  $x$  i na wyznaczeniu tej zależności skupia się druga część dowodu powyższego lematu. Korzystamy tutaj z mocnej własności Markowa oraz znanych wyników dla czasu trafienia w zero. W przypadku  $\mu - 1/2 \notin \mathbf{N}$  rozbijamy funkcję  $q_{x,1}^{(\mu)}(t)$  na część odpowiadającą  $w_{1,\lambda}(v)$ , dla której dowód wygląda identycznie jak w przypadku Lematu 6 oraz część wyznaczoną przez  $w_{2,\lambda}(v)$ . W przypadku tej ostatniej bazujemy na oszacowaniach funkcji podcałkowej występującej we wzorze (22) i szacujemy otrzymane w ten sposób całki, co prowadzi do

**Lemat 7** (Lemma 8 w [H2]). *Niech  $\mu - 1/2 \notin \mathbf{N}$  i połóżmy  $l = [\mu + 1/2]$ . Istnieją wtedy stałe  $c_1, c_2, c_3$  zależne tylko od  $\mu$  i takie, że*

$$c_2 \frac{\lambda x^{2\mu-1}}{t^{\mu+1}} e^{-\lambda^2/2t} \left(1 - c_3 \left(\frac{x}{t}\right)^{l-\mu+1/2}\right) \leq q_x^{(-\mu)}(t) \leq c_1 \frac{\lambda x^{2\mu-1}}{t^{\mu+1}} e^{-\lambda^2/2t},$$

*dla  $t > x > 1$ .*

Ostatni lemat odnosi się do  $\mu = 0$  i brakujących oszacowań w przypadku, gdy  $t/x$  jest duże.

**Lemat 8** (Lemma 9 w [H2]). *Niech  $\mu = 0$ . Dla  $t > 2x$ ,*

$$q_{x,1}^{(0)}(t) \approx \frac{\lambda e^{-\lambda^2/2t}}{x} \frac{1 + \log x}{t (1 + \log \frac{t}{x})(1 + \log t)}.$$

Po raz kolejny dowód opiera się na dokładnym oszacowaniu funkcji  $w_\lambda(v)$ , a następnie na sukcesywnym badaniu zachowania poszczególnych całek. Dokładne oszacowania funkcji  $w_\lambda(v)$ , które stanowią punkt wyjścia w tym, jak i w wielu innych miejscach dowodu głównego twierdzenia, znajdują się w Appendixie (Lemma 14, Lemma 16 i Lemma 17) omawianej pracy.

**Zastosowania.** Pierwszą bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 2 są dokładne oszacowania tzw. prawdopodobieństw przeżycia (*survival probabilities*), czyli prawdopodobieństwa, że proces startujący z  $x > 1$  do chwili  $t$  nie uderzył w punkt 1. Rozważamy tutaj przypadek indeksów nieujemnych, ale korzystając z (24) otrzymujemy, że

$$\mathbf{P}_x^{(-\mu)}(t < T_1) = x^{2\mu} \mathbf{P}_x^{(\mu)}(t < T_1 < \infty), \quad \mu > 0.$$

W szczególności dla  $\mu > 0$  mamy  $\mathbf{P}_x^{(\mu)}(T_1 = \infty) = 1 - x^{-2\mu}$ .

**Twierdzenie 4** (Theorem 4 w [H2]). *Niech  $\mu > 0$ . Wtedy, dla każdego  $t \geq 0$  i  $x > 1$ , mamy*

$$\mathbf{P}_x^{(\mu)}(t < T_1 < \infty) \approx \frac{x-1}{\sqrt{x \wedge t} + x-1} \frac{1}{t^\mu + x^{2\mu}}.$$

*Dodatkowo, dla każdego  $t \geq 0$  i  $x > 1$ , zachodzi*

$$\mathbf{P}_x^{(0)}(T_1 > t) \approx 1 \wedge \frac{\log x}{\log(1 + t^{1/2})}.$$

Kolejnym zastosowaniem uzyskanych oszacowań pierwszych czasów trafienia dla procesów Bessela jest ich wykorzystanie do wyznaczenia dokładnych obustronnych oszacowań jądro Poissona wnętrza horocyklu (półprzestrzeni) dla hiperbolicznego ruchu Browna z dryfem. Rozważamy model półprzestrzeni rzeczywistej przestrzeni hiperbolicznej wymiaru  $n$

$$\mathbb{H}^n = \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) : y_n > 0\}$$

i operator Laplace'a-Beltramię stowarzyszony z hiperboliczną metryką Riemanna na  $\mathbb{H}^n$ , który zadany jest wzorem

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = y_n^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} - (n-2)y_n \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Hiperbolicznym ruchem Browna nazywamy dyfuzję na  $\mathbb{H}^n$ , której generatorem inifinitezmalnym jest operator  $\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{H}^n}$ . Zamieniając czynnik  $(n-2)$  na  $(2\mu-1)$ ,  $\mu > 0$ , w powyższej formule otrzymujemy operator  $\Delta_\mu$ , zaś odpowiadającą mu dyfuzję  $Y_t^{(\mu)}$  nazywamy hiperbolicznym ruchem Browna z dryfem. Dokładniejszy opis samych przestrzeni hiperbolicznych oraz hiperbolicznego ruchu Browna znajdują się w rozdziale 5.2 poświęconym teorii potencjału na przestrzeniach hiperbolicznych. Rozważmy zbiór  $D = \{y \in \mathbb{H}^n : y_n > 1\}$ , którego brzeg jest horocykłem na  $\mathbb{H}^n$ , i przez  $P^{(\mu)}(y, z)$ ,  $y \in D$ ,  $z \in \partial D$ , oznaczamy jego jądro Poissona, czyli gęstość (względem miary powierzchniowej) rozkładu zmiennej  $Y_{\tau_D}^{(\mu)}$ , gdzie  $\tau_D = \inf\{t > 0 : Y_t^{(\mu)} \notin D\}$  jest pierwszym momentem wyjścia z  $D$ .

**Twierdzenie 5** (Theorem 5 w [H2]). *Dla każdego  $\mu > 0$  mamy*

$$P^{(\mu)}(y, z) \approx \frac{y_n - 1}{|z - y|^n} \left( \frac{y_n}{\cosh d_{\mathbb{H}^n}(y, z)} \right)^{\mu-1/2}, \quad (25)$$

gdzie  $y = (\tilde{y}, y_n)$ ,  $y_n > 1$  i  $z = (\tilde{z}, 1)$ ,  $\tilde{z} \in \mathbf{R}^{n-1}$ .

Metryka hiperboliczna występująca w powyższym oszacowaniu zadana jest wzorem

$$\cosh d_{\mathbb{H}^n}(y, z) = 1 + \frac{|y - z|^2}{2y_n z_n}, \quad y, z \in \mathbb{H}^n.$$

Zbiór  $D$  jest nieograniczony w tej metryce i w związku z tym nie stosuje się tutaj ogólna teoria mówiąca o porównywalności teorii potencjału (w szczególności jąder Poissona i funkcji Greena) operatorów mocno eliptycznych z ich klasycznymi odpowiednikami [17]. Co więcej, takiej porównywalności nie ma dla  $\mu \neq 1/2$ , a różnice w zachowaniu jądra hiperbolicznego i euklidesowego opisuje czynnik  $\left( \frac{y_n}{\cosh d_{\mathbb{H}^n}(y, z)} \right)^{\mu-1/2}$ .

### Dokładne obustronne oszacowania jąder ciepła półprostych $(a, \infty)$

Ostatnia część omawianego cyklu prac poświęcona jest wyznaczeniu dokładnych oszacowań gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu Bessela zabitego w momencie dojścia do zadanego poziomu  $a > 0$  przy starciu z punktu  $x > a$ , czyli funkcji

$$p_a^{(\mu)}(t, x, y) = \mathbf{E}_x^{(\mu)}[t < T_a; X_t \in dy] / m^\mu(dy), \quad x, y > a, \quad t > 0.$$

Innymi słowy rozważamy proces Bessela z indeksem  $\mu \in \mathbf{R}$  do momentu  $T_a$ . Gęstość ta zadana jest przy pomocy wzoru Hunta w następujący sposób

$$p_a^{(\mu)}(t, x, y) = p^{(\mu)}(t, x, y) - \mathbf{E}_x^{(\mu)}[t > T_a, p^{(\mu)}(t - T_a, R(T_a), y)], \quad x, y > a, \quad t > 0.$$

Kluczowa jest tutaj ciągłość trajektorii procesów Bessela, która implikuje, że  $R(T_a) = a$  z prawd. 1 i tym samym możemy napisać

$$r_a^{(\mu)}(t, x, y) := \mathbf{E}_x^{(\mu)}[t > T_a, p^{(\mu)}(t - T_a, R(T_a), y)] = \int_0^t p(t - s, a, y) q_{x,a}^{(\mu)}(s) ds. \quad (26)$$

Przedstawione powyżej probabilistyczne podejście do tego zagadnienia nie jest oczywiście jedynym. Na funkcję  $p_a^{(\mu)}(t, x, y)$  możemy bowiem spojrzeć z punktu widzenia teorii równań różniczkowych cząstkowych i zdefiniować ją jako rozwiązanie fundamentalne równania ciepła bazującego na operatorze Bessela, tzn.  $\partial_t - \frac{1}{2}L^{(\mu)}$ . W najbardziej klasycznym przypadku, gdy w miejscu operatora Bessela występuje klasyczny Laplasjan, problem wyznaczenia oszacowań jąder ciepła na podzbiorach  $\mathbf{R}^n$  ma bardzo długą historię i nie sposób opisać wszystkich badań i wyników dotyczącego tego zagadnienia. Nadmienimy zatem tylko, że badania te mają swój początek w latach 80tych poprzedniego stulecia w pracach E.B. Daviesa [22], [19], [20], [21] i sięgają po pracę [71], gdzie można znaleźć opis w przypadku laplasjanu na podzbiorach  $\mathbf{R}^n$  klasy  $C^{1,1}$ , czy też pracy [64], gdzie rozważano w tym kontekście ogólne klasy operatorów. Dość obszerny opis znanych rezultatów można znaleźć w pracy [65].

Głównymi wynikami omawianych prac są następujące dwa twierdzenia.

**Twierdzenie 13** (Theorem 1 w [H3]). Niech  $\mu \neq 0$  oraz  $a > 0$ . Wtedy zachodzi

$$p_a^{(\mu)}(t, x, y) \stackrel{\mu}{\approx} \left[ 1 \wedge \frac{(x-a)(y-a)}{t} \right] \left( 1 \wedge \frac{xy}{t} \right)^{|\mu|-1/2} \frac{1}{(xy)^{\mu+1/2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right), \quad (27)$$

dla wszystkich  $x, y > a$  oraz  $t > 0$ .

**Twierdzenie 14** (Theorem 1 w [H4]). Dla każdego  $a > 0$  zachodzi

$$p_a^{(0)}(t, x, y) \approx \ln(x/a) \ln(y/a) \left( \ln \frac{3t}{ax + a\sqrt{t}} \ln \frac{3t}{ay + a\sqrt{t}} \right)^{-1} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right), \quad xy < t, \quad (28)$$

oraz

$$p_a^{(0)}(t, x, y) \approx \left( 1 \wedge \frac{(x-a)(y-a)}{t} \right) \frac{1}{\sqrt{xyt}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right), \quad xy \geq t,$$

gdzie  $x, y > a$  oraz  $t > 0$ .

Zauważmy, że podobnie jak to miało miejsce w przypadku pierwszego czasu trafienia  $T_a$ , mamy do czynienia z odmiennym charakterem oszacowań  $p_a^{(\mu)}(t, x, y)$  dla  $\mu = 0$ . Dlatego też dowód pierwszej części Twierdzenia 14 wymagał wypracowania odmiennych metod dowodowych, co zaowocowało powstaniem oddzielnej publikacji. W obu przypadkach należy podkreślić, że uzyskany wynik dotyczy pełnego zakresu parametrów czasowych i przestrzennych. Co ważniejsze, uzyskaliśmy dokładny opis zachowania eksponencjalnego funkcji  $p_a^{(\mu)}(t, x, y)$ , co jest swego rodzaju ewenementem. Nawet w znanych wynikach dla procesu Wienera [71] (klasycznego laplasjanu z warunkiem Dirichleta na brzegu zbioru) opis zachowania eksponencjalnego jest tylko jakościowo dokładny, czyli występują różne stałe w eksponentach w szacowaniu dolnym i górnym. Nawet w przypadku dwuwymiarowej kuli i klasycznego laplasjanu nie znamy nadal oszacowań dokładnych. Analogiczna sytuacja ma miejsce w przypadku jąder ciepła rozważanych na rozmaitościach [65], czy też w przypadku jąder Fouriera-Bessela, czyli procesu Bessela zabitego przy wyjściu z odcinka  $[0, 1)$ , w którym to tak dokładny wynik jak ten z Twierdzenia 13 został uzyskany dopiero w pracy [P13]. Dla porównania naszego wyniku ze znanymi rezultatami zauważmy, że dla  $\mu \neq 0$  możemy napisać

$$\frac{p_a^{(\mu)}(t, x, y)}{p^{(\mu)}(t, x, y)} \stackrel{\mu}{\approx} \left( 1 \wedge \frac{(x-a)(y-a)}{t} \right) \left( 1 \vee \frac{t}{xy} \right), \quad x, y > a, \quad t > 0,$$

oraz

$$p_a^{(\mu)}(t, x, y) \stackrel{\mu}{\approx} \mathbf{P}_x^{(\mu)}(T_a^{(\mu)} > t) \mathbf{P}_y^{(\mu)}(T_a^{(\mu)} > t) p^{(\mu)}(t, x, y), \quad xy \leq t,$$

co jest bardzo powszechnym sposobem szacowania jąder ciepła podzbioru przez iloczyn odpowiednich prawdopodobieństw przeżycia i jądra ciepła całej przestrzeni. Zazwyczaj w dolnym i górnym szacowaniu zmienna czasowa w  $p^{(\mu)}(t, x, y)$  jest skalowana przez różne stałe (zob. Theorem 5.16 w [65]). W naszym przypadku stałe są takie same. Dodatkowo dla  $xy > t$  jądro  $p_a^{(\mu)}(t, x, y)$  nie zachowuje się jak prawa strona powyższej nierówności, tzn. oszacowanie wyrażenia  $p_a^{(\mu)}(t, x, y)/p^{(\mu)}(t, x, y)$  dla  $xy > t$  nie faktoryzuje się jako iloczyn prawdopodobieństw przeżycia ani żaden inny iloczyn postaci  $f(t, x)f(t, y)$  dla pewnej funkcji  $f$ . Jest to spowodowane wymogiem dokładnego opisu zachowania eksponencjalnego, jaki sobie nałożyliśmy.

Własność absolutnej ciągłości pozwala także w tym przypadku ograniczyć się do przypadku, gdy  $\mu$  ma ustalony znak. Z przyczyn czysto technicznych tym razem rozpatrujemy przypadek  $\mu \geq 0$ .

**Dowód Twierdzenia 13** podzielony jest w naturalny sposób na dwa przypadki odnoszące się do sytuacji, gdy  $xy/t$  jest małe, czy też duże. Punktem wyjścia jest dla nas przypadek  $\mu = 1/2$ , kiedy to zarówno funkcja  $I_{1/2}(z)$  jak i  $q_{x,1}^{(1/2)}(t)$  wyrażają się w bardzo prosty sposób przez funkcje elementarne. W konsekwencji wzór Hunta (26) prowadzi do jawnego wzoru

$$p_1^{(1/2)}(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{y}{x} \left( \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y-2)^2}{2t}\right) \right)$$

i w natychmiastowy sposób implikuje prawdziwość oszacowań z Twierdzenia 13 dla  $\mu = 1/2$ . Następnie, na mocy własności absolutnej ciągłości rozkładów, otrzymujemy

**Stwierdzenie 15** (Proposition 1 w [H3]). *Dla  $\mu \geq 1/2 \geq \nu \geq 0$  zachodzi*

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu-1/2} p_1^{(\mu)}(t, x, y) \leq p_1^{(1/2)}(t, x, y) \leq \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu-1/2} p_1^{(\nu)}(t, x, y)$$

dla wszystkich  $x, y > 1$  oraz  $t > 0$ .

Podobne nierówności prawdziwe są także dla gęstości pierwszych czasów trafienia i zostały sformułowane i udowodnione w Lemma 1 omawianej pracy. Powyższe oszacowania są optymalne, tzn. dowodzą oszacowań górnych dla  $\mu \geq 1/2$  oraz oszacowań dolnych dla  $\nu \leq 1/2$  występujących w (27), w przypadku, gdy  $xy \geq t$ . Dowód brakujących oszacowań (dolnych dla  $\mu \geq 1/2$  oraz górnych dla  $\nu \leq 1/2$ ) podzielony jest na przypadki w zależności od tego, czy zmienne przestrzenne  $x$  i  $y$  są bliskie 1, czy też nie. Przy założeniu, że obie zmienne są oddzielone od brzegu, prawa strona (27) jest porównywalna z  $p^{(\mu)}(t, x, y)$ , a brakujące oszacowania w tym przypadku zostały wyprowadzone w

**Stwierdzenie 16** (Proposition 3 w [H3]). *Niech  $\mu \geq 1/2 \geq \nu > 0$ . Wtedy, istnieją stałe  $C_1^{(\nu)}, C_2^{(\mu)} > 0$  oraz  $C_3^{(\mu)} > 1$  takie, że*

$$C_1^{(\nu)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu+1/2} p_1^{(\nu)}(t, x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{t}\right) \leq C_2^{(\mu)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mu+1/2} p_1^{(\mu)}(t, x, y),$$

gdy tylko  $xy \geq t$  oraz oszacowania górne są poprawne przy dodatkowym założeniu, że  $x, y > C_3^{(\mu)}$ .

Dowód lewej nierówności (dla  $1/2 \geq \nu \geq 0$ ) jest natychmiastową konsekwencją oczywistej zależności  $p^{(\nu)}(t, x, y) \leq p^{(\nu)}(t, x, y)$ . W przypadku  $\mu \geq 1/2$  pokazujemy, że  $r^{(\mu)}(t, x, y) \leq \frac{1}{2}p^{(\mu)}(t, x, y)$  i tym samym  $p_1^{(\mu)}(t, x, y) \geq \frac{1}{2}p^{(\mu)}(t, x, y)$  przy wykorzystaniu wyników Stwierdzenia 15 i wspomnianych już nierówności dla gęstości czasów pierwszego trafienia (Lemma 1 w [H3]) oraz jawnych wzorów na omawiane obiekty w przypadku  $\mu = 1/2$ . Drugi przypadek odnosi się do sytuacji, gdy zarówno  $x$ , jak i  $y$  są ograniczone, a wynik możemy uzyskać korzystając z poniższego stwierdzenia.

**Stwierdzenie 17.** *Dla ustalonego  $m > 0$  oraz  $\mu \geq 1/2 \geq \nu > 0$  istnieją stałe  $C_4^{(\mu)}, C_4^{(\nu)} > 0$  takie, że*

$$C_4^{(\mu)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mu+1/2} p_1^{(\mu)}(t, x, y) \geq \left(1 \wedge \frac{(x-1)(y-1)}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)$$

oraz

$$\left(1 \wedge \frac{(x-1)(y-1)}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \geq C_4^{(\nu)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu+1/2} p_1^{(\nu)}(t, x, y)$$

gdy tylko  $(x \wedge y)^2 \geq mt$ .



Po raz kolejny w dowodzie wykorzystujemy (2) i szacujemy występujący tam funkcjał całkowy do czasu  $T_b$ , gdzie  $b = ((x \wedge y) + 1)/2$ , korzystając z oczywistej zależności  $T_1 \geq T_b$  z prawd. 1. Własność skalowania pozwala zamienić  $p_b^{(\mu)}(t, x, y)$ , która pojawia się w oszacowaniach w wyniku podmienienia  $T_1$  na  $T_b$ , z powrotem na funkcję  $p_1^{(\mu)}(t, x, y)$  w rozważanym zakresie parametrów. Zauważmy ponadto, że w przypadku  $xy \geq t$ ,  $x, y < C$  dla ustalonego  $C > 1$ , mamy  $(x \wedge y)^2 \geq C^{-1}xy \geq C^{-1}$ , co pozwala nam w tej sytuacji stosować powyższy wynik (dla  $m = 1/C$ ).

Pozostały przypadek, tzn. sytuację, gdy jedna ze zmiennych jest bliska 1, zaś druga jest duża (nieograniczona), zbadaliśmy w dwóch oddzielnych stwierdzeniach odnoszących się oddzielnie do  $\nu \in (0, 1/2)$  oraz  $\mu \geq 1/2$ .

**Stwierdzenie 18** (Proposition 5 w [H3]). *Dla  $\nu \in (0, 1/2)$  istnieje stała  $C_5^{(\nu)} > 0$  taka, że*

$$p_1^{(\nu)}(t, x, y) \leq C_5^{(\nu)} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu+1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \left(1 \wedge \frac{(x-1)(y-1)}{t}\right)$$

dla  $1 < x \leq 2 \leq y$  i  $xy \geq t$ .

**Stwierdzenie 19** (Proposition 6 w [H3]). *Dla każdego  $\mu \geq 1/2$  i  $c > 1$  istnieje stała  $C_6^{(\mu)}(c) > 0$  taka, że dla każdego  $1 < x \leq c$  i  $y \geq 5c(\mu + 1)$  zachodzi*

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) \geq C_6^{(\mu)}(c) \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\mu+1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \left(1 \wedge \frac{(x-1)(y-1)}{t}\right),$$

gdy tylko  $xy \geq t$ .

Dowody obu twierdzeń są w zasadzie czysto analityczne i bazują na subtelnej analizie wzoru Hunta i oszacowaniu  $r_1^{(\mu)}(t, x, y)$  w taki sposób, aby uchwycić kasowania, które mają miejsce między  $p^{(\mu)}(t, x, y)$  a  $r_1^{(\mu)}(t, x, y)$  i jednocześnie dokładnie opisać zachowanie eksponencjalne badanej gęstości. Wykorzystujemy tutaj jawną postać gęstości  $p^{(\mu)}(t, x, y)$  oraz własności funkcji  $I_\mu(z)$ . W szczególności stosujemy dokładne oszacowania ilorazów zmodyfikowanych funkcji Bessela postaci  $I_\mu(x)/I_\mu(y)$  udowodnionych przez A. Laforgię w pracy [50].

Dowód (27) w przypadku, gdy  $xy/t$  jest małe zaczynamy od wyprowadzenia oszacowań górnych.

**Stwierdzenie 20** (Proposition 7 w [H3]). *Dla każdego  $\mu > 0$ , istnieje stała  $C_7^{(\mu)} > 0$  taka, że*

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) \leq C_7^{(\mu)} \frac{x-1}{x} \frac{y-1}{y} \left(\frac{y^2}{t}\right)^{\mu+1/2} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right),$$

gdy tylko  $xy \leq t$ .

W najprostszym przypadku  $x, y > 2$  (oddzielenie od brzegu) oszacowanie wynika bezpośrednio z oczywistej nierówności  $p_1^{(\mu)}(t, x, y) \leq p^{(\mu)}(t, x, y)$ . Zauważmy, że w rozważanym przypadku  $xy \leq t$  przy dodatkowym założeniu  $x, y < 2$  otrzymujemy, że  $|x-y|^2/t$  jest ograniczone i tym samym nie mamy zachowania eksponencjalnego w (27), co w znaczący sposób upraszcza rozumowanie. Musimy wtedy zadbać tylko o odpowiedni opis zanikania gęstości przy brzegu. Stosując proste oszacowanie  $p_1^{(\mu)}(t, x, y) \leq p^{(\mu)}(t, x, y) \leq c_1 \frac{y^{2\mu+1}}{t^{\mu+1}}$  i stosując równanie Chapmanna-Kołmogorowa otrzymujemy oszacowanie przy pomocy iloczynu prawdopodobieństw przeżycia przy starciu z punktów  $x$  i  $y$  oraz  $p^{(\mu)}(t, x, y)$ . Wykorzystanie oszacowań z Twierdzenia 4 z pracy [H2] daje oszacowanie górne żądanej postaci. Sytuacja, gdy  $1 < x < 2$  zaś  $y \geq 2$  wymaga

zastosowania oszacowań gęstości czasu pierwszego trafienia (Twierdzenie 2) opisanych w poprzedniej części niniejszego autoreferatu, które wraz z ostrożnymi szacowaniami otrzymanych wyrażeń pozwalają zakończyć dowód.

Przypadek oszacowań dolnych dla  $xy \leq t$  podzielony został na dwa oddzielne stwierdzenia odnoszące się odpowiednio do sytuacji, gdy  $(y-1)^2/t$  jest duże i małe.

**Stwierdzenie 21** (Proposition 8 w [H3]). *Dla każdego  $\mu > 0$  i  $m \geq 1$ , istnieje stała  $C_8^{(\mu)}(m) > 0$  taka, że*

$$\frac{p_1^{(\mu)}(t, x, y)}{p^{(\mu)}(t, x, y)} \geq C_8^{(\mu)}(m) \frac{x-1}{x}, \quad y > x > 1,$$

gdzie tylko  $xy < mt$  oraz  $\frac{(y-1)^2}{t} \geq 2(\mu + 1)$ .

**Stwierdzenie 22** (Proposition 9 w [H3]). *Dla każdego  $\mu > 0$  istnieje stała  $C_9^{(\mu)} > 0$  taka, że*

$$\frac{p_1^{(\mu)}(t, x, y)}{p^{(\mu)}(t, x, y)} \geq C_9^{(\mu)} \frac{x-1}{x} \frac{y-1}{y}, \quad y > x > 1,$$

gdzie tylko  $xy < t$  i  $\frac{(y-1)^2}{t} \leq 2(\mu + 1)$ .

Dowód pierwszego z nich jest również czysto analityczny i ponownie bazuje na własnościach funkcji Bessela i ostrożnym szacowaniu występujących we wzorze Hunta całek. Druga część polega na dwukrotnym skorzystaniu z równości Chapmanna-Kołmogorowa i umiejętnym zawężeniu przedziałów całkowania tak, aby móc skorzystać z wyprowadzonych uprzednio oszacowań w przypadku  $xy > t$ . Prowadzi to do rozbicia całki podwójnej uzyskanej z własności półgrupowej na iloczyn całek zależnych od  $x$  i  $y$ , które szacujemy z dołu korzystając z tezy Stwierdzenia 21.

**Zastosowania.** Oszacowania uzyskane w Twierdzeniu 13 można zastosować do uzyskania dokładnych obustronnych oszacowań  $\lambda$ -funkcji Greena półprzestrzeni (tzn. obszaru ograniczonego przez horocykl) dla hiperbolicznego ruchu Browna z dryfem. Wynik ten został uzyskany w oddzielnej publikacji [P12] opisanej poniżej.

**Dowód Twierdzenia 14** zasadniczo dotyczy tylko przypadku, gdy  $xy < t$ . Tak, jak już wspomnieliśmy, oszacowania w przypadku, gdy  $xy/t$  są tej samej postaci dla wszystkich  $\mu \in \mathbf{R}$  i de facto dowody przedstawione w pracy [H3] stosują się bezpośrednio także do sytuacji  $\mu = 0$ . W pracy [H4] zostały one przedstawione w skróconej wersji dostosowanej do przypadku  $\mu = 0$  (Proposition 4.1 i 4.2 w [H4]) dla kompletności dowodu i wygody czytelnika. W związku z tym nie będziemy ich szczegółowo omawiać.

Opis zachowania logarytmicznego występującego w przypadku  $xy < t$  zaczynamy od prostej obserwacji, że gdy  $1 < x < y$  i  $xy < t$ , to  $x^2 < t$ , zaś oszacowania (28) można wtedy uprościć do następującej postaci

$$p_1^0(t, x, y) \approx \frac{\ln x \ln y}{\ln^2 3t} p^0(t, x, y), \quad y^2 \leq t,$$

oraz

$$p_1(t, x, y) \approx \frac{\ln x}{\ln(3t/y)} p(t, x, y), \quad y^2 > t.$$

Zaczynamy od pierwszego z tych oszacowań, tzn. od przypadku, gdy  $y^2/t$  jest ograniczone przez dowolną stałą.

**Stwierdzenie 23** (Proposition 3.1 w [H4]). *Dla każdego  $m \geq 2$  mamy*

$$p_1^0(t, x, y) \approx \frac{\ln x \ln y}{\ln^2(3t)} p^0(t, x, y),$$

gdzie  $xy < t$  oraz  $y^2 \leq mt$ .

Oszacowanie górne otrzymujemy standardowo przez dwukrotne zastosowanie tożsamości Chapmanna-Kołmogorowa, szacowania górnego

$$p_1^{(0)}(t, x, y) \leq p^{(0)}(t, x, y) \leq 1/t$$

oraz oszacowań prawdopodobieństw przeżycia (Twierdzenie 4). Oszacowania dolne wymagają zawężenia przedziału całkowania w równaniu Chapmanna-Kołmogorowa do  $[2\sqrt{mt}, 3\sqrt{mt}]$  i wykorzystaniu oszacowań dolnych postaci

$$p_1^{(0)}(t, x, y) \geq c_m \frac{\ln x}{\ln(3t)} p^{(0)}(t, x, y), \quad 1 < x < y/2, \quad y > 1 + 2\sqrt{t}.$$

Te ostatnie wyprowadzamy ze wzoru Hunta i nierówności na ilorazy postaci  $I_0(z)/I_0(w)$ . Wykorzystujemy tutaj także monotoniczność funkcji  $x \rightarrow p^{(0)}(t, x, y)$  dla  $2x < y$ ,  $y^2 > 4t$  (Remark 2.2 w [H4]), która jest konsekwencją oszacowań na pochodną tejże funkcji (Lemma 2.1 w [H4]). Kluczowy i najbardziej wymagający jest jednak dowód oszacowania w pozostałym przypadku, tzn. gdy  $y^2/t$  jest dostatecznie duże.

**Stwierdzenie 24** (Proposition 3.1 w [H4]). *Zachodzi*

$$p_1^{(0)}(t, x, y) \approx \frac{\ln x}{\ln(3t/y)} p^{(0)}(t, x, y),$$

gdzie  $xy < t$  i  $y^2 \geq 16t$ .

Pisząc

$$\frac{p_1^{(0)}(t, x, y)}{p^{(0)}(t, x, y)} \approx \frac{p^{(0)}(t, x, y) - p^{(0)}(t, 1, y)}{p^{(0)}(t, 1, y)} + \int_t^\infty q_{x,1}^{(0)}(s) ds + \int_0^t \frac{p^{(0)}(t, 1, y) - p^{(0)}(t-s, 1, y)}{p^{(0)}(t, 1, y)} q_{x,1}^{(0)}(s) ds.$$

sprowadzamy zagadnienie do oszacowania powyższych trzech składników. Pierwszy z nich, w związku z jawną postacią gęstości prawdopodobieństw przejścia, łatwo szacujemy z twierdzenie Lagrange'a, zaś zachowanie drugiego znamy dokładnie na mocy oszacowań prawdopodobieństw przeżycia. Okazuje się, że oba dominowane są jednak przez trzeci składnik. Oszacowanie składnika całkowego dostajemy rozbijając przedział całkowania na  $[0, 2x)$ ,  $[2x, 4t^2/y^2)$ ,  $[4t^2/y^2, t]$  i szacując funkcję podcałkową osobno na każdym z nich. Pokazujemy, że dla  $0 < s < 4y^2/t^2$  mamy

$$\frac{p^{(0)}(t, 1, y) - p^{(0)}(t-s, 1, y)}{p^{(0)}(t, 1, y)} \approx s \frac{y^2}{t^2},$$

co wynika z dość subtelnych, delikatnych i z drugiej strony technicznych oszacowań na pewne wyrażenia związane z funkcją  $I_0(z)$ . Oszacowania na  $q_{x,1}^{(0)}(s)$  zawarte w Twierdzeniu 2 pozwalają dokładnie oszacować całki po  $[0, 2x)$  i  $[2x, 4t^2/y^2)$ . W przypadku  $s > 4y^2/t^2$ , raz jeszcze analizując jawny wzór na  $p^{(0)}(t, x, y)$  pokazujemy, że wyrażenie

$$\frac{p^{(0)}(t, 1, y) - p^{(0)}(t-s, 1, y)}{p^{(0)}(t, 1, y)}$$

porównywalne jest ze stałą i tym samym całkę po pozostałym przedziale  $[4t^2/y^2, t]$  możemy oszacować korzystając z dokładnych oszacowań na  $q_{x,1}^{(0)}(s)$  z pracy [H2], co wraz z poprzednimi oszacowaniami pozwala uzyskać tezę.

## 5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Poza czterema pracami, stanowiącymi jednotematyczny cykl publikacji, opublikowałem po doktoracie 13 artykułów, zaś jeden został zaakceptowany i czeka na publikację od marca 2015r., co daje łącznie 20 publikacji. Cztery z opublikowanych prac, w tym dwie wchodzące w skład jednotematycznego cyklu, ([H3], [H4], [P3], [P13]) zostały napisane wraz ze studentami i doktorantami, którzy pod moim kierunkiem pisali swoje prace magisterskie oraz doktoraty. Liczba cytowań, według bazy Web of Science (na dzień 19.04.2016), jest równa 98, (71 bez autocytowań) zaś h-indeks (indeks Hirscha) jest równy 6. Sumaryczny *impact factor* czasopism dla czterech publikacji wchodzących w skład *osiągnięcia naukowego*, według listy Journal Citation Reports, to 3,576; sumaryczny *impact factor* czasopism dla wszystkich dwudziestu publikacji to 18,044, zob. Tablicę 1.

Tablica 1: Impact factor czasopism według listy Journal Citation Report zgodnie z rokiem opublikowania (lub z roku podanego w nawiasie w przypadku publikacji z 2016).

praca	czasopismo	data publikacji	impact factor
[H1]	Potential Anal.	2010	0,853
[H2]	Potential Anal.	2013	1,048
[H3]	Potential Anal.	2015	0,992
[H4]	Math. Nachr.	2016	0,683 (2015)
[P1]	Colloq. Math.	2010	–
[P2]	Proc. London Math. Soc.	2010	1,243
[P3]	Demonstratio Math.	2012	–
[P4]	J. Differential Equations	2012	1,480
[P5]	Colloq. Math.	2012	0,403
[P6]	J. Math. Phys.	2013	1,176
[P7]	Stoch. Proc. Appl.	2013	1,046
[P8]	Annals Probab.	2013	1,431
[P9]	Rev. Math. Phys.	2013	1,448
[P10]	Electron. J. Probab.	2014	0,765
[P11]	Ann. Inst. Henri Poincaré (B)	2015*	1,059
[P12]	Studia Math.	2015	0,610
[P13]	J. Math. Anal. Appl.	2016	1,120 (2015)
[P14]	J. Math. Anal. Appl.	2016	1,120 (2015)
[D1]	Potential Anal.	2007	0,507
[D2]	Trans. Amer. Math. Soc.	2009	1,060
Suma:			18,044

\* - praca [P11] czeka na publikację od marca 2015r.

- [P1] T. Byczkowski, J. Małecki, T. Żak, *Feynman-Kac formula,  $\lambda$ -Poisson kernels and  $\lambda$ -Green functions of half-spaces and balls in hyperbolic spaces*, Colloq. Math. 118, 201–222 (2010).
- [P2] T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, J. Małecki, A. Stós, *Spectral properties of the Cauchy process on half-line and interval*, Proc. London Math. Soc. 101 (2), 589–622 (2010).

- [P3] J. Małecki, G. Serafin, *Hitting hyperbolic half-space*, Demonstratio Math. 45 (2), 337–360 (2012).
- [P4] J. Lőrinczi, J. Małecki, *Spectral properties of the massless relativistic harmonic oscillator*, J. Differential Equations 253, 2846–2871 (2012).
- [P5] T. Byczkowski, J. Chorowski, P. Graczyk, J. Małecki, *Hitting half-spaces or spheres by the Ornstein-Uhlenbeck type diffusions*, Colloq. Math. 129, 145–171 (2012).
- [P6] P. Graczyk, J. Małecki, *Multidimensional Yamada-Watanabe theorem and its applications to particle systems*, J. Math. Phys. 54, 021503 (2013).
- [P7] M. Kwaśnicki, J. Małecki, M. Ryznar, *First passage times for subordinate Brownian motions*, Stoch. Proc. Appl. 123 (5), 1820–1850 (2013).
- [P8] M. Kwaśnicki, J. Małecki, M. Ryznar, *Suprema of Lévy processes*, Annals Probab. 41 (3B), 2047–2065 (2013).
- [P9] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Małecki, *One-dimensional quasi-relativistic particle in the box*, Rev. Math. Phys. 25(8), 1350014 (2013).
- [P10] P. Graczyk, J. Małecki, *Strong solutions of non-colliding particle systems*, Electron. J. Probab. 19 (119), 1–21 (2014).
- [P11] L. Chaumont, J. Małecki, *On the asymptotic behavior of the density of the supremum of Lévy processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré (B), przyjęta do druku <http://imstat.org/aihp/accepted.html> (2015).
- [P12] K. Bogus, T. Byczkowski, J. Małecki, *Sharp estimates of Green function of hyperbolic Brownian motion*, Studia Math. 228 (3), 197–222 (2015).
- [P13] J. Małecki, G. Serafin, T. Żórawik *Fourier-Bessel heat kernel estimates*, J. Math. Anal. Appl. 439 (1), 91–102 (2016).
- [P14] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Małecki, *Asymptotic estimate of eigenvalues of pseudo-differential operators in an interval* J. Math. Anal. Appl. 439(2), 896–924 (2016).

Mój dorobek naukowy dopełniają jeszcze poniższe dwie publikacje wchodzące w skład doktoratu, które nie będą tutaj omawiane.

- [D1] T. Byczkowski, J. Małecki, *Poisson kernel and Green function of the ball in real hyperbolic spaces*, Potential Anal. 27(1), 1–26 (2007).
- [D2] T. Byczkowski, J. Małecki, M. Ryznar, *Bessel potentials, hitting distributions and Green functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 361, 4871–4900 (2009).

Omówię teraz wyniki uzyskane w pracach [P1]-[P14]. Dla większej przejrzystości cały opis podzielony jest na cztery części odnoszące się do głównych zagadnień badawczych, którymi się zajmuję.

### 5.1 Proces Bessela na odcinku

Bezpośrednią kontynuacją prac [H1]-[H4] są badania nad oszacowaniami jąder Fouriera-Bessela, czyli gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu Bessela zabitego w momencie wyjścia z odcinka  $[0, 1)$ , przeprowadzone w pracy [P13]. W związku z tym, mamy do czynienia ze zbiorem ograniczonym, omawiane

jądro ma reprezentację w języku wartości i wektorów własnych, które w tym konkretnym przypadku wyrażają się przez funkcje Bessela pierwszego rodzaju  $J_\nu(z)$  oraz ich zer  $\lambda_{n,\nu}$

$$G_t^\nu(x, y) = 2(xy)^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_{n,\nu}^2 t) \frac{J_\nu(\lambda_{n,\nu} x) J_\nu(\lambda_{n,\nu} y)}{|J_{\nu+1}(\lambda_{n,\nu})|^2}, \quad x, y \in (0, 1), \quad t > 0,$$

gdzie  $\nu > -1$ . Rozwinięcia Fouriera-Bessela pojawiały się w słynnej książce J. Fouriera [27] w 1822r. przy okazji badania rozchodzenia się ciepła w cylindrze, ale były one wykorzystywane już wcześniej m.in. przez D. Bernoulliego (1732) do opisu oscylacji wiszącego łańcucha, czy też L. Eulera (1764) przy okazji badania drgań okrągłej membrany z symetrycznym początkowym odkształceniem. Pomimo tego, że są one elementem tak klasycznej teorii ich oszacowania w pełnym zakresie parametrów zostały udowodnione niedawno w pracach [58], [59]. Uzyskany tam wynik jest jednak tylko jakościowo dokładny, czyli mamy do czynienia z różnymi stałymi w eksponentach w oszacowaniach dolnych i górnych. Warto podkreślić, że dokładne oszacowania dla dużych czasów  $t$  można w dość prosty sposób wywnioskować z powyższej reprezentacji spektralnej jąder Fouriera-Bessela, ponieważ wtedy o zachowaniu całości decyduje pierwszy wyraz szeregu. Jednak dla małych  $t$  powyższa reprezentacja szeregową staje się bezużyteczna, ponieważ wyrazy szeregu mocno oscylują i wszystkie mają wpływ na zachowanie badanego jądra. Okazuje się, że wykorzystanie podejścia probabilistycznego, a w szczególności wyrażenia  $G_t^\nu(x, y)$  przy pomocy wzoru Hunta pozwala uzyskać dokładne obustronne oszacowania w pełnym zakresie parametrów następującej postaci (Thm 1.1 w [P13])

$$G_t^\nu(x, y) \approx \frac{\nu}{(t + xy)^{\nu+1/2}} \left( 1 \wedge \frac{(1-x)(1-y)}{t} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} - \lambda_{1,\nu}^2 t\right),$$

dla wszystkich  $x, y \in (0, 1)$  oraz  $t > 0$ , gdzie  $\nu > -1$ . Równolegle otrzymujemy dokładne obustronne oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu Bessela zabitego w momencie pierwszego uderzenia w poziom  $a$  przy starcie z  $x < a$  (Corollary 1.1 w [P13]) oraz analogiczny wynik przy zabijaniu procesu w momencie wyjścia z odcinka  $(0, 1)$  (Corollary 1.2 w [P13]). Oczywiście w obu przypadkach przedstawiamy dokładny opis zachowania eksponencjalnego.

## 5.2 Teoria potencjału na przestrzeniach hiperbolicznych.

Prace [P1], [P3], [P5],[P12] są kontynuacją tematyki badawczej zapoczątkowanej w moje pracy doktorskiej (zob. [D1]) i dotyczą teorii potencjału hiperbolicznego ruchu Browna, a w szczególności wyznaczeniu opisu jąder Poissona i funkcji Greena kul, zbiorów ograniczonych przez horocykle oraz półprzestrzeni. Pierwszym rozważanym modelem rzeczywistej przestrzeni hiperbolicznej jest model półprzestrzeni  $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  wyposażony w metrykę Riemanna zadaną wzorem  $ds^2 = dx^2/x_n^2$ . Odległość hiperboliczna jest wtedy wyznaczona przez zależność

$$\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(x, y)) = 1 + \frac{|x-y|^2}{2x_n y_n}, \quad x, y \in \mathbb{H}^n,$$

zaś operator Laplace'a-Beltramiego (zdefiniowany jako dywergencja gradientu) jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu postaci

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = x_n^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - (n-2)x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

W modelu dysku hiperbolicznego  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$  z metryką  $ds^2 = |dx|^2/(1 - |x|^2)^n$  odległość hiperboliczna zadana jest przez

$$\cosh(2d_{\mathbb{D}^n}(x, y)) = 1 + \frac{2|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}, \quad x, y \in \mathbb{D}^n,$$

zaś operator Laplace'a-Beltramiego na  $\mathbb{D}^n$  przyjmuje postać

$$\Delta_{\mathbb{D}^n} = (1 - |x|^2)^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + 2(n - 2)(1 - |x|^2) \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Oba modele są tożsame (izomorficzne), jednak wygodniej jest badać kule w modelu dysku, zaś horocykle i półprzestrzenie w modelu  $\mathbb{H}^n$ . Hiperbolicznym ruchem Browna (HRB)  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  nazywamy dyfuzję na  $\mathbb{H}^n$  (odp. na  $\mathbb{D}^n$ ), której generatorem infinitesimalnym jest operator  $\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{H}^n}$  (odp.  $\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{D}^n}$ ). W przypadku, gdy w powyższych wzorach na operator Laplace'a-Beltramiego zamiast  $n$  wstawimy  $2\mu + 1$  dla dowolnego  $\mu > 0$ , będziemy mówić o hiperbolicznym ruchu Browna z dryfem. Przypomnijmy, że dla zbioru  $D \subset \mathbb{H}^n$  (odp.  $\mathbb{D}^n$ ) oraz  $\lambda \geq 0$  definiujemy  $\lambda$ -miarę harmoniczną wzorem

$$P_D^\lambda(x, A) = \mathbf{E}^x[e^{-\lambda\tau_D}; X_{\tau_D} \in A], \quad x \in D, \quad A \in \partial D,$$

zaś  $\lambda$ -funkcja Greena zbioru  $D$  jest to jądro całkowe  $\lambda$ -operatora Greena

$$G_D^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}[t < \tau_D; f(X_t)] dt, \quad x \in D.$$

Tutaj  $\tau_D$  oznacza pierwszy moment wyjścia procesu ze zbioru  $D$ .

W pracy [P1] unifikujemy, uporządkowujemy i rozszerzamy wyniki prac [D2], [10], [72] dotyczących wyprowadzenia wzorów na miarę harmoniczną oraz funkcję Greena dla kul  $D_r = \{x \in \mathbb{D}^n : |x| < r < 1\}$  oraz wnętrza horocyklu  $D_a = \{x \in \mathbb{H}^n : x_n > a > 0\}$ . Rozważane kule o euklidesowym promieniu  $r < 1$  pokrywają się z scentrowanymi kulami hiperbolicznymi (o promieniu hiperbolicznym  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$ ). Wyniki dla kul o dowolnym środku można uzyskać natychmiast przy użyciu grupy izometrii przestrzeni i własności niezmienniczości HRB względem jej działania. Korzystając z technik Feynmana-Kaca wyprowadzamy wzór na transformatę Fouriera  $\lambda$ -miary harmonicznego zbioru  $D_a$  oraz odpowiadającej  $\lambda$ -funkcji Greena w języku zmodyfikowanych funkcji Bessela  $I_\mu(z)$  i  $K_\mu(z)$ . Otrzymane wyniki w kontekście miar harmonicznym uogólniają te z pracy [10], gdzie podano wzory na jądro Poissona zbioru  $D_a$  (przypadek  $\lambda = 0$ ), zaś charakteryzacja  $\lambda$ -funkcji Greena nie była wcześniej znana (nawet dla  $\lambda = 0$ ). Charakteryzacja  $\lambda$ -miary harmonicznego i  $\lambda$ -funkcji Greena kuli  $D_r$  polega na wyznaczeniu jej transformaty Gegenbauera (rozwińnięcie badanej funkcji w szereg wielomianów ultrasferycznych). Rozkładając proces na część radialną i sferyczną sprowadzamy nasze zagadnienie do szukania rozwiązań równań różniczkowych drugiego rzędu, które prowadzi do reprezentacji w języku funkcji hipergeometrycznej  ${}_2F_1$ . Wyniki te stanowią uogólnienie pracy [D1], gdzie w tym kontekście badany był tylko przypadek  $\lambda = 0$ . Podobna analiza została także przeprowadzona w przypadku kuli zespolonej, co uogólniło wyniki pracy [72] na przypadek dowolnego  $\lambda > 0$ .

Praca [P3] poświęcona jest badaniu hiperbolicznego ruchu Browna z dryfem na  $\mathbb{H}^n$  zabitego przy wyjściu z hiperbolicznego półprzestrzeni, czyli zbioru  $D = \{x \in \mathbb{H}^n : x_1 > 0\}$ . Nazwa "hiperboliczna półprzestrzeń" jest uzasadniona tym, że istnieje izometria przestrzeni  $\mathbb{H}^n$ , która przekształca zbiór  $D$  na wnętrze jego dopełnienia i w tym sensie jest on "połową" przestrzeni. Dowodząc najpierw zasady odbicia dla rozważanego procesu wyprowadzamy wzory na gęstość prawdopodobieństw przejścia HRB zabitego przy wyjściu z  $D$ , a następnie wzory na funkcję Greena oraz jądro Poissona zbioru  $D$  w języku funkcji Legendre'a  $Q_a^b(z)$  i  $P_a^b(z)$ . Korzystając z otrzymanych formuł wyprowadzamy dokładne obustronne oszacowania oraz

wyznaczamy asymptotyki badanych obiektów. W ostatniej części pracy stosujemy uzyskane rezultaty do analizy zachowania  $\lambda$ -miary harmonicznej i  $\lambda$ -funkcji Greena zbioru  $D$ .

Celem pracy [P5] było opisanie ogólnej metody, która pozwala wyprowadzić jawne wzory na rozkłady trafienia w zbiory  $D \subset \mathbf{R}^n$  procesów typu Ornsteina-Uhlenbecka, czyli dyfuzji na  $\mathbf{R}^n$  o generatorze nieskończenie małym postaci  $\Delta + F(x) \cdot \nabla$ , przy założeniu, że występujące tutaj pole wektorowe  $F$  jest ortogonalne do brzegu zbioru  $D$ . Pozwala to na uzyskanie nowych reprezentacji całkowych na jądro Poissona w przypadku półprzestrzeni oraz kuli dla hiperbolicznego ruchu Browna. Nowe formuły umożliwiły wyznaczenie pewnych oszacowań i asymptotyk badanego jądra Poissona. Pełny opis przez podanie dokładnych obustronnych oszacowań w pełnym zakresie parametrów został podany w Twierdzeniu 5 z pracy [H2] omówionej w poprzedniej części autoreferatu. Dodatkowo stosujemy wypracowaną metodę do wyznaczenia wzoru na rozkład trafienia w kulę dla klasycznego procesu Ornsteina-Uhlenbecka (dla  $F(x) = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ).

Charakteryzacja  $\lambda$ -funkcji Greena półprzestrzeni z pracy [P1], w związku z dużą komplikacją otrzymanych wzorów, nie pozwala na wyznaczenie oszacowań tejże funkcji. Dlatego też celem pracy [P12] było uzupełnienie tej luki i podanie opisu funkcji Greena horocyklu przez wyprowadzenie dokładnych obustronnych oszacowań dla pełnego zakresu parametrów. Warto jeszcze raz podkreślić, że rozważany zbiór jest nieograniczony w metryce hiperbolicznej i nie stosuje się tutaj ogólna teoria porównywalności stosowana do przypadku operatorów mocno eliptycznych [17]. Korzystając jednak z reprezentacji hiperbolicznego ruchu Browna z dryfem na  $\mathbb{H}^n$  przy pomocy geometrycznego ruchu Browna i podporządkowanego procesu Wienera kowymiaru 1 oraz wykorzystując reprezentację Lampertiego, sprowadzamy całe zagadnienie do przypadku badania procesu Bessela rozważanego do pierwszego momentu trafienia w zadany poziom  $a > 0$ . Tym samym wyniki z pracy [H3], czyli dokładne obustronne oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu Bessela zabitego w momencie  $T_a$  pozwalają wyprowadzić analogiczne, dokładne oszacowania na funkcję Greena w przypadku hiperbolicznym, co jest głównym wynikiem omawianej pracy. Znając oszacowania funkcji Greena z dryfem wyznaczamy analogiczne wyniki dla  $\lambda$ -funkcji Greena.

### 5.3 Analiza spektralna procesów skokowych

Prace [P2], [P4], [P9] oraz [P14] poświęcone są analizie spektrum operatorów związanych z generatorami jednowymiarowych procesów skokowych. Badania te z jednej strony mają swój wkład w rozwój teorii operatorów nielokalnych na prostej, z drugiej zaś strony znajomość własności spektralnych półgrupy procesu pozwala w lepszy sposób zrozumieć jego zachowanie i własności. Tematyka ta była intensywnie rozwijana w ostatnich latach m.in. przez R. Bañuelos, Z.Q. Chena, R.D. DeBlassie, T. Kulczyckiego, R. Songa w kontekście procesów  $\alpha$ -stabilnych i procesów pokrewnych.

W pracy [P2] badamy proces Cauchy'ego na półprostej wykorzystując związki między jego generatorem, tj. ułamkowym laplasjanem ( $\alpha = 1/2$ ) a operatorem Dirichleta-Neumanna dla dwuwymiarowego operatora Laplace'a na górnej półpłaszczyźnie. Tłumacząc problem jednowymiarowy dla procesu skokowego na odpowiadające mu zagadnienie dla dwuwymiarowego procesu Wienera (z odpowiednimi warunkami brzegowymi) wyprowadzamy wzory na uogólnione funkcje własne na półprostej dla ułamkowego laplasjanu. Następnie wykorzystujemy otrzymane formuły do przybliżania wartości i funkcji własnych na odcinku  $(-1, 1)$ . W szczególności pokazujemy, że wszystkie wartości własne są pojedyncze i wyznaczamy ich asymptotykę w nieskończoności. Wyprowadzamy także oszacowania dolne i górne na wartości własne na odcinku stosując metody Rayleigh-Ritza oraz przybliżenia bazujące na wielomianach Legendre'a, które następnie posłużyły do obliczeń numerycznych.

Praca [P4] jest także poświęcona operatorowi  $-\sqrt{-\frac{d^2}{dx^2}}$  jednak tym razem zamiast zabijania przy wyjściu ze zbioru (półprostej, czy też odcinka) rozważamy zabijanie z czasem, po przez dodanie potencjału Schrödingera postaci  $x^2$ . Wtedy półgrupa generowana przez ten operator jest zwarta i posiada dyskretne



spektrum. Stosując transformatę Fouriera sprowadzamy zagadnienie wyznaczenia wartości i funkcji własnych do rozwiązania równania Airy'ego, co pozwala zidentyfikować wartości własne jako odpowiednie zera funkcji Airy'ego, zaś funkcje własne wyrazić jako całki z funkcji Airy'ego  $Ai(z)$ . W omawianej pracy, oprócz obliczeń numerycznych i bardzo dokładnych rozwinięć asymptotycznych, podajemy także asymptotykę śladu i oszacowania odstepu spektralnego, czyli różnicy między pierwszymi dwiema wartościami własnymi. Wyprowadzamy rozwinięcia asymptotyczne funkcji własnych w nieskończoności (dowolnie dokładne), ich rozwinięcia w szeregi Maclaurina oraz dowodzimy ich jednostajnej ograniczoności. Dowodzimy następnie, że każda funkcja własna ma skończoną liczbę zer, pierwsza funkcja własna maleje na  $[0, \infty)$  i jest wklęsła na pewnym otoczeniu zera oraz wypukła dla dostatecznie dużych argumentów. Kończymy pracę analizą własności gęstości prawdopodobieństw przejścia  $p(t, x, y)$  rozważanego procesu pokazując jego ciągłość na  $[0, \infty) \times \mathbf{R}^2$  oraz podając dokładne obustronne oszacowania w przypadku dużych czasów  $t > 1$ .

Prace [P9] i [P14] stanowią kontynuację badań zapoczątkowanych w [P2] i rozwijanych dalej w pracy [49] dotyczących aproksymacji funkcji własnych na odcinku przy pomocy uogólnionych funkcji własnych na półprostej wyprowadzonych w [48]. Metoda ta pozwala na uzyskanie asymptotyki wartości własnych  $\lambda_n$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . W pracy [P9] rozważamy szczególny przypadek operatora Kleina-Gordona (8) (quasi-relatywistycznego Hamiltonianu), który ma ważne zastosowania fizyczne. W szczególności zagadnienie wyznaczenia wartości własnych dla odcinka  $(-a, a)$  tłumaczy się na wyznaczenie poziomów energetycznych dla quasi-relatywistycznej cząstki umieszczonej w studni potencjału. Pokazujemy, że w tym przypadku wszystkie poziomy energetyczne  $E_n$  są niezdegenerowane (wartości własne są pojedyncze) zaś  $E_n$  zachowuje się w nieskończoności jak  $(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8})\frac{hc}{a} + O(1/n)$  (przy założeniu  $m = 1$ ). Dodatkowo podajemy oszacowania, które pozwalają mieć kontrolę nad składnikiem mniejszego rzędu kosztem transparentności głównego składnika rozwinięcia lub jego dokładności. Pracę kończy twierdzenie o jednostajnej ograniczoności rozważanych funkcji własnych. Praca [P14] jest uogólnieniem tych wyników na operatory postaci  $\psi(-\Delta)$ , gdzie  $\psi$  jest zupełną funkcją Bernsteina taką, że  $\xi\psi(\xi)$  zbiega do nieskończoności, gdy  $\xi \rightarrow \infty$ . Z probabilistycznego punktu widzenia rozważamy subordynowane ruchy Browna o subordynatorze, którego wykładnik Laplace'a jest zadany przez funkcję  $\psi(\xi)$ . Dowodzimy, że wartości własne dla  $\psi(-\Delta)$  na odcinku  $(-1, 1)$  spełniają  $\lambda_n = \psi(\mu_n) + O(1/n)$ , gdzie ciąg  $\mu_n$  zadany jest przez pewne równanie funkcyjne, które pozwala na wyznaczenie asymptotyki  $\mu_n$  w nieskończoności. W związku z dużo większą ogólnością rozważanego zagadnienia podany zapis nie jest tak dokładny jak to miało miejsce uprzednio, jednak kontrola nad stałymi w oszacowaniach wydaje się nieosiągalna przy tak dużej ogólności rozważanej funkcji  $\psi(\xi)$ .

#### 5.4 Rozkłady supremum dla procesów Lévy'ego

W pracach [P7], [P8], [P11] rozważamy jednowymiarowy proces Lévy'ego  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , czyli proces stochastyczny o niezależnych i stacjonarnych przyrostach, trajektoriach typu càdlàg., który startuje z zera. Przez  $\Psi(\xi)$  oznaczamy jego wykładnik Lévy'ego-Chinczyna, tzn.

$$\mathbf{E}[\exp(i\xi X_t)] = e^{-t\Psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Jednym z kluczowych obiektów badań teorii fluktuacji procesów Lévy'ego jest proces supremum  $\overline{X}_t = \sup\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ . Proces supremum rośnie tylko w momentach pierwszego przejścia ponad zadany poziom  $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$ , zaś zbiór  $t(\tau_a, X_{\tau_a}) : a \geq 0$  ma tzw. *regenerative property*. Dlatego też, pokrywa się on z obrazem pewnego dwuwymiarowego procesu Lévy'ego o rosnących współrzędnych (dzwuwymiarowego subordynatora), który nazywamy procesem drabinowym. Jego wykładnik Laplace'a oznaczamy przez  $\kappa(t, z)$ , gdzie pierwsza współrzędna odnosi się do czasów drabinowych, zaś druga do procesu wysokości drabinowych. Oznaczmy dodatkowo przez  $h(x)$  rosnącą funkcję harmoniczną na  $(0, \infty)$ , która z drugiej strony jest funkcją odnowy procesu wysokości drabinowych. Pomimo ogromnego znaczenia

teoretycznego, licznych zastosowań praktycznych (m.in. teoria ryzyka, czy teoria kolejek) oraz imponującej literatury związanej z badaniem własności funkcjonału supremum, dokładne wzory na rozkład  $\overline{X}_t$ , czy też opis przy pomocy oszacowań był do tej pory znany tylko w kilku szczególnych przypadkach. G. Baxter i M.D. Donsker [2] wyznaczyli podwójną (po zmiennej przestrzennej i czasowej) transformatę Laplace'a  $\overline{X}_t$ , jednak jej odwrócenie jest bardzo trudnym zadaniem. Świadczy o tym fakt, że jawne wzory na rozkład supremum znane są tylko w przypadku procesu Wienera (konsekwencja zasady odbicia), symetrycznego procesu Cauchy'ego [18], złożonego proces Poissona z  $\Psi(\xi) = 1 - \cos \xi$  [2] oraz procesu Poissona z dryfem [61]. Następne wyniki w tym duchu zostały opublikowane dopiero pięćdziesiąt lat później przez A. Kuznetsova [47] i dotyczą szeregowych reprezentacji rozkładu supremum dla procesów stabilnych. Wyniki omawianych prac [P7], [P8], [P11] mogą być traktowane jako kontynuacja klasycznych już badań z lat pięćdziesiątych ubiegłego stulecia i motywowane były chęcią podania opisu funkcjonału supremum dla możliwie najszerszej klasy procesów Levy'ego.

W pracy [P7] badamy własności dystrybuanty procesu supremum  $\mathbf{P}(\overline{X}_t < x)$ . Przy bardzo ogólnych założeniach pokazujemy oszacowania w pełnym zakresie parametrów postaci

$$\mathbf{P}(\overline{X}_t < x) \approx \min\{1, h(x)\kappa(1/t, 0)\}, \quad x, t > 0.$$

W przypadku procesów symetrycznych, przy pewnych (słabych) założeniach regularności funkcji  $\Psi(\xi)$  pokazujemy, że  $h(x) \approx 1/\sqrt{\Psi(1/x)}$ , co wobec  $\kappa(z, 0) = \sqrt{z}$  daje oszacowania badanej dystrybuanty w języku wykładnika Lévy'ego-Chinczyna procesu. Dodatkowo stałe występujące w oszacowaniach są absolutne (nie zależą od procesu). Ponadto, w przypadku symetrycznym, gdy  $\Psi(\xi)$  jest funkcją rosnącą, podajemy reprezentację całkową transformaty Laplace'a  $\overline{X}_t$ , czyli odwracamy formułę Baxtera-Donskera względem zmiennej czasowej. Wyprowadzamy także wzory całkowite na  $h(x)$  oraz jej pochodną  $h'(x)$  w szczególnym przypadku, gdy  $\Psi(\xi)$  wyraża się przez zupełne funkcje Bernsteina.

Praca [P8] poświęcona jest pogłębionej analizie przypadku symetrycznego przy dodatkowym założeniu  $\Psi(\xi) = \psi(\xi^2)$ , gdzie  $\psi(\xi)$  jest zupełną funkcją Bernsteina. Oznacza to, że rozważany proces jest subordynowanym ruchem Browna, gdzie miara Lévy'ego subordynatora ma całkowicie monotoniczną gęstość. Łatwo zauważyć, że  $\mathbf{P}(\tau_x > t) = \mathbf{P}(\overline{X}_t < x)$ , gdzie  $\tau_x$  jest uprzednio zdefiniowanym pierwszym czasem przekroczenia poziomu  $x > 0$ . Tym samym wyniki pracy [P7] bezpośrednio tłumaczą się na analogicznie rezultaty dla  $\mathbf{P}(\tau_x > t)$ . W szczególności, korzystając z reprezentacji transformaty Laplace'a  $\overline{X}_t$  z [P7] wyznaczmy wzór na  $\mathbf{P}(\tau_x > t)$  (tym samym na  $\mathbf{P}(\overline{X}_t < x)$ ) w języku uogólnionych funkcji własnych  $F_\lambda(x)$  wyprowadzonych przez M. Kwaśnickiego [48] oraz podajemy analogiczne reprezentacje całkowite dla pochodnych  $d^n/dt^n \mathbf{P}(\tau_x > t)$ . Przy okazji uogólniamy wyniki wspomnianej pracy dowodząc tzw. hipotezy  $\pi/2$  (Lemma 3.1 w [P8]). Uważna analiza funkcji  $F_\lambda(x)$  pozwala na podanie dokładnych obustronnych oszacowań  $d^n/dt^n \mathbf{P}(\tau_x > t)$  dla dużych czasów  $t$  i małych  $x$  oraz wyznaczenie dokładnych asymptotyk dla  $t \rightarrow \infty$  oraz  $x \rightarrow 0^+$ .

Ostatnia z prac omawianego cyklu poświęcona jest zbadaniu własności gęstości procesu supremum  $f_t(x) = \mathbf{P}(\overline{X}_t \in dx)/dx$ ,  $x > 0$ . Jest ona naturalną kontynuacją pracy [P7] oraz badań L. Chaumont [13] dotyczących absolutnej ciągłości rozkładów różnych obiektów związanych z procesem supremum. W szczególności podano tam bardzo użyteczny wzór na  $f_t(x)$  w języku  $q_t(dx)$  miary wejścia wycieczek procesu odbitego w swoim supremum (infimum). Przy dość ogólnym założeniu o istnieniu ograniczonej gęstości prawdopodobieństw przejścia wyjściowego procesu, wykluczając złożone procesy Poissona i subordynatory, dowodzimy, że  $f_t(x)/h'(x)$  zbiega do  $n(t < \zeta) = \int_0^\infty q_t(dx)$  jednostajnie na  $[t_0, \infty)$  dla każdego ustalonego  $t_0 > 0$ . Przy dodatkowym założeniu regularnej zmienności wykładnika Laplace'a procesu czasu drabino-owego wyznaczamy asymptotykę  $f_t(x)$  dla  $t \rightarrow \infty$ . Dowodzimy też oszacowań  $f_t(x)$  dla małych  $x$  i dużych  $t$ , które stają się dokładne przy założeniu regularności  $\kappa(\alpha, 0)$ . Pokazujemy ponadto, że ciągłość  $f_t(x)$  dla pewnego punktu  $x > 0$  jest równoważna ciągłości w każdym punkcie i jednocześnie ciągłości funkcji  $h'(x)$  w

tym punkcie. Otrzymane wyniki stosujemy do zbadania własności procesów warunkowanych do pozostania dodatnimi i ich meandrów.

#### 5.4 Bezkolizyjne układy cząstek

Omówimy teraz wyniki prac [P6] i [P10], które dotyczą badania własności rozwiązań układów stochastycznych równań różniczkowych opisujących bezkolizyjne układy cząstek oraz odpowiadających im równań macierzowych. Naturalnym krokiem w rozwoju teorii procesów Bessela jest próba znalezienia ich macierzowych odpowiedników. W tym celu rozważmy macierz brownowską  $N_t$  wymiaru  $p \times n$  dla  $n = 1, 2, \dots$  (jest to proces macierzowy, którego komórki są niezależnymi ruchami Browna). Połóżmy  $X_t = N_t^T N_t$  i zauważmy, że jest to uogólnienie kwadratowej konstrukcji kwadratowych procesów Bessela, od której zaczęliśmy nasze rozważania we Wstępie do niniejszego autoreferatu. Także tutaj można pokazać, że tak skonstruowany proces o wartościach w  $S_p$  (przestrzeń symetrycznych macierzy  $p \times p$ ) spełnia następujące macierzowe stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = \sqrt{|X_t|}dW_t + dW_t^T \sqrt{|X_t|} + \alpha Idt, \quad X_0 = x_0, \quad (29)$$

z  $\alpha = n$ , gdzie  $W = (W_t)$  jest macierzą brownowską wymiaru  $p \times p$ . Równanie macierzowe (29) zostało zaproponowane przez Bru [7, 8, 9], która pokazała m.in. że dla  $x_0 \in \overline{S_p^+}$  (macierze nieujemnie określone) oraz  $\alpha > p - 1$  istnieje jedyne słabe rozwiązanie równania (29). Dodatkowo, dla  $x_0 \in S_p^+$  i  $\alpha \geq p + 1$  mamy istnienie i jednoznaczność mocnego rozwiązania. Ponadto, rozwiązania startujące z  $x_0 \in \overline{S_p^+}$  dla  $\alpha > p - 1$  pozostają w tym zbiorze. W tych przypadkach rozwiązania powyższego równania nazywamy *macierzowymi kwadratowymi procesami Bessela* lub *procesami Wisharta*. Brak dowodu trajektoryjnej jedyności rozwiązań (29) wynika z braku wielowymiarowego (macierzowego) odpowiednika twierdzenia Yamady-Watanabe. Brak zatem narzędzia, które gwarantowałoby jedynność mocnych rozwiązań także w przypadkach, gdy rozwiązanie "dotyka" brzegu  $S_p^+$ , tzn. gdy najmniejsza z wartości własnych się zeruje (tzn. dla  $\alpha \in (p - 1, p + 1)$ ). Próba uzupełnienia tej luki w teorii zapoczątkowała omawiany cykl prac.

Okazuje się, że w badaniu własności rozwiązań  $X_t$  równania (29) kluczową rolę odgrywa proces  $\Lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t))$ , będący procesem uporządkowanych w sposób rosnący wartości własnymi  $X_t$ . Dla  $x_0 \in \overline{S_p^+}$  (zbiór symetrycznych macierzy posiadających różne wartości własne) jest on opisany przy pomocy następującego układu stochastycznych równań różniczkowych

$$d\lambda_i = 2\sqrt{|\lambda_i|}dB_i + \left( \alpha + \sum_{j \neq i} \frac{|\lambda_i| + |\lambda_j|}{\lambda_i - \lambda_j} \right) dt, \quad i = 1, \dots, p.$$

Zwróćmy uwagę na podobieństwo powyższych równań do (1) oraz na występujące w części dryfowej dodatkowe wyrażenia odpowiadające siłom odpychania pochodzącym od interakcji pomiędzy wartościami własnymi. Zainteresowanie takimi równaniami oraz ich uogólnieniami wiąże się nie tylko z przedstawionymi związkami z procesami macierzowymi [23], [24], [46], ale także, a może przede wszystkim, z ich szerokimi zastosowaniami w modelach fizyki matematycznej i fizyki statystycznej [40], [41], [42], [43].

W pracy [P6] rozważamy uogólnienia równania (29) postaci

$$dX_t = g(X_t)dW_t h(X_t) + h(X_t)dW_t^T g(X_t) + b(X_t)dt, \quad X_0 = x_0,$$

gdzie funkcje  $g, h, b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  występujące w równaniu działają spektralnie na  $S_p$ . W pierwszej kolejności wyprowadzamy układy stochastycznych równań różniczkowych opisujących wartości własne i wektory

własne rozwiązania powyższego równania zarówno w przypadku rzeczywistym, jak i zespolonym. Przy założeniu, że startujemy z  $x_0 \in \tilde{S}_p$ , otrzymane równania na wartości własne są postaci

$$d\lambda_i = 2g(\lambda_i)h(\lambda_i)dv_i + \beta \left( b(\lambda_i) + \sum_{j \neq i} \frac{G(\lambda_i, \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right) dt, \quad i = 1, \dots, p. \quad (30)$$

dla  $\beta = 1$  (przypadek rzeczywisty) i  $\beta = 2$  (przypadek zespolony). Tutaj  $G(x, y) = g^2(x)h^2(y) + g^2(y)h^2(x)$ . Potrzeba rozważania całego zakresu parametrów  $\beta$  w równaniach (30) wiąże się z ich zastosowaniami w fizyce statystycznej. Stanowią one bowiem statystyczne modele mechaniczne tzw. "log-gazów", zob. [28]. Następnie dowodzimy pewnej wielowymiarowej wersji twierdzenia Yamady-Watanabe, która pozwala pokazać, że dla równań na wartości i wektory własne zachodzi jedyność po trajektoriach i w efekcie mają jedyne mocne rozwiązanie do momentu pierwszej kolizji pomiędzy wartościami własnymi. Podajemy także warunki konieczne, aby nie dochodziło do kolizji pomiędzy poszczególnymi  $\lambda_i$  w skończonym czasie. Udowodniona jedyność rozwiązań wartości i wektorów własnych nie implikuje oczywiście jedyności rozwiązań odpowiadających im równań macierzowych, ale podkreśla zalety opisu rozwiązań równań (30) przy pomocy procesów wartości i wektorów własnych.

Kluczowym założeniem w rozważaniach z pracy [P6] było założenie startu naszych procesów z punktów nieposiadających kolizji (wszystkie wartości własne macierzy  $X_0$  są różne). Niestety, z punktu widzenia zastosowań, bardzo istotnym przypadkiem jest start procesu wartości własnych (cząstek) z jednego punktu. Na przykład rozważając najprostszyp przypadk ruchu Browna w  $S_p$ , najbardziej naturalnym jest rozważanie go przy starcie z zera, czyli przypadku, gdy  $\lambda_i(0) = 0$  dla każdego  $i = 1, \dots, p$ . Analogicznie, w przypadku zastosowań bezkolizyjnych kwadratowych cząstek Bessela w modelach fizyki matematycznej, kluczowym przypadkiem jest start wszystkich cząstek z zera. Temu zagadnieniu poświęcona jest praca [P10], w której badamy istnienie, jednoznaczność oraz zachowanie układów cząstek opisanych następującym układem stochastycznych równań różniczkowych

$$dx_i = \sigma_i(x_i)dB_i + \left( b_i(x_i) + \sum_{j \neq i} \frac{H_{ij}(x_i, x_j)}{x_i - x_j} \right) dt, \quad i = 1, \dots, p, \quad (31)$$

$$x_1(t) \leq x_2(t) \leq \dots \leq x_p(t), \quad t \geq 0. \quad (32)$$

Zauważmy, że układy takie są ogólniejsze od poprzednio rozważanych, funkcje opisujące część martyngałową oraz część dryfową mogą się zmieniać dla poszczególnych cząstek (zależą od  $i$  oraz  $j$ ). Dodatkowo nie wymagamy, aby w momencie startu cząstki były różne, tzn. dopuszczamy, aby  $x_i(0) = x_j(0)$  dla pewnych  $i \neq j$ . Zakładamy natomiast, że  $H_{ij}(x, y) = H_{ji}(y, x)$ , co implikuje, że każde dwie cząstki odpychają się z tą samą siłą. Kluczowym pomysłem na badanie tego rodzaju równań jest ich analiza przy pomocy wielomianów symetrycznych od  $(x_1, \dots, x_p)$ . Okazuje się bowiem, że w związku z założoną symetrią  $H$ , w równaniach opisujących wielomiany symetryczne nie pojawiają się wyrażenia typu  $(x_i - x_j)^{-1}$ , które stanowią problem w momentach kolizji. Wyprowadzamy równania na wielomiany symetryczne i przy ich użyciu pokazujemy, że przy odpowiednich założeniach na współczynniki, cząstki natychmiast się rozklejają (jeżeli startowały z punktów sklejonych) i nigdy więcej nie zderzają. Pozwala to skonstruować rozwiązania równań (31) i pokazać trajektoryjną jedyność rozwiązań (odpowiednik tw. Yamady-Watanabe). Wprowadzone przez nas założenia i wymagania odnośnie współczynników w większości posiadają swoje heurystyczne (fizyczne) uzasadnienie lub są motywowane konkretnymi przykładami. Stworzoną w ten sposób teorię stosujemy do wielu klasycznych przykładów układów cząstek, które mają swoje teoretyczne i praktyczne zastosowania.

## Literatura

- [1] L. Aili, J-C. Gruet, *An explanation of generalized Bougerols identity in terms of hyperbolic Brownian motion*, A collection of research papers. Edited by M. Yor. Biblioteca de la Revista Matematica Iberoamericana, Madrid, 1997.
- [2] G. Baxter, M. D. Donsker, *On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments*, Trans. Amer. Math. Soc. 85, 73–87 (1957).
- [3] P. Baldi, E. Casadio Tarabusi, A. Figá-Talamanca, *Stable laws arising from hitting distributions of processes on homogeneous trees and the hyperbolic half-plane*, Pacific J. Math. 197, 257–273 (2001).
- [4] P. Baldi, E. Casadio Tarabusi, A. Figá-Talamanca, M. Yor, *Non-symmetric hitting distributions on the hyperbolic half-plane and subordinated perpetuities*, Rev. Mat. Iberoam. 17, 587–605 (2001).
- [5] R. Bhattacharya, E. Thomann, E. Waymire, *A note on the distribution of integrals of geometric Brownian motion*, Statist. Probab. Lett. 55, no. 2, 187–192 (2001).
- [6] A. N. Borodin, P. Salminen *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae, 2nd edition*, Birkhauser Verlag, Basel 2002.
- [7] M. F. Bru, *Diffusions of perturbed principal component analysis*, J. Multivariate Anal. 29 (1), 127–136 (1989).
- [8] M. F. Bru, *Processus de Wishart*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 308 (1), 29–32 (1989).
- [9] M. F. Bru, *Wishart processes*, J. Theor. Probab. 4, 725–751 (1991).
- [10] T. Byczkowski, P. Graczyk, A. Stos, *Poisson kernels of half-spaces in real hyperbolic spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana 23(1), 85–126 (2007).
- [11] T. Byczkowski, M. Ryznar, *Hitting distribution of geometric Brownian motion*, Stud. Math. 173 (1), 19–38 (2006).
- [12] L. Cafarelli, L. Silvestre, *An extension problem related to fractional Laplacian*, Comm. Part. Diff. Eq. 32, 1245–1260 (2007).
- [13] L. Chaumont, *On the law of the supremum of Lévy processes*, Ann. Probab., Vol. 41, No. 3A, 1191–1217 (2013).
- [14] Z. Ciesielski, S.J. Taylor. *First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path*, Trans. Amer. Math. Soc. 103, 434–450 (1962).
- [15] A. Comtet, C. Monthus, *Diffusion in one-dimensional random medium and hyperbolic Brownian motion*, J. Phys. A. 29, 1331–1345 (1996).
- [16] A. Comtet, C. Monthus, M. Yor, *Exponential functionals of Brownian motion and disordered systems*, J. Appl. Prob. 35, 255–271 (1998).
- [17] M. Cranston, Z. Zhao, *Conditional transformation of drift formula and potential theory for  $\frac{1}{2}\Delta + b(\cdot) \cdot \nabla$* , Commun. Math. Phys. 112, 613–625 (1987).

- [18] D. A. Darling, *The maximum of sums of stable random variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 83, 164–169 (1956).
- [19] E. B. Davies, *The equivalence of certain heat kernel and Green function bounds*, J. Funct. Anal., 71, 88–103 (1987).
- [20] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*. (Cambridge Tracts in Mathematics), volume 92. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [21] E. B. Davies, *Intrinsic ultracontractivity and the Dirichlet Laplacian*, J. Funct. Anal., 100, 162–180 (1991).
- [22] E. B. Davies, B. Simon. *Ultracontractivity and heat kernels for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians*. J. Funct. Anal., 59 (1984), 335–395.
- [23] N. Demni, *The Laguerre process and generalized Hartman-Watson law*, Bernoulli 13 (2) (2007), 556–580.
- [24] C. Donati-Martin, Y. Doumerc, H. Matsumoto, M. Yor, *Some properties of the Wishart processes and a matrix extension of the Hartman-Watson laws*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 40 (4), 1385–1412 (2004).
- [25] D. Dufresne, *The integral of geometric Brownian motion*, Adv. Appl. Prob., 33, 223–241 (2001).
- [26] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom I, II, PWN, Warszawa 1977.
- [27] J. Fourier, *The Theory Analytique de la Chaleur*, Paris, 1822.
- [28] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*. London Mathematical Society Monographs Series Vol. 34 (Princeton University, Princeton, NJ, 2010).
- [29] H. Geman, M. Yor, *Bessel processes, Asian options and perpetuities*, Math. Finance 3, 349–375 (1993).
- [30] R.K. Gettoor, M.J. Sharpe, *Excursions of Brownian motion and Bessel processes*, Z. Warhs. Verw. Geb. 47, 83–106 (1979).
- [31] A. Going-Jaesche, M. Yor *Survey and some generalizations of Bessel processes*, Bernoulli 9, 313–350 (2003).
- [32] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste, *Hitting probabilities for Brownian motion on Riemannian manifolds*, J. Math. Pure Appl. 81, 115–142 (2002).
- [33] J. -C. Gruet, *Semi-groupe du mouvement Brownien hyperbolique*, Stochastics Stochastic Rep., 56, 53–61 (1996).
- [34] Y. Hamana, H. Matsumoto, *The probability densities of the first hitting times of Bessel processes*, Journal of Math-for-Industry 4B, 91–95 (2012).
- [35] Y. Hamana, H. Matsumoto, *The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 365, 5237–5257 (2013).

- [36] Y. Hamana, H. Matsumoto, *Asymptotics of the probability distributions of the first hitting time of Bessel processes*, Electron. Commun. Probab. 19–5, 1-5 (2013).
- [37] M. E. Ismail, *Bessel Functions and the infinite divisibility of the Student  $t$ -distribution*, Ann. Prob. 5, 582–585 (1977).
- [38] M. E. Ismail, *Integral representations and complete monotonicity of various quotients of Bessel functions*, Canadian J. Math. XXIX, 1198–1207 (1977).
- [39] M. E. Ismail, D. H. Kelker, *Special functions, Stiltjes transforms and infinite divisibility*, Siam J. Math. Anal. 10, 884–901 (1976).
- [40] M. Katori, H. Tanemura, *Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems*, J. Math. Phys. 45 (8), 3058–3085 (2004).
- [41] M. Katori, H. Tanemura, *Nonintersecting paths, noncolliding diffusion processes and representation theory*. RIMS Kokyuroku 1438, 83–102 (2005).
- [42] M. Katori, H. Tanemura, *Noncolliding processes, matrix-valued processes and determinantal processes*, Sugaku Expo. 24 (2), 263–289 (2011).
- [43] M. Katori, H. Tanemura, *Noncolliding squared Bessel processes*, J. Stat. Phys. 142, 592–615 (2011).
- [44] J. Kent, *Some probabilistic properties of Bessel functions*, Ann. Prob. 6, 760–770 (1978).
- [45] F.B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. 107, 56–86 (1963).
- [46] W. König, N. O’Connell, *Eigenvalues of the Laguerre process as non-colliding squared Bessel processes*, Electron. Commun. Probab. 6, 107–114 (2001).
- [47] A. Kuznetsov, *On extrema of stable processes*, Ann. Probab. 39, 1027–1060 (2011).
- [48] M. Kwaśnicki, *Spectral analysis of subordinate Brownian motions in half-line*, Studia Math. 206 (3), 211–271 (2011).
- [49] M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the interval*, J. Funct. Anal. 262 (5): 2379–2402 (2012).
- [50] A. Laforgia, *Bounds for modified Bessel functions*, J. Comput. Appl. Math., 34, 263–267 (1991).
- [51] J. Lamperti, *Semi-stable Markov processes I*, Z. Wahrs. Verw. Geb. 22, 205–225 (1972).
- [52] H. Matsumoto, M. Yor, *On Dufresne’s relation between the probability laws of exponential functionals of Brownian motions with different drifts*, J. Appl. Prob. 35, 184–206 (2003).
- [53] H. Matsumoto, M. Yor *Exponential functionals of Brownian motion, I: Probability laws at fixed time*, Probability Surveys 2: 312–347 (2005).
- [54] H. Matsumoto, M. Yor *Exponential functionals of Brownian motion, I: Some related diffusion processes*, Probability Surveys 2: 348–384 (2005).
- [55] H.P. McKean *The Bessel motion and a singular integral equation*, Mem. Sci. Univ. Kyoto, Ser A, Math. 33, 317–322 (1960).

- [56] S.A. Molchanov, E. Ostrowski *Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes*, Theory Probab. Appl. 12, 128–131 (1969).
- [57] R. J. Muirhead, *Aspects of multivariate statistical theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley, New York, 1982.
- [58] A. Nowak, L. Roncal. *On sharp heat and subordinated kernel estimates in the Fourier-Bessel setting*, Rocky Mountain J. Math. 44, 1321–1342 (2014).
- [59] A. Nowak, L. Roncal. *Sharp heat kernel estimates in the Fourier-Bessel setting for a continuous range of the type parameter*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 30, 437–444 (2014).
- [60] J. Pitman and M. Yor, *Bessel processes and infinitely divisible laws*. In Stochastic Integrals, vol. 851 of Lecture Notes in Mathematics 285-370. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980.
- [61] R. Pyke, *The supremum and infimum of the Poisson process*, Ann. Math. Statist. 30, 568–576 (1959).
- [62] D.B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process*, Ill. J. Math. 7, 615–630 (1963).
- [63] D. Revuz, M. Yor *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, New York 1999.
- [64] L. Riahi, *Dirichlet Green functions for parabolic operators with singular lower-order terms*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 8 (2), Article 36 (2007).
- [65] L. Saloff-Coste. *The heat kernel and its estimates*, Adv. Stud. Pure Math., 57, 405–436 (2010).
- [66] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series 30, Princeton, NJ, 1970.
- [67] D. Williams, *Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I*, Proc. London Math. Soc. 28 (3), 738–768 (1974).
- [68] T. Yamada, S. Watanabe *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. 11: 155–167 (1971)
- [69] M. Yor, *Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel*. (French) [On some exponential functionals of real Brownian motion], J. Appl. Probab. 29 (1), 202–208 (1992).
- [70] M. Yor, *Exponential functionals of Brownian motion and related processes*, Springer, 2001.
- [71] Q. S. Zhang, *The boundary behavior of heat kernels of Dirichlet Laplacians*, J. Differential Equations, 182, 416–430 (2002).
- [72] T. Žak, *Poisson kernel and Green function of balls for complex hyperbolic Brownian motion*, Studia Math. 183, 161–193 (2007).

Yacine Mandri