Autoreferat

1. Imię i nazwisko:

Tomasz Grzywny

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe - z podaniem nazwy miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

2005 dyplom magistra matematyki,
Instytut Matematyki i Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska,
praca magisterska *Teoria potencjału α-stabilnego procesu relatywistycznego* napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Michała Ryznara.

2008 dyplom doktora nauk matematycznych,
Instytut Matematyki i Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska,
rozprawa doktorska *Teoria potencjału procesów relatywistycznych* napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Michała Ryznara.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2008 – 2010	asystent w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej
2010 – 2014	adiunkt w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej
2012 – 2013	staż podoktorski na Technische Universität Dresden, Niemcy
2013 – 2013	staż podoktorski na Universität Bielefeld, Niemcy
2014* – 2015	adiunkt w Katedrze Matematyki Wydziału PPT Politechniki Wrocławskiej
2015* – obecnie	adiunkt na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej

* - zmiany miejsca zatrudnienia wynikały ze zmian organizacyjnych na Uczelni, tzn. przekształcenia Instytutu Matematyki i Informatyki w Katedrę Matematyki na Wydziale PPT, a następnie utworzenie Wydziału Matematyki.

4. Wskazanie osiągnięcia uzyskanego zgodnie z art. 16. ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

(a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Teoria potencjału izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego

(b) Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

[H1] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar. *Heat kernel estimates for the fractional Laplacian with Dirichlet conditions*, Annals of Probability 38(5), 1901–1923 (2010).

[H2] T. Grzywny. *On Harnack Inequality and Hölder Regularity for Isotropic Unimodal Lévy Processes*, Potential Analysis 41(1), 1–29 (2014).

[H3] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar. *Density and tails of unimodal convolution semigroups*, Journal of Functional Analysis 266(6), 3543–3571 (2014).

[H4] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar. *Dirichlet heat kernel for unimodal Lévy processes*, Stochastic Processes and their Applications 124(11), 3612–3650 (2014).

[H5] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar. *Barriers, exit time and survival probability for unimodal Lévy processes*, Probability Theory and Related Fields 162, 155–198 (2015).

(c) Omówienie celu wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

I. Wstęp

Procesy Lévy'ego stanowią ważną podklasę procesów Markowa. Są one naturalnym uogólnieniem spacerów losowych do procesów z ciągłym parametrem czasowym. Najbardziej znanymi przykładami procesów Lévy'ego są proces Poissona, proces Wienera (ruch Browna), proces Cauchy'ego i izotropowe stabilne procesy Lévy'ego. Procesy Lévy'ego stanowią klasę „testową" dla teorii procesów Marowa, to znaczy, że można na ich przykładzie sprawdzać własności i stawiać hipotezy dla ogólnych procesów Markowa. Pomimo stosunkowo prostej struktury procesów Lévy'ego (ich prawdopodobieństwo przejścia jest niezmiennicze na translacje), badaniem procesów Lévy'ego pod różnymi kątami zajmuje się wielu znakomitych naukowców. Ponadto coraz powszechniej procesy te są wykorzystywane do modelowania zjawisk fizycznych, chemicznych oraz ekonomicznych ([2, 21, 38, 11, 47, 33, 36]).

Głównym celem prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego było uzyskanie ostrych oszacowań gęstości przejścia dla procesów wolnych oraz zabitych po wyjściu ze zbioru, to znaczy jądra ciepła dla generatora z warunkiem Dirichleta. Prawdopodobieństwo przejścia procesu Lévy'ego definiuje naturalną półgrupę operatorów i jej generator na różnych przestrzeniach funkcyjnych. Jawna postać prawdopodobieństwa przejścia jest bardzo rzadkim zjawiskiem, dlatego znajomość ostrych oszacowań i asymptotycznego zachowania jest kluczowa. W przypadku izotropowego procesu α-stabilnego jawna postać gęstości przejścia dana jest tylko dla ruchu Browna ($\alpha = 2$) oraz dla procesu Cauchy'ego ($\alpha = 1$), natomiast oszacowania gęstości przejścia procesów stabilnych są dobrze znane. Zostały one uzyskane w przypadku prostej rzeczywistej przez Pólya [51] w 1923 roku, a następnie uogólnione na przypadek wielowymiarowy przez Blumenthala i Getoora [9]. W ostatnich latach nastąpił znaczący postęp w badaniach dotyczących gęstości przejścia (jądra ciepła) dla procesów Markowa, w tym dla procesów Lévy'ego. Wśród osób mających wkład w ten rozwój są Barlow, Bass, Bogdan, Burdzy, Chen, Song, Grigor'yan, Jakob, Kim, Knopova, Kulik, Kumagai, Saloff-Coste, Schilling, Sztonyk, Vondraček ([3, 29, 19, 13, 14, 41, 35, 43, 30, 31, 32, 5, 4, 10, 42, 37, 59, 58]).

Przedstawione osiągnięcie naukowe dotyczy izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego. Ich własności zostały zbadane metodami probabilistycznej teorii potencjału. W pracy [H1] zbadaliśmy izotropowy proces α-stabilny na dość ogólnych zbiorach κ-pulchnych, otrzymując ostre obustronne oszacowania gęstości przejścia procesu zabitego. Należy dodać, że oszacowania przy tej ogólności nie są zbyt jawne. Całkowicie jawne oszacowania zostały uzyskane dla zbiorów o regularnym brzegu klasy $C^{1,1}$, zarówno ograniczonych jak i nieograniczonych. Metody dowodowe z artykułu [H1] zostały następnie wykorzystane przez innych autorów do uzyskania oszacowań jądra ciepła dla kolejnych procesów z klasy podporządkowanych ruchów Browna, między innymi dla procesu relatywistycznego oraz sumy dwóch niezależnych procesów stabilnych o różnych wykładnikach [17, 16]. Te badania stały się dla nas motywacją do zunifikowania i rozszerzenia otrzymywanych oszacowań dla szerszej klasy procesów. Odpowiednią klasą, dla takiej unifikacji, okazały się procesy izotropowo-unimodalne, dla których uzyskaliśmy oszacowania gęstości miary potencjału i regularność funkcji harmonicznych względem omawianych procesów ([H2]), oszacowania gęstości przejścia procesu wolnego ([H3]), oszacowania średniego czasu pierwszego wyjścia ze zbioru oraz prawdopodobieństwo przeżycia ([H5]). Zwieńczeniem tych badań było uzyskanie oszacowań dla jąder ciepła z warunkiem Dirichleta dla szerokiej klasy zbiorów ograniczonych i nieograniczonych w artykule [H4].

Poniższe omówienie cyklu prac [H1]-[H5] zostało podzielone na rozdziały według problematyki, a nie według chronologii powstawania lub pochodzenie poszczególnych rezultatów.

- W Rozdziale I ustalimy definicje i oznaczenia stosowane w dalszej części rozprawy oraz omówimy podstawowe wyniki dotyczące procesów Lévy'ego.
- W Rozdziale II zaprezentujemy oszacowania jądra ciepła procesu wolnego.
- W Rozdziale III przedstawimy rezultaty dotyczące regularności funkcji harmonicznych oraz oszacowania funkcji Greena całej przestrzeni.
- Rozdział IV jest poświęcony zachowaniu oczekiwanego czasu pierwszego wyjścia procesu ze zbiorów oraz odpowiadającemu prawdopodobieństwu przeżycia procesu w zbiorze.
- Rozdział V dotyczy oszacowań jądra ciepła Dirichleta, które łączą i wykorzystują wyniki omawiane w poprzedzających rozdziałach.

Procesy Lévy'ego

Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie procesem Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}^d$, gdzie $d \in \mathbb{N}$, to znaczy procesem stochastycznym o niezależnych i stacjonarnych przyrostach, trajektoriach typu càdlàg i startującym z zera. Procesy te są scharakteryzowane przez wzór Lévy'ego-Chinczyna

$$\mathbb{E}e^{i\langle\xi,X_t\rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\xi,z\rangle} P_t(dz) = e^{-t\psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie ψ jest wykładniku charakterystycznym (symbolem)

$$\psi(\xi) = \langle\xi, A\xi\rangle - i\langle\xi,\gamma\rangle - \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle\xi,z\rangle} - 1 - i\langle\xi,z\rangle\mathbf{1}_{|z|<1}\right) N(dz), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

przy czym macierz $A = [A_{jk}]_{j,k=1,\dots,d}$ jest symetryczna i nieujemnie określona, $\gamma \in \mathbb{R}^d$, a N jest miarą Lévy'ego, to znaczy $N(\{0\}) = 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |z|^2)\, N(dz) < \infty$. Generator infinitezymalny półgrupy przejścia procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$,

$$P_t f(x) = \mathbb{E}f(X_t + x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

jest wtedy następującej postaci, dla $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{j,k} A_{jk}\partial^2_{jk} f(x) + \langle\gamma, \nabla f(x)\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(x+z) - f(x) - \mathbf{1}_{|z|<1}\langle z, \nabla f(x)\rangle\right) N(dz). \tag{2}$$

Dla procesu Lévy'ego rozważamy dwie funkcje, które okazują się bardzo przydatne przy jego opisie. Pierwsza z nich to niemalejąca majoranta części rzeczywistej symbolu:

$$\psi^*(r) = \sup_{|\xi|\leq r} \Re\psi(\xi), \quad r \geq 0.$$

Druga funkcja opisuje połączoną intensywność małych i dużych skoków procesu oraz części ciągłej:

$$h(r) = \frac{||A||}{r^2} + \int_{\mathbb{R}^d} \min\{1, |z/r|^2\} N(dz), \quad r > 0.$$

Funkcja h pojawia się między innymi u Pruitta [52], ale w przypadku jednowymiarowym występuje już w pracy Dupuis [24]. Okazuje się, że funkcje ψ^* oraz $r \mapsto h(1/r)$ są porównywalne, a stała porównywalności zależy tylko od wymiaru ([H2, Lemma 4])

$$\frac{1}{8(1+2d)} h(1/r) \leq \psi^*(r) \leq 2h(1/r), \quad r > 0. \tag{3}$$

Większość wyników rozprawy dotyczy izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego, które teraz zdefiniujemy. Borelowską miarę $\mu(dx)$ na $\mathbb{R}^d$ będziemy nazywać *izotropową*, jeżeli jest niezmiennicza na obroty przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Jeśli miara Lévy'ego procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest izotropowa, $A = \sigma^2 \mathrm{I_d}$ oraz $\gamma = 0$, to rozkład prawdopodobieństwa X_t jest też niezmienniczy na obroty, dla wszystkich $t \geq 0$. W takiej sytuacji proces będziemy nazywać *izotropowym*. Miara $\mu(dx)$ jest *izotropowo-unimodalna*, jeśli jest izotropowa, absolutnie ciągła na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, a jej gęstość jest funkcją radialną i radialnie nierosnącą. Należy zwrócić uwagę, że miara izotropowo-unimodalna może posiadać atom w 0. Proces Lévy'ego będziemy nazywać *procesem izotropowo-unimodalnym*, jeśli rozkład prawdopodobieństwa $P_t(dx)$ jest miarą izotropowo-unimodalną dla każdego $t > 0$. Wiadomo, że jest to równoważne temu, że miara Lévy'ego jest izotropowo-unimodalna, $A = \sigma^2 \mathrm{I_d}$ oraz $\gamma = 0$ w (1) ([62]). Gęstość rozkładu $P_t(dx)$ będziemy oznaczać przez $p_t(x)$. Wykładnik charakterystyczny dla procesów izotropowo-unimodalnych przyjmuje następującą formę:

$$\psi(\xi) = \sigma^2|\xi|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos\langle\xi, z\rangle)\nu(z)dz,$$

dla pewnej nieujemnej funkcji radialnej ν, której profil $\nu(r) = \nu((r,0,\dots,0))$, $r > 0$, jest funkcją nierosnącą ($N(dz) = \nu(z)dz$). Oczywiście $\int_{\mathbb{R}^d}(1 \wedge |z|^2)\nu(z)dz < \infty$. Rozkład procesu izotropowo-unimodalnego ma atom w 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest złożonym procesem Poissona. Jeżeli ψ jest nieograniczona (to jest $\sigma > 0$ lub $N(\mathbb{R}^d) = \infty$), to miary $P_t(dx)$ są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^d$.

Ważną klasą izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego są podporządkowane ruchy Browna. Niech $\{B_t\}_{t\geq 0}$ będzie ruchem Browna w $\mathbb{R}^d$ i niech $\{T_t\}_{t\geq 0}$ będzie niezależnym subordynatorem, czyli procesem Lévy'ego, którego trajektorie są funkcjami niemalejącymi. Wtedy proces $\{B_{T_t}\}_{t\geq 0}$ nazywamy *podporządkowanym ruchem Browna*. Ponieważ $T_t \geq 0$, więc do charakteryzacji tych procesów używa się transformaty Laplace'a. Mianowicie mamy

$$\mathbb{E}e^{-\lambda T_t} = e^{-t\varphi(\lambda)}, \quad \lambda \geq 0,$$

gdzie φ jest tak zwanym wykładnikiem Laplace'a, danym wzorem

$$\varphi(\lambda) = b\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda s})\mu(ds), \tag{4}$$

dla $b \geq 0$ oraz miary μ takiej, że $\int_0^\infty \frac{s}{1+s}\mu(ds) < \infty$. To oznacza, że φ jest tak zwaną funkcją Bernsteina taką, że $\varphi(0) = 0$. Następujące dwie podklasy funkcji Bernsteina są ważne w teorii potencjału procesów Lévy'ego. Mówimy, że funkcja Bernsteina φ jest *specjalną* funkcją Bernsteina, jeśli funkcja $\lambda \mapsto \lambda/\varphi(\lambda)$ jest też funkcją Bernsteina, a subordynator, którego wykładnik Laplace'a φ jest taką funkcją, nazywamy specjalnym. Jeśli φ' jest funkcją całkowicie monotoniczną, to φ nazywamy *zupełną* funkcją Bernsteina, a odpowiedni subordynator nazywamy zupełnym. Należy tutaj nadmienić, że zupełne funkcje Bernsteina stanowią podklasę specjalnych funkcji Bernsteina. Bardzo ważną własnością charakteryzującą subordynatory specjalne jest fakt, że miara potencjału $U(A) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_t \in A)dt$ jest absolutnie ciągła na $(0,\infty)$, a jej gęstość jest funkcją nierosnącą. Podstawowym źródłem informacji dotyczącym funkcji Bernsteina, a także podporządkowania procesów i półgrup jest monografia [54].

Gęstość miary Lévy'ego ruchu Browna, o gęstości rozkładu $g_t(x) = (4\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/(4t)}$, podporządkowanego przez subordynator T_t, o wykładniku Laplace'a postaci (4), dana jest wzorem

$$\nu(x) = \int_0^\infty (4\pi u)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4u}}\mu(du),$$

więc jest to funkcja radialna i radialnie nierosnąca. Wykładnik Lévy'ego-Chinczyna procesu $\{B_{T_t}\}_{t\geq 0}$ jest równy $\varphi(|\xi|^2)$, zatem w tym przypadku w (1) mamy $A = b\,\mathrm{I_d}$ i $\gamma = 0$, oraz $\{B_{T_t}\}_{t\geq 0}$ jest procesem izotropowo-unimodalnym. Najważniejszym przykładem subordynowanego ruchu Browna jest izotropowy proces α-stabilny, gdzie

$$\alpha \in (0,2], \quad \varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2} \quad \text{oraz} \quad \psi(\xi) = |\xi|^\alpha.$$

Bardzo istotą własnością procesów izotropowo-unimodalnych jest fakt, że ich wykładnik Lévy'ego-Chinczyna jest funkcją prawie monotoniczną. Mianowicie zachodzi następująca nierówność ([H3, Propositon 2] oraz [H2, Proposition 1]),

$$\psi(\xi) \geq \pi^{-2}\psi^*(|\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

W połączeniu z (3) otrzymujemy

$$\psi(\xi) \approx \psi^*(|\xi|) \approx h(1/|\xi|), \quad \xi \neq 0, \tag{5}$$

gdzie $f(x) \approx g(x)$, $x \in A$, oznacza, że istnieje stała (porównywalności) $C > 0$ taka, że

$$C^{-1}f(x) \leq g(x) \leq Cf(x), \quad x \in A.$$

Warunek Dirichleta (proces zabity)

Obecnie zdefiniujemy jądro ciepła Dirichleta oraz funkcję Greena. Niech D będzie niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$. Odległość punktu do dopełnienia zbioru D oznaczamy

$$\delta_D(x) = \mathrm{dist}(x, D^c), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Przez $\mathrm{diam}(D) = \sup\{|y - x| : x, y \in D\}$ oznaczamy średnicę zbioru D. Otwartą kulę w środku w $x \in \mathbb{R}^d$ i promieniu $r > 0$ oznaczamy przez $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\}$, a kulę ze środkiem w początku układu współrzędnych będziemy oznaczać przez $B_r = B(0,r)$. W artykułach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego rozważane są następujące klasy zbiorów otwartych.

Definicja 1. *Niech $D \subset \mathbb{R}^d$ będzie otwarty.*

- *Mówimy, że D spełnia* **warunek kuli wewnętrznej** *w skali r, jeśli $r > 0$ oraz dla każdego $Q \in \partial D$ istnieje kula $B(x',r) \subset D$ taka, że $Q \in \partial B(x',r)$.*
- *Zbiór D spełnia* **warunek kuli wewnętrznej** *w skali r, jeśli $r > 0$ oraz dla każdego $Q \in \partial D$ istnieje kula $B(x'',r) \subset D^c$ taka, że $Q \in \partial B(x'',r)$.*
- *Mówimy, że D jest* **klasy $C^{1,1}$ w skali** *r, jeśli D spełnia warunki kuli zewnętrznej i wewnętrznej w skali r.*
- *Niech $\kappa \in (0, 1/2]$ oraz $R \in (0,\infty]$. Zbiór D jest (κ, R)-***pulchny***, jeśli dla każdego $0 < r < R$ oraz $x \in D$ istnieje punkt $A_{x,r}$ taki, że $B(A_{x,r}, \kappa r) \subset D \cap B(x,r)$.*

Kule $B(x',r)$ i $B(x'',r)$ występujące w powyższej definicji nazywamy odpowiednio kulą wewnętrzną i zewnętrzną. Bardzo często oszacowania obiektów teorii potencjału dla zbiorów D klasy $C^{1,1}$ otrzymuje się wykorzystując inkluzję $B(x',r) \subset D \subset \overline{B(x'',r)}^c$ oraz oszacowania dla kuli i dopełnienia kuli. Łatwo zauważyć, że jeżeli D ma własność kuli wewnętrznej w skali R, to jest on $(1/2, R)$-pulchny, a półprzestrzeń i dopełnienie kuli są zbiorami $(1/2,\infty)$-pulchnymi. Ponadto zbiory lipschitzowskie są podklasą zbiorów pulchnych.

Głównym celem omawianego osiągnięcia naukowego było opisanie zachowania się procesu izotropowego-unimodalnego $\{X_t\}_{t\geq 0}$ zabijanego po wyjściu ze zbioru D. Będziemy używać standardowej notacji dla procesów Markowa: dla $x \in \mathbb{R}^d$ piszemy $\mathbb{E}^x$ oraz $\mathbb{P}^x$ dla wartości oczekiwanej i rozkładu procesu $\{x + X_t\}_{t\geq 0}$, to znaczy, że ([53, Chapter 8]),

$$\mathbb{E}^x f(\{X_t\}) = \mathbb{E} f(\{X_t + x\}).$$

Zdefiniujemy *czas pierwszego wyjścia* procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ze zbioru $D \subset \mathbb{R}^d$ jako

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}.$$

Analogicznie *czas pierwszego trafienia* w zbiór domknięty F definiujemy jako

$$T_F = \inf\{t > 0 : X_t \in F\},$$

zatem $\tau_D = T_{D^c}$.

Załóżmy, że proces Lévy'ego $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest symetryczny i jego rozkłady jednowymiarowe są absolutnie ciągłe. Będziemy używać zamiennie następującego zapisu $p_t(y-x) = p(t,x,y)$, gdzie p_t jest gęstością $P_t(dx)$. Wtedy gęstość prawdopodobieństwa przejścia procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *zabitego* po pierwszym opuszczeniu zbioru D jest zdefiniowana przez wzór Hunta: dla $x, y \in \mathbb{R}^d$ oraz $t > 0$ mamy,

$$p_D(t,x,y) = p(t,x,y) - \mathbb{E}^x\left[p(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y); \tau_D < t\right]. \tag{6}$$

Dla $A \subset D$ mamy

$$\mathbb{P}^x(X_t \in A, \tau_D > t) = \int_A p_D(t,x,y)dy.$$

Funkcję p_D nazywamy *jądrem ciepła Dirichleta* dla procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ (generatora $\mathcal{L}$) na zbiorze D, ponieważ jest ona rozwiązaniem fundamentalnym odpowiednika równania ciepła dla operatora $\mathcal{L}$ z warunkiem Dirichleta na zewnątrz zbioru. Mianowicie, zachodzi następująca równość

$$\int_s^\infty \int_D p_D(u-s,x,z)\left[\partial_u\phi(u,z) + \mathcal{L}_z\phi(u,z)\right] dzdu = -\phi(s,x),$$

dla $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times D)$, funkcji gładkich o zwartym nośniku w $\mathbb{R} \times D$, zobacz też (2).

Prawdopodobieństwo przeżycia procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ w zbiorze D dłużej niż czas $t > 0$ może być wyrażone przy pomocy p_D:

$$\mathbb{P}^x(\tau_D > t) = \int_{\mathbb{R}^d} p_D(t,x,y)dy, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{7}$$

Podobnie, *funkcja Greena* zbioru D dla procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest zdefiniowana jako

$$G_D(x,y) = \int_0^\infty p_D(t,x,y)dt, \qquad x, y \in Rd. \tag{8}$$

Zauważmy, że dla $D = \mathbb{R}^d$, mamy $p_D(t,x,y) = p(t,x,y)$. Podobnie funkcję Greena całej przestrzeni (gęstość miary potencjału) oznaczamy przez $G(x,y) =: G(y-x)$. *Oczekiwany czas pierwszego wyjścia* ze zbioru wyraża się wzorem

$$\mathbb{E}^x\tau_D = \int_0^\infty \mathbb{P}^x(\tau_D > t)dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} p_D(t,x,y)dydt = \int_{\mathbb{R}^d} G_D(x,y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ponadto, dla $x \in D$, rozkład łączny czasu pierwszego wyjścia ze zbioru, położenia przed wyskokiem i położenia po wyjściu ze zbioru D, opisuje się przy pomocy jądra ciepła i gęstości miary Lévy'ego. Mianowicie rozkład wektora $(\tau_D, X_{\tau_D-}, X_{\tau_D})$ ograniczonego do zdarzenia $\{\tau_D < \infty,\ X_{\tau_D-} \neq X_{\tau_D}\}$ względem $\mathbb{P}^x$ jest dany przez następującą gęstość względem (produktowej) miary Lebesgue'a

$$(0,\infty) \times D \times D^c \ni (s,u,z) \mapsto \nu(z-u)p_D(s,x,u). \tag{9}$$

Całkując powyższą równość względem ds oraz du otrzymujemy dla $x \in D$ gęstość rozkładu zmiennej losowej X_{τ_D}

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in A) = \int_D G_D(x,u)\nu(A-u)du, \quad x \in D, \tag{10}$$

dla $A \subset (\overline{D})^c$ lub nawet dla $A \subset D^c$, jeśli $\mathbb{P}^x(X_{\tau_D-} \in \partial D) = 0$. Powyższe dwa równania (9) i (10) nazywamy wzorami Ikedy-Watanabe. Wzory te mają dość intuicyjne wyjaśnienie. Mianowicie $p_D(s,x,u)duds$ oraz $G_D(x,u)du$ interpretujemy jako oczekiwany chwilowy lub łączny czas przebywania w ds i du, natomiast $\nu(z-u)dz$ jako intensywność skoków z u do z. Z punktu widzenia probabilistyki wzór Hunta (6) jest jawny, ponieważ wyraża się przez $\mathbb{P}^x$ oraz jawne funkcjonały od trajektorii, czyli przez τ_D oraz X_{τ_D}. Z punktu widzenia analizy i jawnych obliczeń definicja (6) jest uwikłana, ponieważ ze wzoru Ikedy-Watanabe wynika, że rozkład $(\tau_D, X_{\tau_D}))$ jest wyrażony przy pomocy jądra ciepła, można jednak na jego podstawie udowodnić na przykład, że funkcja $y \mapsto p_{B_r}(t,0,y)$ jest radialna dla wszystkich $r,t > 0$, gdy $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest procesem izotropowym.

Funkcja p_D spełnia równania Chapmana-Kołmogorowa, które w łatwy sposób prowadzą do następującego oszacowania jądra ciepła.

Lemat 2. *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego takim, że $e^{-t\psi} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $t > 0$. Wtedy, dla wszystkich $t > 0$ i $x,y \in \mathbb{R}^d$, mamy $p_D(t,x,y) \leq p_{t/2}(0)\,\mathbb{P}^x(\tau_D > t/2)$ oraz*

$$p_D(t,x,y) \leq p_{t/2}(0)\,\mathbb{P}^x\left(\tau_D > \frac{t}{4}\right)\mathbb{P}^y\left(\tau_D > \frac{t}{4}\right).$$

Powyższy lemat jest bardzo dobrze znany i zachodzi w analogicznej formie dla wszystkich półgrup ultrakontraktywnych. W Lemacie 2 widzimy jednak strukturę oszacowań (przybliżoną faktoryzację jądra ciepła), która pojawia się w wielu wynikach omawianego cyklu prac.

Następny lemat jest wykorzystany do wyznaczenia oszacowań jądra ciepła z góry i z dołu, gdy punkty x i y są od siebie względnie oddalone. Jest to ważne narzędzie w dowodzeniu oszacowań jądra ciepła Dirichleta skokowych procesów Markowa.

Lemat 3 (Lemma 1.10 w [H4]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o absolutnie ciągłej mierze Lévy'ego o gęstości ν. Rozważmy rozłączne zbiory $D_1, D_3 \subset D$. Niech $D_2 = D \setminus (D_1 \cup D_3)$. Jeśli $x \in D_1$, $y \in D_3$, $t > 0$, to*

$$\begin{aligned}
p_D(t,x,y) &\leq \mathbb{P}^x(X_{\tau_{D_1}} \in D_2) \sup_{s<t,\, z\in D_2} p(s,z,y) + (t \wedge \mathbb{E}^x\tau_{D_1}) \sup_{u\in D_1,\, z\in D_3} \nu(z-u), \\
p_D(t,x,y) &\leq \mathbb{P}^x(X_{\tau_{D_1}} \in D_2) \sup_{s<t,\, z\in D_2} p_D(s,z,y) + \sup_{u\in D_1,\, z\in D_3} \nu(z-u)\times \\
&\quad \times \left(\mathbb{P}^x(\tau_{D_1} > t/2)\int_0^{t/2} \mathbb{P}^y(\tau_D > s)ds + \mathbb{P}^y(\tau_D > t/2)\int_0^{t/2} \mathbb{P}^x(\tau_{D_1} > s)ds\right), \\
p_D(t,x,y) &\geq t\,\mathbb{P}^x(\tau_{D_1} > t)\,\mathbb{P}^y(\tau_{D_3} > t) \inf_{u\in D_1,\, z\in D_3} \nu(z-u).
\end{aligned}$$

Widać, że aby wykorzystać powyższy lemat należy znaleźć oszacowania: gęstości przejścia procesu wolnego $p_t(x)$, gęstości miary Lévy'ego ν, rozkładu położenia procesu po wyjściu ze zbioru, oczekiwany czas pierwszego wyjścia oraz prawdopodobieństwa przeżycia procesu w zbiorze. Oszacowania tych obiektów, uzyskane w pracach [H1]-[H5], zostaną omówione w kolejnych rozdziałach.

Podobny wynik, jak w pierwszej nierówności w Lemacie 3, wystąpił wcześniej w pracy Kulczyckiego i Siudeji dla kuli i procesu relatywistycznego [45]. Ich rozumowanie zostało następnie uproszczone w pracy [D3]. Kolejnym krokiem było uzyskanie podobnej nierówności dla kuli i izotropowego procesu stabilnego przez Chena, Kima i Songa [15]. Nierówności pierwsza i trzecia w prezentowanej powyżej formie dla izotropowego procesu stabilnego i $t = 1$, zostały udowodnione w [H1]. Pozwoliło to uzyskać ostre oszacowania jądra ciepła dla zbiorów κ-pulchnych przy wykorzystaniu brzegowej nierówności Harnacka. Ostre oszacowania oznaczają tutaj, że są one obustroone oraz iloraz górnego oszacowania i dolnego jest stały. Ostatecznie w artykule [H4] udowodniliśmy prezentowaną powyżej wersję tego lematu, która pozwoliła na wyznaczenie oszacowań na p_D dla zbiorów klasy $C^{1,1}$ bez używania brzegowej nierówności Harnacka.

Odpowiednią modyfikację tego lematu wykorzystaliśmy także dla symetrycznych procesów Markowa o absolutnie ciągłej mierze skoków w pracy [Pre1].

Elementy teorii fluktuacji

W naszych badaniach wykorzystywaliśmy obiekty, które wywodzą się z teorii fluktuacji. Najważniejszym z nich jest funkcja harmoniczna (względem generatora półgrupy przejścia izotropowo-unimodalnego procesu Lévy'ego) na półprostej, która jest rosnąca i jej pochodna jest funkcją harmoniczną. Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest symetrycznym procesem Lévy'ego na prostej rzeczywistej nie będącym złożonym procesem Poissona (to znaczy zakładamy, że część gaussowska procesu jest niezerowa lub jego miara Lévy'ego jest nieskończona). Niech $M_t = \sup_{s\leq t} X_s$, będzie procesem supremum oraz niech L_t będzie czasem lokalnym w 0 dla $M_t - X_t$, zatem L_t mierzy dla $\{X_t\}_{t\geq 0}$ czas osiągania swojego supremum ([25],[7]). Przy pomocy czasu lokalnego konstruuje się proces drabinowy. Niech L_t^{-1} będzie prawostronnie ciągłą uogólnioną funkcję odwrotną do L_t. Proces ten nazywamy czasem drabinowym, natomiast proces $H_t = X_{L_t^{-1}} = M_{L_t^{-1}}$ nazywamy procesem wysokości drabinowych. Para (L_t^{-1}, H_t) jest dwuwymiarowym subordynatorem, czyli procesem Lévy'ego o przestrzeni stanów $[0,\infty)^2$, którego każda ze współrzędnych jest funkcją niemalejącą ([25],[7]). Ponieważ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest symetryczny oraz nie jest złożonym procesem Poissona, wykładnik Laplace'a dla rozkładu (L_t^{-1}, H_t) jest następującej postaci ([25, Corollary 9.7]),

$$-\frac{1}{t}\log\left(\mathbb{E}\exp[-\tau L_t^{-1} - \lambda H_t]\right) = c_+ \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log[\tau + \psi(\lambda\theta)]}{1+\theta^2} d\theta\right\}, \qquad \tau, \lambda \geq 0,$$

gdzie c_+ jest stałą normalizującą czas lokalny [25, Rozdział 9]. Przyjmujmy $c_+ = 1$ i wtedy L_t^{-1} jest standardowym 1/2-stabilnym subordynatorem (co łatwo obliczyć), a wykładnik Laplace'a procesu H_t jest równy

$$\kappa(\lambda) = -\frac{1}{t}\log\left(\mathbb{E}\exp[-\lambda H_t]\right) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log\psi(\lambda\theta)}{1+\theta^2}\, d\theta\right\}, \quad \lambda \geq 0. \tag{11}$$

Najważniejszym obiektem z naszego punktu widzenia jest funkcja odnowy V (miara potencjału odcinków) dla procesu wysokości drabinowych H_t zdefiniowana jako

$$V(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(H_s \leq x) ds, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Oczywiście, V jest funkcją niemalejącą oraz $V(x) = 0$, dla $x \leq 0$. Ponadto funkcja V jest podaddytywna

$$V(x+y) \leq V(x) + V(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

co wynika to z mocnej własności Markowa i obserwacji, że $V(x) = \mathbb{E}T_{(x,\infty)}$ oraz $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$. Zauważmy, że wykorzystując równość (11) łatwo można wyznaczyć transformatę Laplace'a V. Mianowicie mamy

$$\mathcal{L}V(\lambda) = \frac{1}{\lambda\kappa(\lambda)}, \quad \lambda \geq 0. \tag{14}$$

Funkcja odnowy i jej pochodna, czyli gęstość miary potencjału, były badane przez Silversteina [55]. Z [55, Theorem 2] wiadomo, że jeżeli rezolwenta $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ma gęstość, co dla procesu symetrycznego jest równoważne stwierdzeniu, że rozkład X_t jest absolutnie ciągły dla każdego $t > 0$, to $V(x)$ jest absolutnie ciągła i harmoniczna na $(0, \infty)$ względem procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ to znaczy, że $V(x) = \mathbb{E}^x V(X_{\tau_{(a,b)}})$, gdzie $0 < a < b < \infty$. Ponadto V' też jest funkcją dodatnią i harmoniczną na półprostej $(0, \infty)$ dla $\{X_t\}_{t\geq 0}$. W rezultacie V jest funkcją ściśle rosnącą. Silverstein udowodnił również, że kombinacje liniowe V i V' wyczerpują nieujemne funkcje harmoniczne na półprostej dodatniej względem $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Warto podkreślić, że definicja funkcji V jest skomplikowana, przez co badanie jej własności sprawia znaczne problemy. Jawna postać w przypadku symetrycznym jest znana tylko dla procesu α-stabilnego; wtedy $V(x) = (x_+)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0, 2]$. Ponadto, gdy $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest podporządkowanym ruchem Browna subordynatorem zupełnym, to V jest funkcją zupełnie monotoniczną i posiada bardziej jawną reprezentację całkową ([46, Proposition 4.5]). Ta regularność była ważnym elementem we wcześniejszych pracach, na przykład dotyczących zachowania brzegowego funkcji Greena dla podporządkowanych ruchów Browna. W pracy [H5] uzyskaliśmy następujące ostre oszacowanie funkcji odnowy dla *dowolnego* symetrycznego procesu Lévy'ego w języku funkcji Pruitta h lub symbolu ψ.

Lemat 4 (Proposition 2.4 w [H5]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}$ o nieograniczonym symbolu. Wtedy*

$$V^2(r) \approx \frac{1}{h(r)} \approx \frac{1}{\psi^*(1/r)}, \quad r > 0,$$

gdzie stałe porównywalności są uniwersalne (nie zależą od niczego).

Badanie V' jest jeszcze trudniejszym zadaniem i do tej pory niewiele wiadomo na temat tej funkcji. Dla podporządkowanych ruchów Browna subordynatorem specjalnym wiadomo, że V' jest funkcją malejącą. Ponadto, gdy proces posiada część gaussowską ($\sigma > 0$), V' jest ciągła i ograniczona na $(0, \infty)$.

Podkreślmy, że w omawianych pracach dla procesów izotropowych $\{X_t\}_{t\geq 0}$ w $\mathbb{R}^d$, funkcja odnowy V była definiowana dla procesu drabinowego jednowymiarowego rzutu procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ (na przykład jednej z jego współrzędnych). Ponieważ rozważane procesy są niezmiennicze na obroty, V nie zależy od wyboru współrzędnej. W tym sensie teza Lematu 4 zachodzi dla $\mathbb{R}^d$ i przy oszacowaniach możemy wymiennie używać V, h lub ψ^*.

Słabe skalowanie

Słabe skalowanie jest naturalnym uogólnieniem jednorodności potęgowej oraz regularnej zmienności funkcji i obecnie jest standardem w teorii potencjału procesów Markowa [39, 13]. Podamy kilka niezbędnych definicji i klas funkcji wykorzystywanych w dalszej części. Dodatkowy opis niektórych własności rozważanych w tym rozdziale można znaleźć w [8] oraz [1].

DEFINICJA **5.** *Niech $\phi : I \to [0,\infty]$, gdzie zbiór $I \subset [-\infty,\infty]$ jest spójny.*

- *Mówimy, że ϕ jest* **prawie rosnąca**, *jeśli istnieje $c \in (0,1]$ takie, że $c\phi(x) \le \phi(y)$ dla $x, y \in I$, $x \le y$.*
- *Funkcję ϕ nazywamy* **prawie malejącą**, *jeśli istnieje $C \in [1,\infty)$ takie, że $C\phi(x) \ge \phi(y)$ dla $x, y \in I$, $x \le y$.*

Niech

$$\phi^*(y) = \sup\{\phi(x) : \ x \in I,\, x \le y\}, \qquad y \in I.$$

Łatwo zauważyć, że ϕ^* jest niemalejąca, $\phi \le \phi^*$ oraz ϕ jest prawie rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $c > 0$ takie, że $c\phi^* \le \phi$. Analogicznie,

$$\phi_*(x) = \sup\{\phi(y) : \ y \in I,\, y \ge x\}, \qquad x \in I.$$

Wtedy ϕ_* jest nierosnąca, $\phi \le \phi_*$ oraz ϕ jest prawie malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi_* \le C\phi$.

DEFINICJA **6.** *Niech $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$.*

- *Mówimy, że ϕ spełnia* **warunek słabego dolnego skalowania** *(w nieskończoności), jeśli istnieją liczby $\underline{\alpha} > 0$, $\underline{\theta} \ge 0$, oraz $\underline{c} \in (0,1]$ takie, że*

  $$\phi(\lambda\theta) \ge \underline{c}\lambda^{\underline{\alpha}}\phi(\theta) \quad dla \quad \lambda \ge 1, \quad \theta > \underline{\theta}. \tag{15}$$

  W skrócie mówimy, że ϕ spełnia WLSC$(\underline{\alpha},\underline{\theta},\underline{c})$ i piszemy $\phi \in$ WLSC$(\underline{\alpha},\underline{\theta},\underline{c})$. Dodatkowo, jeśli $\underline{\theta} = 0$, to mówimy, że ϕ spełnia **globalne** *WLSC (dla pewnych $\underline{\alpha} > 0$ oraz $\underline{c} \in (0,1]$).*

- **Warunek słabego górnego skalowania** *zachodzi dla ϕ, jeśli istnieją $\overline{\alpha} < 2$, $\overline{\theta} \ge 0$ oraz $\overline{C} \in [1,\infty)$ takie, że*

  $$\phi(\lambda\theta) \le \overline{C}\lambda^{\overline{\alpha}}\phi(\theta) \quad dla \quad \lambda \ge 1, \quad \theta > \overline{\theta}. \tag{16}$$

  W skrócie $\phi \in$ WUSC$(\overline{\alpha},\overline{\theta},\overline{C})$. Gdy $\overline{\theta} = 0$ w (16) mówimy, że ϕ spełnia **globalne** *WUSC, nie zawsze precyzując $\overline{\alpha} < 2$ oraz $\overline{C} \in [1,\infty)$.*

Powyższe warunki słabego skalowania możemy powiązać z prawie monotonicznością funkcji. Mamy bowiem $\phi \in$ WLSC$(\underline{\alpha},\underline{\theta},\underline{c})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(\theta) = \kappa(\theta)\theta^{\underline{\alpha}}$ dla pewnej funkcji κ prawie rosnącej na $(\underline{\theta},\infty)$. Podobnie, $\phi \in$ WUSC$(\overline{\alpha},\overline{\theta},\overline{C})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(\theta) = \kappa(\theta)\theta^{\overline{\alpha}}$ dla pewnej funkcji κ prawie malejącej na $(\overline{\theta},\infty)$.

Ponadto, jeśli $\phi \geq 0$ jest funkcją ciągłą i rosnącą do nieskończoności taką, że $\phi \in \mathrm{WLSC}(\underline{\alpha}, \underline{\theta}, \underline{c})$ [lub $\phi \in \mathrm{WUSC}(\overline{\alpha}, \overline{\theta}, \overline{C})$], to $\phi^{-1} \in \mathrm{WUSC}(1/\underline{\alpha}, \phi(\underline{\theta}), \underline{c}^{-1/\underline{\alpha}})$ [odpowiednio $\phi^{-1} \in \mathrm{WLSC}(1/\overline{\alpha}, \phi(\overline{\theta}), \overline{C}^{-1/\overline{\alpha}})$].

Warunki słabego skalowania można rozważać dla dowolnych wykładników, jednakże my będziemy ich używać w stosunku do symbolu ψ procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$, stąd od razu w momencie definicji ograniczamy zakres wykładników $\underline{\alpha}$ oraz $\overline{\alpha}$. Wiadomo bowiem z (5), że wykładnik procesu izotropowo-unimodalnego jest funkcją prawie rosnącą (stąd (15) zachodzi zawsze z $\underline{\alpha} = 0$) oraz $\sqrt{\psi}$ jest funkcją podaddytywną (zatem (16) zachodzi zawsze z $\overline{\alpha} = 2$). Typowymi przykładami wykładników charakterystycznych spełniających słabe własności skalowania są $\psi(\xi) = |\xi|^\alpha + |\xi|^\beta$ oraz $\psi(\xi) = |\xi|^\alpha \ln^{1-\alpha/2}(1 + |\xi|^\beta)$, dla $\alpha, \beta \in (0,2)$. Więcej przykładów zaprezentowanych jest w rozdziale 3.4 w [H2] i w rozdziale 4.1 w [H3].

W literaturze dotyczącej regularnej zmienności funkcji warunki słabego skalowania są związane z klasą funkcji O-regularnie zmieniających się i z indeksami Matuszewskiej. Na przykład warunek WUSC jest równoważny temu, że górny indeks Matuszewskiej jest mniejszy od 2, a założenie globalnego WUSC dla ϕ oznacza, że *dodatkowo* górny indeks Matuszewskiej dla funkcji $r \mapsto 1/\phi(1/r)$ jest też mniejszy od 2. W większości naszych wyników precyzujemy od czego zależą stałe porównywalności, a bardzo często występuje zależność od stałych definiujących skalowania. Na przykład, jeżeli piszemy, że stała zależy od charakterystyk skalowania WLSC, to zależy od $\underline{c}$ oraz $\underline{\alpha}$, ale nie zależy od $\underline{\theta}$, zobacz na przykład sformułowanie Twierdzenia 8. Dlatego, dla zachowania precyzyjnego i jednolitego zapisu zdecydowaliśmy się na wykorzystanie oznaczeń WLSC i WUSC zamiast używania pojęcia indeksów Matuszewskiej.

Zaprezentujemy teraz twierdzenie typu abelowego. Mianowicie, przy założeniu słabych skalowań na gęstość miary Lévy'ego dowodzimy, że symbol procesu także spełnia warunki słabego skalowania. Poniższe stwierdzenie pozwala łatwo sprawdzać, czy założenia najważniejszych twierdzeń prezentowanych poniżej są spełnione, gdy punktem startu jest miara Lévy'ego, a nie wykładnik charakterystyczny.

Stwierdzenie 7 (Proposition 28 w [H3] oraz Propositon 8 w [H2]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie czysto skokowym symetrycznym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$ z miarą Lévy'ego $N(dx) = \nu(x)dx$ i wykładnikiem charakterystycznym ψ. Załóżmy, że istnieją $\theta \in [0, \infty)$, stała $c \in (0,1]$ oraz niemalejąca funkcja $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ takie, że*

$$c\frac{f(1/|x|)}{|x|^d} \leq \nu(x) \leq c^{-1}\frac{f(1/|x|)}{|x|^d}, \quad 0 < |x| < 1/\theta.$$

(i) Jeżeli $f \in \mathrm{WLSC}(\underline{\alpha}, \theta, \underline{c})$, to $\psi \in \mathrm{WLSC}(\underline{\alpha}, \theta, C^*)$ dla pewnej stałej C^*.

(ii) Jeśli $f \in \mathrm{WLSC}(\underline{\alpha}, \theta, \underline{c}) \cap \mathrm{WUSC}(\overline{\alpha}, \theta, \overline{C})$, to $f(|\xi|)$ oraz $\psi(\xi)$ są porównywalne dla $|\xi| > \theta$.

II. Jądro ciepła dla całej przestrzeni $\mathbb{R}^d$

Badanie jądra ciepła jest ważnym zagadnieniem na pograniczu teorii prawdopodobieństwa, analizy i geometrii. Rzeczywiście, znajomość gęstości prawdopodobieństwa przejścia pozwala opisać własności trajektorii procesów Markowa. Ponieważ prawdopodobieństwo przejścia jest rozwiązaniem fundamentalnym równania ciepła związanego z generatorem infinitezymalnym procesu, zatem znajomość własności jądra ciepła pozwala na uzyskanie informacji na temat rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych i własności spektralnych generatora. Dla eliptycznych operatorów drugiego rzędu jądra ciepła były tematem bardzo dużej liczby prac i otrzymano wiele pięknych i użytecznych rezultatów ([22, 28, 60, 27, 6, 49, 50, 63, 32, 31]). Jądro ciepła symetrycznych operatorów nielokalnych lub równoważnie gęstości przejścia skokowych symetrycznych procesów Markowa jest dobrze opisane, gdy miara Lévy'ego jest absolutnie ciągła oraz indeks Matuszewskiej jej gęstości jest ściśle pomiędzy $-2-d$ i $-d$. Oszacowania dla dość ogólnych skokowych procesów Markowa zostały uzyskane między innymi w [19, 14, 13, 3, 29]. Półgrupy przejścia procesów Lévy'ego pozwalają na głębszy wgląd dzięki ich splotowej strukturze i dostępności technik fourierowskich. Na przykład oszacowania gęstości przejścia procesów Lévy'ego zostały uzyskane w [42, 58, 59, 37] przy użyciu odwrotnej transformaty Fouriera, całkowania w dziedzinie zespolonej, metody punktów siodłowych oraz metody Daviesa.

Głównymi wynikami pracy [H3] są oszacowania dla ogonów jednowymiarowych rozkładów procesu izotropowo-unimodalnego $\{X_t\}_{t\geq 0}$ oraz ich gęstości $p_t(x)$, wyrażone przy użyciu wykładnika Lévy'ego-Chinczyna ψ. Ponieważ ψ jest prawie rosnącą funkcją radialną, więc jest porównywalna z jej niemalejącą majorantą ψ^*. Inne badane obiekty zazwyczaj są funkcjami nierosnącymi, dlatego w sformułowaniach wyników będzie zwykle używana właśnie funkcja ψ^*. Dla przykładu, wykorzystywanie ψ (ψ^*) zamiast gęstości miary Lévy'ego ν w sformułowaniach jest charakterystyczne w naszym podejściu i z punktu widzenia teorii spektralnej oraz operatorów pseudo-różniczkowych jest uznawane za naturalne [34]. Jak zwykle dla transformaty Fouriera, asymptotyka ψ w nieskończoności opisuje asymptotykę p_t oraz ν w początku układu współrzędnych (i odwrotnie). Następujące twierdzenie jest jednym z głównych wyników pracy [H3].

Twierdzenie 8 (Theorem 21 w [H3]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Załóżmy, że $\psi \in WLSC(\underline{\alpha},\theta,\underline{c})$. Wtedy istnieje stała $C^* = C^*(d,\underline{\alpha},\underline{c})$ taka, że*

$$p_t(x) \leq C^* \min\left\{\left[\psi^-(1/t)\right]^d, \frac{t\psi^*(1/|x|)}{|x|^d}\right\} \quad \text{dla } t>0 \text{ oraz } t\psi^*(\theta) < 1/\pi^2.$$

Jeśli $\psi \in WLSC(\underline{\alpha},\theta,\underline{c}) \cap WUSC(\overline{\alpha},\theta,\overline{C})$, to istnieją stałe $c^* = c^*(d,\underline{\alpha},\underline{c},\overline{\alpha},\overline{C})$ oraz $r_0 = r_0(d,\underline{\alpha},\underline{c},\overline{\alpha},\overline{C})$ takie, że

$$p_t(x) \geq c^* \min\left\{\left[\psi^-(1/t)\right]^d, \frac{t\psi^*(1/|x|)}{|x|^d}\right\} \qquad \text{dla} \quad t>0, \quad t\psi^*(\theta/r_0) < 1 \quad \text{oraz} \quad |x|\,\theta < r_0.$$

Przy założeniu, że ψ spełnia słaby górny i dolny warunek skalowania z wykładnikami ściśle pomiędzy 0 a 2, otrzymujemy ostre oszacowanie, które ma następującą postać

$$p_t(x) \approx \left[\psi^-(1/t)\right]^d \wedge \frac{t\psi^*(|x|^{-1})}{|x|^d} \approx p_t(0) \wedge [t\nu(x)]. \tag{17}$$

Należy podkreślić, że otrzymujemy też oszacowanie gęstości miary Lévy'ego

$$\nu(x) \approx \frac{\psi^*(|x|^{-1})}{|x|^d}, \tag{18}$$

które są prostą konsekwencją (17), a nie są elementem potrzebnym do dowodu oszacowań jądra ciepła. Kolejną rzeczą godną podkreślenia jest to, że stałe w porównywalności zależą tylko od wymiaru i charakterystyk skalowania.

Poniżej omówimy idee dowodu Twierdzenia 8. Najważniejszą własnością wykorzystaną w jego dowodzie jest unimodalność gęstości przejścia p_t. Mianowicie, dzięki radialnej monotoniczności $y \mapsto p_t(y)$ otrzymujemy $p_t(x) \le p_t(0)$ oraz

$$p_t(x) \le \frac{\mathbb{P}\left(|x|/2 \le |X_t| < |x|\right)}{\left|B_{|x|} \setminus B_{|x|/2}\right|} \le \frac{1}{(1-2^{-d})|B_1|}\mathbb{P}\left(|X_t| \ge \frac{|x|}{2}\right)|x|^{-d}. \tag{19}$$

Ponadto, dla dowolnej liczby $\lambda > 1$,

$$p_t(x) \ge \frac{\mathbb{P}\left(|x| \le |X_t| < \lambda|x|\right)}{\left|B_{\lambda|x|} \setminus B_{|x|}\right|} = \frac{d}{(\lambda^d-1)\omega_d}\left(\mathbb{P}\left(|X_t| \ge |x|\right) - \mathbb{P}\left(|X_t| \ge \lambda|x|\right)\right)|x|^{-d}. \tag{20}$$

Z powyższych rozważań wynika, że do uzyskania oszacowania jądra ciepła, wystarczy otrzymać odpowiednie oszacowania ogonów rozkładów jednowymiarowych oraz na $p_t(0)$. Oszacowania ogonów uzyskujemy wykorzystując metody podobne do tauberowskich, natomiast $p_t(0)$ jest wyrażone przy pomocy odwrotnej transformaty Fouriera w zerze i dzięki temu może być oszacowane.

Podstawowym krokiem w uzyskaniu oszacowań ogonów rozkładów jednowymiarowych jest oszacowanie transformaty Laplace'a ogona rozkładu $|X_t|^2$.

Lemat 9 (Lemma 4 w [H3]). *Niech $f_t(\rho) = \mathbb{P}(|X_t|^2 > \rho)$. Istnieje stała $C = C(d)$ taka, że*

$$C^{-1}\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-t\psi^*(\sqrt{\lambda})}\right) \le \mathcal{L}f_t(\lambda) \le C\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-t\psi^*(\sqrt{\lambda})}\right), \qquad \lambda > 0.$$

Konsekwencją powyższego lematu oraz monotoniczności ogona rozkładu są górne oszacowania tego ogona. W rzeczywistości poniższe górne oszacowanie jest prawdziwe dla wszystkich procesów symetrycznych.

Stwierdzenie 10 (Corollary 6 w [H3]). *Dla $r > 0$ mamy*

$$\mathbb{P}(|X_t| \ge r) \le \frac{2e}{e-1}(2d+1)\left(1 - e^{-t\psi^*(1/r)}\right).$$

Powyższe stwierdzenie w połączeniu z (19) daje ogólne oszacowanie górne na gęstość przejścia dowolnego izotropowo-unimodalnego procesu Lévy'ego.

Stwierdzenie 11 (Corollary 7 w [H3]). *Istnieje stała $C = C(d)$ taka, że*

$$p_t(x) \le Ct\psi^*(1/|x|)/|x|^d, \qquad x \ne 0.$$

Warunek słabego dolnego skalowania zapewnia, że $e^{-t\psi}$ jest całkowalna, dlatego wykorzystując odwrotną transformatę Fouriera otrzymujemy

$$p_t(0) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t\psi(\xi)} d\xi < \infty.$$

Przy założeniu WLSC dla ψ, dowodzimy oszacowania $p_t(0) \leq C[\psi^-(1/t)]^d$ (lokalnie lub globalnie w czasie w zależności od założeń). Zwróćmy uwagę, że dolne oszacowanie w takiej formie zachodzi zawsze, ponieważ

$$p_t(0) \geq (2\pi)^{-d} \int_{t\psi^*(|\xi|)\leq 1} e^{-t\psi^*(|\xi|)} d\xi \geq c(d)[\psi^-(1/t)]^d.$$

W takim razie, przy założeniu WLSC dla symbolu, mamy $p_t(0) \approx [\psi^-(1/t)]^d$.

Wykorzystując warunek górnego skalowania WUSC dla ψ oraz Lemat 9 otrzymaliśmy następujące oszacowanie dolne na ogon rozkładu.

Lemat 12 (Lemma 14 w [H3]). *Istnieje stała $C = C(d)$ taka, że jeśli $\psi \in WUSC(\overline{\alpha}, \overline{\theta}, \overline{C})$ oraz $a = [(2-\overline{\alpha})C]^{\frac{2}{2-\overline{\alpha}}} \overline{C}^{\frac{\overline{\alpha}-2}{2}}$, to*

$$\mathbb{P}(|X_t| \geq r) \geq a\left(1 - e^{-t\psi^*(1/r)}\right), \qquad 0 < r\overline{\theta} < \sqrt{a}.$$

W ten sposób, przy założeniu warunku WUSC dla wykładnika Lévy'ego-Chinczyna, uzyskujemy ostre oszacowania ogona rozkładu $|X_t|$. Używając słabej zbieżności odpowiednio unormowanego rozkładu X_t do miary Lévy'ego oraz [H5, Proposition 5.2 (i)] wykazuje się, że powyższe dolne oszacowanie jest równoważne warunkowi WUSC. Konsekwencją oszacowania ogona rozkładu normy X_t, warunku dolnego skalowania dla ψ oraz (20), jest dolne oszacowanie gęstości przejścia z Twierdzenia 8.

Należy podkreślić, że wspomniane dolne oszacowanie gęstości $p_t(x)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ψ spełnia warunki WLSC i WUSC z wykładnikami ściśle pomiędzy 0 i 2; równoważnie jeśli górny i dolny indeks Matuszewskiej jest ściśle pomiędzy 0 i 2. Mianowicie pokazaliśmy, że dla izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego własności skalowania ψ (w nieskończoności) są *równoważne* oszacowaniom (17) dla gęstości przejścia i dla gęstości miary Lévy'ego (w początku układu współrzędnych). Przypomnijmy, że górne ograniczenia zachodzą dla wszystkich procesów izotropowo-unimodalnych, dlatego okazuje się, że oszacowanie dolne $\nu(x) \geq c\psi^*(|x|^{-1})/|x|^d$ pociąga własności skalowania dla ψ.

Twierdzenie 13 (Theorem 26 w [H3]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$ z gęstością przejścia p, wykładnikiem Lévy'ego-Chinczyna ψ oraz gęstością miary Lévy'ego ν. Wtedy następujące warunki są równoważne*

(i) WLSC i WUSC zachodzą dla ψ;

(ii) istnieją stałe $r, c > 0$ takie, że

$$p_t(x) \geq c\frac{t\psi^*(|x|^{-1})}{|x|^d}, \qquad 0 < |x| < r,\ 0 < t\psi^*(|x|^{-1}) < 1;$$

(iii) istnieją stałe $r, c > 0$ takie, że

$$\nu(x) \geq c\frac{\psi^*(|x|^{-1})}{|x|^d}, \qquad 0 < |x| < r.$$

Jeśli w (i) położymy globalne WLSC i WUSC, a w (ii) oraz (iii) przyjmiemy $r = \infty$, to te trzy warunki będą nadal równoważne.

Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ wynika z Twierdzenia 8. Z $(ii) \Rightarrow (iii)$ przechodzimy wykorzystując $\lim_{t\to 0^+} p(t,x)/t = \nu(x)$ na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Aby udowodnić, że (iii) pociąga (i), konstruujemy zupełną funkcję Bernsteina φ z gęstością miary Lévy'ego μ taką, że $\varphi(|x|^2) \approx \psi(x)$ oraz $|x|^{d-2}\nu(x) \le c(d)\mu(|x|^2)$, dla pewnej stałej $c(d)$. Następnie, wykorzystując fakt, że μ jest funkcją całkowicie monotoniczną oraz używając twierdzeń typu tauberowskiego pokazujemy, że $\varphi(r) \approx r\varphi'(r)$, czego konsekwencją jest warunek WLSC dla φ, zatem także dla ψ. Do wywnioskowania z (iii) warunku WUSC dla ψ, wykorzystaliśmy sprzężoną funkcję Bernsteina $\varphi_1(r) = r/\varphi(r)$. Używając twierdzeń typu tauberowskiego dla gęstości miary potencjału subordynatora związanego z funkcją φ_1 pokazujemy, że $\varphi_1(r) \approx r\varphi_1'(r)$. Porównywalność ta daje warunek dolnego skalowania dla φ_1, co jest równoważne warunkowi górnego skalowania dla φ z wykładnikiem ostro mniejszym od 1, a to pociąga WUSC dla ψ z wykładnikiem mniejszym od 2.

Bardziej ogólne oszacowania dolne na jądro ciepła izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego, bez założenia skalowania, zostały uzysane w pracy [H4] jako wniosek z Lematu 3.

Stwierdzenie 14 (Lemma 1.11 w [H4]). *Dla wszystkich $t > 0$ oraz $x \neq 0$,*

$$p_t(x) \ge 4^{-d} t\, \nu(x) \left[\mathbb{P}^0(\tau_{B_{|x|/2}} > t)\right]^2.$$

Powyższe stwierdzenie, wraz z oszacowaniami dla prawdopodobieństwa przeżycia w kuli dla procesu startującego z jej środka uzyskanymi przez Pruitta [52, strona 954], pociąga następnie dolne oszacowanie na jądro ciepła przez $t\nu$.

WNIOSEK **15** (Corollary 1.13 w [H4]). *Istnieje stała $c = c(d) > 0$ taka, że dla $x \neq 0$ i $0 < t < c/\psi^*(1/|x|)$ zachodzi*

$$p_t(x) \ge 4^{-d-1} t\nu(x).$$

Dla dowolnego izotropowo-unimodalnego procesu Lévy'ego uzyskaliśmy zatem następujące oszacowanie: dla $0 < t < c/\psi^*(1/|x|)$,

$$4^{-d-1}\, t\, \nu(x) \le p_t(x) \le c(d)\, t\, \psi^*(1/|x|)|x|^{-d}.$$

Powyższe oszacowanie zostało wzmocnione w pracy [Pre2]. Otrzymaliśmy tam oszacowanie dla prawdopodobieństwo przeżycia procesu izotropowego w kuli przy starcie z jej środka w pełnym zakresie czasu $t > 0$. Ponadto, oszacowanie górne gęstości przejścia p_t zostało poprawione. Ostatecznie okazało się, że istnieją stałe $c = c(d)$ oraz $C = C(d)$ takie, że

$$C^{-1} t\nu(x) e^{-c\, h(|x|)t} \le p_t(x) \le Ct(-h'(|x|))|x|^{1-d}, \qquad t > 0,\ x \neq 0. \tag{21}$$

Należy tu podkreślić, że $0 < -r\,h'(r) \le 2h(r)$. Oszacowanie to jest ostre dla $0 < t < c/\psi^*(1/|x|)$, nie tylko dla procesów, których wykładniki charakterystyczne spełniają warunki skalowania WLSC oraz WUSC, ale również, gdy ψ jest funkcją wolno zmieniającą się, co jest szczególnie interesującym przypadkiem w obecnych badaniach.

III. Regularność funkcji harmonicznych oraz oszacowania funkcji Greena $\mathbb{R}^d$

Badania w tym zakresie wyprzedziły oszacowania jądra ciepła procesów izotropowo-unimodalnych, jednakże jądro ciepła jest funkcją pierwotną w stosunku do funkcji Greena, a przy omawianiu wyników rozprawy nie kierujemy się chronologią ich powstawania tylko przejrzystością opisu. Zaczniemy od wprowadzenia kilku definicji. Wiadomo, że klasyczne funkcje harmoniczne mają własność średniej. Analogicznie definiujemy funkcje harmoniczne względem procesu stochastycznego. Funkcję $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazywamy *harmoniczną* względem $\{X_t\}_{t\geq 0}$ w otwartym zbiorze D, jeśli dla dowolnego otwartego i ograniczonego zbioru B takiego, że $\bar{B} \subset D$, zachodzi

$$f(x) = \mathbb{E}^x f(X_{\tau_B}), \qquad x \in B.$$

Ponadto, jeśli warunek średniej zachodzi także dla $B = D$, to mówimy, że funkcja jest *regularnie harmoniczna.*

Mówimy, że zachodzi *niezmiennicza na skalowanie nierówność Harnacka* dla procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$, jeśli dla dowolnego $R > 0$ istnieje stała $C = C(R)$ taka, że dla dowolnej funkcji g nieujemnej na $\mathbb{R}^d$ i harmonicznej w kuli B_r, $r \leq R$,

$$\sup_{x\in B_{r/2}} g(x) \leq C \inf_{x\in B_{r/2}} g(x).$$

Mówimy, że zachodzi *globalna nierówność Harnacka*, jeżeli stała w powyższej nierówności spełnia $\sup_{R>0} C(R) < \infty$.

Głównym celem pracy [H2] było udowodnienie niezmienniczej na skalowanie nierówności Harnacka i hölderowskiej regularności funkcji harmonicznych względem izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego z wykładnikiem charakterystycznym mającym własność dolnego skalowania. Znaczenie tej pracy polega na tym, że robimy tylko słabe założenie na wykładnik charakterystyczny oraz nie używamy w dowodach żadnych właściwości miary Lévy'ego za wyjątkiem tego, że jest izotropowo-unimodalna. We wcześniejszej literaturze dotyczącej nierówności Harnacka dla procesu Lévy'ego, założenia odnosiły się do zachowania miary Lévy'ego, szybkości zaniku jej gęstości w nieskończoności oraz wybuchu w początku układu współrzędnych (zobacz [57, Rozdział 3]), lub początkowe kroki dowodowe koncetrowały się na uzyskaniu takiego zachowania ([41]). Wyniki uzyskane w pracy [H2] wydają się ważne zwłaszcza dla subordynowanych ruchów Browna, ponieważ zdarzają się tam przypadki, gdy znany jest symbol procesu natomiast miara Lévy'ego lub nawet jej oszacowania nie są znane. Godnym podkreślenia jest fakt, że otrzymane wyniki można zastosować do procesów, których wykładniki Lévy'ego-Chinczyna w nieskończoności zachowują się prawie jak wykładnik dla ruchu Browna. Procesy te nie były rozważane w dotychczasowej literaturze, poza kilkoma specjalnymi przykładami. Dokładniej, możemy rozważać procesy o symbolu $\psi(x) = |x|^2\ell(|x|)$, gdzie ℓ jest funkcją wolno zmieniającą się i dążącą do 0 w nieskończoności. Jako przykład możemy wziąć gęstość miary Lévy'ego $|x|^{-d-2}\log^{-2}(2+|x|^{-1})$. Ponadto, otrzymaliśmy globalną nierówność Harnacka dla wielu procesów, dla których dotychczas była znana tylko (słabsza) wersja niezmiennicza na skalowanie (to jest dla małych kul). Na przykład uzyskaliśmy globalną nierówność Harnacka dla α-stabilnego procesu relatywistycznego.

Twierdzenie 16 (Theorem 1 w [H2]). *Niech $d \geq 3$ oraz niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Jeśli $\psi \in WLSC(\underline{\alpha}, \underline{\theta}, \underline{c})$, to zachodzi niezmiennicza* *na skalowanie nierówność Harnacka. Ponadto, jeżeli ψ spełnia globalne WLSC, to zachodzi globalna nierówność Harnacka.*

Następny wynik mówi o ciągłości ograniczonych funkcji harmonicznych ze stałą Höldera zależną od funkcji jedynie przez jej supremum.

Twierdzenie 17 (Theorem 2 w [H2]). *Niech $d \geq 3$ oraz niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Załóżmy, że $\psi \in WLSC(\underline{\alpha}, \underline{\theta}, \underline{c})$. Wtedy dla dowolnego $R > 0$ istnieją stałe $c = c(R)$ i $\delta > 0$ takie, że dla dowolnego $0 < r \leq R$ oraz dowolnej ograniczonej funkcji g, która jest harmoniczna w B_r,*

$$|g(x) - g(y)| \leq c\|g\|_\infty \left(\frac{|x-y|}{r}\right)^\delta, \qquad x, y \in B_{r/2}.$$

Założenie dotyczące wymiaru $d \geq 3$ w powyższych twierdzeniach może być usunięte, gdy $r \mapsto -\nu'(r)/r$ jest funkcją nierosnącą. W takim przypadku z [44, Theorem 1.5] wiadomo, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest rzutem ortogonalnym innego procesu z przestrzeni $\mathbb{R}^{d+2}$ i można użyć wyników dla tego procesu,a następnie wykorzystać je dla rzutu ([H2, Corollary 5 i 6]). W szczególności, dla dowolnego d, analogiczne twierdzenia zachodzą dla podporządkowanych ruchów Browna (Theorem 7 w [H2]). W ogólnym przypadku założenie $d \geq 3$ zapewnia dwie istotne własności. Po pierwsze, proces jest wtedy tranzytywny i funkcja Greena $\mathbb{R}^d$ jest skończona poza zerem. Po drugie wiadomo, że dla pewnego $\varepsilon \in (0,1]$, funkcja $r \to r^{d-\varepsilon}\psi^*(1/r)$ jest prawie rosnąca.

Główne kroki dowodowe powyższych twierdzeń opierają się na ideach dowodów Bassa i Levina ([5]) dla procesów prawie stabilnych, ale znacznie różnią się w szczegółach. Kluczowym elementem dowodu nierówności Harnacka i hölderowskiej regularności funkcji harmonicznych jest nierówność typu Krylowa-Safonowa, która mówi, że istnieją stałe c, $R > 0$ i $\lambda < 1$ takie, że dla dowolnych $r < R$ i dowolnego zbioru ograniczonego $A \subset B_{\lambda r}$,

$$\mathbb{P}^x(T_A < \tau_{B_r}) \geq c\frac{|A|}{|B_r|}, \qquad x \in B_{\lambda r}. \tag{22}$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo, iż proces trafi w zbiór A, który jest podzbiorem mniejszej kulki przed wyjściem z większej kuli jest proporcjonalne do miary A. Tę nierówność udowodniono w [H2] dla procesów izotropowo-unimodalnych, których symbole spełniają warunek WLSC.

Stwierdzenie 18 (Proposition 7 w [H2]). *Niech $d \geq 3$ i $\psi \in WLSC(\underline{\alpha}, \underline{\theta}, \underline{c})$. Wówczas istnieją $c = c(d, \underline{\alpha}, \underline{c})$ i $\lambda = \lambda(d, \underline{\alpha}, \underline{c}) \in (0,1)$ takie, że (22) zachodzi, gdy $r\underline{\theta} < 1$.*

Zauważmy, że jeżeli ψ spełnia globalne WLSC, to nierówność typu Krylowa-Safonowa zachodzi dla dowolnego $r > 0$. Użycie metod Bassa i Levina, oprócz nierówności typu Krylowa-Safonowa, wymaga uzyskania jeszcze dwóch innych oszacowań. Pierwsze z nich zachodzi nie tylko dla izotropowo-unimodalnych procesów, ale dla wszystkich symetrycznych procesów, dla których symbole jednowymiarowych rzutów spełniają WLSC. Wynik ten jest konsekwencją wzoru Dynkina,

$$\mathbb{E}^x f(X_{\tau_D}) - f(x) = G_D \mathcal{L} f(x), \quad f \in Dom(\mathcal{L}), \tag{23}$$

oszacowań na średni czas wyjścia z kuli dla procesu startującego z jej środka ([52]) i porównywalności funkcji h i ψ^*, patrz (3). Oszacowanie ma następujące sformułowanie.

Lemat 19 (Corollary 2 w [H2]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego. Załóżmy, że dla każdego $\Theta \in \mathbf{S}^{d-1}$ funkcja $(0,\infty) \ni t \mapsto \psi(t\Theta)$ należy do WLSC$(\underline{\alpha}, \underline{\theta}, \underline{c})$. Wtedy istnieje stała $C = C(d, \underline{\alpha}, \underline{c}, \sup_{|y|=\underline{\theta}} \psi(y)/\psi^*(\underline{\theta}))$ taka, że dla $0 < r\,\underline{\theta} < 1$ i $s \leq r/2$,*

$$\mathbb{P}^x(|X_{\tau_{B_s}}| \geq r) \leq C \left(\frac{s}{r}\right)^{\underline{\alpha}}, \qquad |x| \leq s.$$

W szczególności, w przypadku procesów izotropowo-unimodalnych, stała C w powyższej nierówności zależy tylko od wymiaru oraz charakterystyk z własności skalowania ($\underline{\alpha}$ i $\underline{c}$). Drugie potrzebne oszacowanie jest przedstawione w następnym lemacie.

Lemat 20 (Proposition 6 w [H2]). *Niech $d \geq 3$ i $\psi \in$ WLSC$(\underline{\alpha}, \underline{\theta}, \underline{c})$. Istnieją $c = c(d, \underline{\alpha}, \underline{c})$ i $\lambda = \lambda(d, \underline{\alpha}, \underline{c}) \in (0, 1]$ takie, że dla dowolnego $r\,\underline{\theta} < 1$, i dowolnej nieujemnej funkcji H takiej, że* $\mathrm{supp} H \subset \overline{B_r}^c$,

$$\mathbb{E}^x H(X_{\tau_{B_{\lambda r}}}) \leq C\mathbb{E}^y H(X_{\tau_{B_r}}), \qquad x, y \in B_{\frac{\lambda r}{2}}.$$

Używając wzór Ikedy-Watanabe, miary równowagi oraz nierówności izoperymetrycznej udowodnionej przez Watanbe [62], zredukowaliśmy dowody nierówności Krylowa-Safonowa i powyższego lematu do ostrych oszacowań na pojemność i miarę potencjału kul oraz funkcji Greena całej przestrzeni dla badanych procesów. W [H2, Proposition 2] udowodniono, że dla $d \geq 3$, miara potencjału kuli spełnia $U(B_r) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in B_r)dt \approx 1/\psi^*(1/r)$, a stała porównywalności zależy tylko od wymiaru. Dowód tego oszacowania został uzyskany przy pomocy twierdzeń typu tauberowskiego. Następnie, wykorzystując $U(B_r)$ udowodniono ostre oszacowania pojemności kul. Dokładniej, całkując względem $x \in B_r$ wzór

$$\mathbb{P}^x(T_{B_r} < \infty) = \int_{\mathbb{R}^d} G(y - x)\rho_{B_r}(dy),$$

gdzie ρ_{B_r} jest miarą równowagi dla domkniętej kuli $\overline{B}_r$, otrzymaliśmy

$$Cap(\overline{B_r}) = \rho_{B_r}(\overline{B}_r) \approx r^d/U(B_r) \approx r^d\psi^*(1/r).$$

Kolejny raz stała porównywalności zależy tylko od wymiaru. Następnym wnioskiem z oszacowania miary potencjału kuli jest oszacowanie funkcji Greena całej przestrzeni, bowiem wykorzystując radialną monotoniczność funkcji G otrzymujemy

$$G(x) \leq \frac{U(B_{|x|})}{|B_{|x|}|} \leq \frac{c(d)}{\psi^*(1/|x|)|x|^d}.$$

Dolne oszacowanie w takiej samej formie uzyskujemy przy założeniu WLSC dla ψ.

Twierdzenie 21 (Theorem 3 w [H2]). *Niech $d \geq 3$ oraz niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Jeśli $\psi \in$ WLSC$(\underline{\alpha}, \theta, \underline{c})$, to istnieją stałe $c = c(d, \underline{\alpha}, \underline{c}) < 1$ oraz $C = C(d, \underline{\alpha}, \underline{c})$ takie, że*

$$\frac{C}{|x|^d\psi^*(|x|^{-1})} \leq G(x), \qquad \theta\,|x| \leq c.$$

Ponadto, założenie WLSC dla ψ jest optymalne, ponieważ jeżeli $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest podporządkowanym ruchem Browna, którego subordynator jest specjalny, to $G(x) \approx \frac{1}{\psi^*(1/|x|)|x|^d}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ψ spełnia WLSC ([H2, Theorem 5]). Ostatnio wynik ten został rozszerzony w pracy [Pre2] (Theorem 5.11) dla dowolnych izotropowo-unimodalnych procesów, przy założeniu na wymiar $d \geq 6$. Wykorzystując [Pre3, Theorem 1.2] zamiast [Pre2, Theorem 5.9] można ponadto pokazać, że w rzeczywistości teza jest prawdziwa dla $d \geq 3$.

Nierówność Harnacka opisuje zachowanie funkcji harmonicznych wewnątrz zbioru, a w zasadzie ogranicza stosunek supremum i infimum funkcji. Natomiast do opisu funkcji harmonicznych przy brzegu służy brzegowa nierówność Harnacka, która mówi, że wszystkie funkcje harmoniczne, które są równe zero w otoczeniu brzegu, mają taki sam zanik przy jego brzegu. Ostatnim wynikiem omawianego cyklu prac, który przedstawimy w tym rozdziale jest brzegowa nierówność Harnacka dla zbiorów klasy $C^{1,1}$ z jawnym opisem zaniku przy brzegu opisanym przy pomocy wykładnika charakterystycznego.

Stwierdzenie 22 (Proposition 7.6 w [H5]). *Niech ν będzie ciągła w $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Załóżmy, że ψ spełnia globalne warunki WLSC i WUSC, D będzie zbiorem $C^{1,1}$ w skali $\rho > 0$, $z \in \partial D$, $0 < r < \rho$ i $u \geq 0$ jest regularnie harmoniczna w $D \cap B(z,r)$ oraz znika na $B(z,r) \setminus D$. Wtedy istnieją stałe $c = c(d,\psi)$, $c_1 = c_1(d,\psi)$ takie, że*

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leq c\frac{V(\delta_D(x))}{V(\delta_D(y))} \leq c_1\sqrt{\frac{\psi^*(1/\delta_D(y))}{\psi^*(1/\delta_D(x))}}, \qquad x,y \in D \cap B(z,r/2).$$

Powyższe stwierdzenie jest wnioskiem z brzegowej nierówności Harnacka dla dowolnych zbiorów ([40]), gdzie zanik opisany jest przy pomocy wartości oczekiwanej pierwszego czasu wyjścia ze zbioru. Stosując oszacowania średniego czasu wyjścia otrzymane w pracy [H5] otrzymujemy powyższy wynik. Badania w tym kierunku były kontynuowane w pracy [Pre3] i założenie o ciągłości gęstości miary Lévy'ego może być pominięte, ponieważ zamiast używać wyników pracy [40] można zastosować [Pre3, Theorem 1.9].

IV. Średni czas wyjścia i prawdopodobieństwo przeżycia

W dowodach wyników, prezentowanych w tym rozdziale, wykorzystujemy nierówność Harnacka oraz oszacowania funkcji Greena całej przestrzeni, które zostały omówione w poprzednim rozdziale. Głównymi obiektami badanymi w tym rozdziale będą $s_D(x) = \mathbb{E}^x \tau_D$ oczekiwany czas pierwszego wyjścia ze zbioru D oraz $\mathbb{P}^x(\tau_D > t)$ prawdopodobieństwo przeżycia ustalonego czasu $t > 0$, rozważane jako funkcje punktu startu procesu. Wartość oczekiwana pierwszego czasu wyjścia ze zbioru jest ważnym obiektem z punktu widzenia probabilistyki oraz zastosowań w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej. Ponieważ dzięki brzegowej nierówności Harnacka, średni czas wyjścia opisuje zanik funkcji harmonicznych przy brzegu zbioru, jego oszacowania są też istotne dla analizy. Wynika to stad, ze wartość oczekiwana pierwszego czasu wyjścia jest funkcją nadharmoniczną generatora infinitezymalnego procesu i w pewnym sensie $\mathcal{L}s_D = -1$ na D (zobacz poniżej dyskusje na temat operatora typu Dynkina). Dlatego nie tylko zanik funkcji harmonicznych, ale także zanik przy brzegu dowolnych ciągłych rozwiązań problemu Dirichleta

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, & \text{na } D, \\ u = 0, & \text{na } D^c, \end{cases}$$

dla ograniczonej funkcji f, jest nie wolniejszy od zaniku średniego czasu wyjścia. Wynika to w dość łatwy sposób z zasady maksimum dla generatora $\mathcal{L}$.

Podstawowym obiektem badań opisanych w tym rozdziale jest $\mathbb{E}^x \tau_{B_r}$, czyli średni czas wyjścia procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ z kuli B_r o środku w 0 i promieniu $r > 0$, dla dowolnego punktu startu $x \in \mathbb{R}^d$. W przypadku gdy $x = 0$, znane są oszacowania dla dowolnego procesu Lévy'ego ([52]). Dla procesu symetrycznego $\{X_t\}_{t\geq 0}$ postać tych oszacowań jest szczególnie prosta. Istnieją wtedy stałe $c = c(d)$ i $C = C(d)$ takie, że

$$\frac{c}{h(r)} \leq \mathbb{E}^0 \tau_{B_r} \leq \frac{C}{h(r)}, \qquad r > 0. \tag{24}$$

Powyższe oszacowanie uzyskane przez Pruitta uogólniliśmy dla dowolnych symetrycznych procesów Lévy'ego z prostej rzeczywistej, nie będących złożonymi procesami Poissona, startujących z *dowolnego* punktu odcinka

$$\mathbb{E}^x \tau_{(-r,r)} \approx \frac{1}{\sqrt{h(r-|x|)h(r)}}, \qquad r > 0, \, |x| < r, \tag{25}$$

gdzie stała porównywalności jest uniwersalna. Sądzimy, że analogiczne oszacowanie jest prawdziwe dla kuli w $\mathbb{R}^d$ i dla dowolnego niezmienniczego na obroty procesu Lévy'ego, ale jak dotąd udało się je udowodnić tylko dla dość dużej klasy procesów izotropowo-unimodalnych. Oczywiście w przypadku dowolnego procesu izotropowego, powyższe oszacowanie górne dla średniego czasu wyjścia z kuli zawsze zachodzi, ponieważ wystarczy skorzystać z wyniku jednowymiarowego: czas wyjścia z kuli jest mniejszy niż czas wyjścia z pasa, w którym kula się znajduje, a wyjście z pasa to wyjście z odcinka odpowiedniego rzutu procesu. Należy też zauważyć, że w przypadku procesów izotropowych funkcja h i jej odpowiednik dla rzutu jednowymiarowego są porównywalne.

Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego. Przypomnijmy, że wtedy funkcja odnowy V oraz jej pochodna V' są ściśle dodatnie na $(0, \infty)$. Poniżej formułujemy założenie, przy którym uzyskaliśmy w [H4] oszacowania średniego czasu pierwszego wyjścia procesu ze zbioru. Wyjaśnienie jaki jest powód stosowania tego założenia znajduję się poniżej przy okazji dyskusji na temat operatora typu Dynkina.

DEFINICJA 23. *Mówimy, że warunek* (**H**) *zachodzi, jeśli dla dowolnego* $r > 0$ *istnieje stała* $H_r \geq 1$ *taka,że*

$$V(z) - V(y) \leq H_r V'(x)(z-y), \quad gdy \quad 0 < x \leq y \leq z \leq 5x \leq 5r. \tag{26}$$

Mówimy, że zachodzi ($\mathbf{H}^*$)*, jeśli* $H_\infty = \sup_{r>0} H_r < \infty$.

Warunki (**H**) i ($\mathbf{H}^*$) rozumiemy jako nierówności typu Harnacka, ponieważ wykorzystując twierdzenie o wartości średniej, (**H**) jest implikowane przez następującą nierówność:

$$\sup_{x \leq r, y \in [x,5x]} V'(y) \leq H_r \inf_{x \leq r, y \in [x,5x]} V'(y), \qquad r > 0. \tag{27}$$

Ponadto przypomnijmy, że V' jest funkcją harmoniczną na półprostej $(0, \infty)$, dlatego niezmiennicza na skalowanie nierówność Harnacka pociąga (27). Obie nierówności kontrolują względny wzrost funkcji V. Jeśli zachodzi (**H**), to możemy wybrać stałe H_r niemalejące względem r, co zawsze czynimy. Teraz przedstawiamy kilka sytuacji, w których wiadomo, że warunek (**H**) jest spełniony.

1. X jest podporządkowanym ruchem Browna, którego subordynator jest specjalny (zobacz Lemma 7.5 w [H5]). Wtedy $H_r \equiv 1$.

2. $d \geq 3$ i wykładnik charakterystyczny $\{X_t\}_{t \geq 0}$ spełnia warunek WLSC (Twierdzenie 16).

3. $d \geq 1$ i wykładnik charakterystyczny $\{X_t\}_{t \geq 0}$ spełnia warunki WLSC i WUSC (zobacz (5.2) i Lemma 7.3 w [H5]).

4. Część gaussowska jest niezerowa (zobacz Lemma 7.4 w [H5]).

Dokładniejszy opis warunku (**H**) oraz więcej przykładów zaprezentowane są w rozdziale 7 pracy [H5]. Ostatnio, w pracy [Pre3], została uzyskana niezmiennicza na skalowanie nierówność Harnacka dla dużej klasy procesów izotropowo-unimodalnych, których wykładnik Lévy'ego-Chinczyna spełnia WUSC, zatem warunek (**H**) zachodzi dla większej klasy procesów niż ta wymieniona w [H5].

Jednym z głównych wyników prezentowanych w tym rozdziale jest następujące ostre oszacowanie na oczekiwany czas pierwszego wyjścia z kuli. Należy tutaj podkreślić, że jawny wzór na średni czas wyjścia procesu izotropowo-unimodalnego w $\mathbb{R}^d$ jest znany tylko dla izotropowego procesu α-stabilnego, $\alpha \in (0, 2]$ ([26]). Przypomnijmy, że $\delta_D(x)$ jest odległością $x \in \mathbb{R}^d$ od dopełnienia D.

Twierdzenie 24 (Theorem 4.1 w [H5]). *Niech* $\{X_t\}_{t \geq 0}$ *będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w* $\mathbb{R}^d$. *Załóżmy, że zachodzi* (**H**). *Wtedy istnieje stała* $C = C(d)$ *taka, że dla* $r > 0$,

$$\frac{C}{H_r} V(\delta_{B_r}(x)) V(r) \leq \mathbb{E}^x \tau_{B_r} \leq 2V(\delta_{B_r}(x)) V(r), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{28}$$

Zwróćmy uwagę, że zamiast $V(r)$ możemy używać funkcji $1/\sqrt{h(r)}$ lub $1/\sqrt{\psi^*(1/r)}$, ale dla zwięzłości zapisu zdecydowaliśmy się używać V. Podkreślmy, że $r \mapsto H_r$ jest funkcją niemalejącą, dlatego w oszacowaniu dolnym dla $r \leq 1$, można używać H_1 zamiast H_r otrzymując oszacowanie ze stałymi nie zależnymi od promienia (w tym zakresie). Gdy zachodzi $(\mathbf{H}^*)$, otrzymujemy jednostajne oszacowanie dla wszystkich $r > 0$. W szczególności, dla dużej klasy subordynowanych ruchów Browna (patrz dyskusja na temat $(\mathbf{H})$), otrzymujemy oszacowanie dolne ze stałą zależną tylko od wymiaru. Górne oszacowanie jest prawdziwe dla dowolnego procesu izotropowego i wynika bezpośrednio z oszacowania dla średniego czasu wyjścia z odcinka. Dowód dolnego oszacowania jest bardziej pracochłonny i wymaga innych narzędzi. Do jego dowodu wykorzystujemy operator typu Dynkina:

$$\mathcal{A}f(x) = \limsup_{s \to 0^+} \frac{\mathbb{E}^x f(X_{\tau_{B(x,s)}}) - f(x)}{\mathbb{E}^x \tau_{B(x,s)}}.$$

Podstawowym powodem stosowania tego operatora jest fakt, że bardzo często nie można policzyć wartości generatora infinitezymalnego na funkcji harmonicznej, ponieważ nie należy ona do jego dziedziny, a takiego problemu nie ma dla operatora Dynkina. Wszystkie funkcje harmoniczne w D są w dziedzinie tego operatora na zbiorze D. Ponadto z definicji, jeżeli funkcja f jest harmoniczna, to $\mathcal{A}f(x) = 0$ dla $x \in D$. Własność ta pozwala na szacowanie wartości operatora Dynkina na złożeniu funkcji odnowy V z funkcją odległości do dopełnienia kuli lub odległości do kuli. Rachunki wymagają niewielkiej regularności pochodnej V (stąd założenie $(\mathbf{H})$). Dowodzimy, że wspomniane złożenia są odpowiednio funkcją nadharmoniczną i podharmoniczną. Następnie wykorzystujemy zasadę maksimum dla operatora $\mathcal{A}$.

Wykorzystując uzyskane oszacowania dla kuli, wzór Ikedy-Watanabe i zasadę maksimum dla operatora typu Dynkina, otrzymujemy oszacowanie na średni czas pierwszego wyjścia ze zbiorów ogólniejszych niż kule.

Twierdzenie 25 (Theorem 4.6 w [H5]). *Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Załóżmy, że zachodzi $(\mathbf{H})$ i $D \subset \mathbb{R}^d$ jest otwartym, ograniczonym zbiorem klasy $C^{1,1}$ w skali $r > 0$. Wtedy istnieją stałe $c = c(d)$ i $C = C(d)$ takie, że*

$$\frac{c}{H_r} V(\delta_D(x))V(r) \leq \mathbb{E}^x \tau_D \leq C \frac{H_r}{(\mathcal{J}(r))^2} \frac{V^2(\operatorname{diam} D)}{V^2(r)} V(\delta_D(x))V(r), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie $\mathcal{J}(r) = \inf_{0<\rho\leq r} \left[V^2(\rho) \int_{B_r^c} \nu(y)dy\right]$

Z [H5, Proposition 5.2] wiadomo, że wielkość $\mathcal{J}$ jest dodatnia w otoczeniu 0 wtedy i tylko wtedy, gdy ψ spełnia warunek WUSC. Ponadto, gdy ψ spełnia globalne WLSC i WUSC, to istnieje stała $C > 0$ taka, że $H_r < C$ i $\mathcal{J}(r) > C^{-1}$ dla wszystkich $r > 0$. Przy tym założeniu otrzymujemy ostre oszacowanie dla dowolnej skali r. Jeżeli o zbiorze D założymy dodatkowo, że jest wypukły, to oszacowanie górne zachodzi ze stałą uniwersalną, zatem nie ma potrzeby zakładać własności górnego skalowania dla symbolu. Jest to konsekwencją tego, że w dowodzie zamiast wzoru Ikedy-Watanabe, stosujemy odpowiedni wynik jednowymiarowy (zobacz [H5, Corollary 4.2]). Nasze rezultaty możemy stosować nie tylko dla procesów izotropowo-unimodalnych, ale także do procesów izotropowych, których miara Lévy'ego jest absolutnie ciągła a jej gęstość jest porównywalna z funkcją unimodalną ([H5, Corollary 4.3]).

Kolejnym obiektem badań opisanym w tym rozdziale jest prawdopodobieństwo przeżycia procesu w zbiorze. Pierwszy wynik to oszacowanie dla półprostej i dla dowolnego symetrycznego procesu Lévy'ego nie będącego złożonym procesem Poissona.

Stwierdzenie 26 (Proposition 2.6 w [H5]). *Dla dowolnego symetrycznego procesu Lévy'ego w $\mathbb{R}$, który nie jest złożonym procesem Poissona mamy*

$$\mathbb{P}^x(\tau_{(0,\infty)} \geq t) \approx 1 \wedge \frac{1}{\sqrt{t\psi^*(1/x)}}, \quad t, x > 0, \tag{29}$$

gdzie stała porównywalności jest uniwersalna.

Powyższe stwierdzenie możemy zastosować także do czasu przebywania w półprzestrzeni. Niech $\mathbb{H} = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0\}$. Wtedy

$$\mathbb{P}^{(x_1,...,x_d)}(\tau_{\mathbb{H}} > t) = \mathbb{P}^{x_d}(\tau^{(d)}_{(0,\infty)} > t),$$

gdzie $\tau^{(d)}_{(0,\infty)}$ jest pierwszym czasem wyjścia pierwszej współrzędnej procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ z półprostej. Ponadto, jako wniosek ze Stwierdzenia 29, otrzymujemy górne ograniczenie na prawdopodobieństwo przeżycia w zbiorze wypukłym dla dowolnych procesów izotropowych.

$$\mathbb{P}^x(\tau_D \geq t) \leq C\left(1 \wedge \frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t}}\right), \quad t > 0,\, x \in D.$$

W szczególności powyższa nierówność zachodzi dla kul. Analogicznie dla zbiorów, których dopełnienie jest wypukłe, otrzymujemy oszacowanie dolne

$$\mathbb{P}^x(\tau_D \geq t) \geq c\left(1 \wedge \frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t}}\right), \quad t > 0,\, x \in D.$$

W szczególności wzór ten stosuje się do zewnętrza kuli. Przy dodatkowym założeniu na symbol udowodniliśmy także górne ograniczenie, a w przypadku tranzytywnym oszacowania ostre.

Twierdzenie 27 (Theorem 6.3 w [H5]). *Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$, a $\psi \in WLSC(\underline{\alpha}, 0, \underline{c}) \cap WUSC(\overline{\alpha}, 0, \overline{C})$. Niech $R > 0$ i $D = \overline{B}^c_R$.*

(i) *Wtedy istnieje stała $C^* = C^*(d, \underline{\alpha}, \underline{c}, \overline{\alpha}, \overline{C})$ taka, że*

$$\mathbb{P}^x(\tau_D > t) \leq C^*\left(\frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t} \wedge V(R)} \wedge 1\right), \qquad t > 0.$$

(ii) *Jeśli $d > \overline{\alpha}$, to*

$$\mathbb{P}^x(\tau_D > t) \approx \frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t} \wedge V(R)} \wedge 1, \qquad t > 0,$$

gdzie stała porównywalności zależy od d, $\underline{\alpha}$, $\underline{c}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{C}$.

Godnym podkreślenia faktem jest niezależność stałych od promienia kuli. W przypadku tranzytywnym $\lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty$, dlatego część ścieżek omija kulę i w ogóle w nią nie trafia. Jeśli $d > \overline{\alpha}$, to z powyższego twierdzenia wynika, że

$$\mathbb{P}^x(\tau_D = \infty) \approx \frac{V(|x| - R)}{V(R)}.$$

W rzeczywistości, to oszacowanie stanowi część jego dowodu, a nie jest jego wnioskiem. Oprócz ostrych oszacowań prawdopodobieństwa przeżycia w półprzestrzeni i dopełnieniu kuli, w pracy [H4], uzyskaliśmy jeszcze oszacowania dla ogólniejszych zbiorów, między innymi dla ograniczonych zbiorów $C^{1,1}$, zbiorów typu półprzestrzeni oraz dla zbiorów zewnętrznych o brzegu $C^{1,1}$ (D^c jest tu ograniczone).

Kolejne twierdzenie dotyczy bardzo ogólnych zbiorów, ale zostało uzyskane tylko dla izotropowego procesu stabilnego na początku naszych badań i stało się ważną motywacją do ich kontynuowania. Obecnie znane narzędzia pozwalają uzyskać odpowiednik poniższego twierdzenia w przypadku szerokiej klasy procesów izotropowo-unimodalnych, jednakże w sytuacji ogólnej użyteczność takiego twierdzenia nie jest zbyt duża, bo w przeciwieństwie do przypadku stabilnego, w przypadku ogólnym nie jest znane zachowanie funkcji Greena zbiorów nieregularnych, wartości oczekiwanej pierwszego czasu wyjścia oraz jądra Martina z biegunem w nieskończoności. W przypadku izotropowego α-stabilnego procesu Lévy'ego, przy pomocy Twierdzenia 28, uzyskaliśmy szereg jawnych oszacowań dla prawdopodobieństwa przeżycia.

Twierdzenie 28 (Theorem 2 w [H1]). *Niech $\alpha \in (0, 2)$ oraz $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowym procesem α-stabilnym w $\mathbb{R}^d$ oraz niech $T \in (0, \infty]$. Wtedy istnieje stała $C = C(d, \alpha, \kappa)$ taka, że jeśli D jest $(\kappa, T^{1/\alpha})$-pulchny, to*

$$C^{-1}\frac{s_D(x)}{s_D(A_{t^{1/\alpha}}(x))} \leq \mathbb{P}^x(\tau_D > t) \leq C\frac{s_D(x)}{s_D(A_{t^{1/\alpha}}(x))}, \quad 0 < t \leq T,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{30}$$

gdzie $s_D(x) = \mathbb{E}^x\tau_D$, gdy D jest ograniczony, a w przeciwnym przypadku s_D jest jądrem Martina w nieskończoności.

W szczególności dla $D = \overline{B_1^c}$ otrzymujemy

$$\mathbb{P}^x(\tau_D > t) \approx \begin{cases} 1 \wedge \frac{\delta_D^{\alpha/2}(x)}{(1\wedge t^{1/\alpha})^{\alpha/2}}, & d > \alpha, \\ 1 \wedge \frac{\log(1+\delta_D^{1/2}(x))}{\log(1+t^{1/2})} & d = 1 = \alpha, \\ \frac{\delta_D^{\alpha-1}(x)\wedge\delta_D^{\alpha/2}(x)}{(t^{1/\alpha}\vee\delta_D(x))^{\alpha-1}\wedge(t^{1/\alpha}\vee\delta_D(x))^{\alpha/2}}, & d = 1 < \alpha. \end{cases} \tag{31}$$

Powyższy rezultat przenosi się na kule o dowolnym promieniu, ponieważ proces α-stabilny jest samopodobny. Jeżeli $d > \alpha$, to powyższe oszacowanie pokrywają się z wynikiem z Twierdzenia 27, ponieważ $V(r) = r^{\alpha/2}$. W sytuacji $d < \alpha$ mamy do czynienia z procesem punktowo rekurencyjnym, to znaczy, że proces trafia w dowolny punkt z prawdopodobieństwem 1. Dla procesu startującego daleko od $(-1, 1)$, po upływie pewnej ilości czasu, wpływ odcinka jest podobny do punktu. Mianowicie mamy wtedy

$$\mathbb{P}^x(T_{[-1,1]} > t) \approx \mathbb{P}^x(T_{\{0\}} > t), \qquad |x|, t > 1.$$

Należy nadmienić, że w przypadku punktowo rekurencyjnym, w pracy [P3], zostały uzyskane analogiczne oszacowania dla dużej klasy procesów symetrycznych na prostej rzeczywistej.

V. Jądro ciepła Dirichleta

Najważniejszym wynikiem tego rozdziału jest przybliżona faktoryzacja (32), w której występuje jądro ciepła procesu wolnego, które zostało omówione w Rozdziale II oraz prawdopodobieństwa przeżycia, omówione w Rozdziale IV. Jądro ciepła Dirichleta pozwala na dokładne badanie własności operatorów z warunkami Dirichleta. W szczególności miara harmoniczna i funkcja Greena są wyrażone przy jego pomocy. Relatywnie ostre oszacowania jądra ciepła laplasjanu (ruchu Browna) dla obszarów $C^{1,1}$ zostały otrzymane w 2002 przez Zhanga [63]. W 2006 Siudeja [56] podał górne ograniczenie na jądra ciepła ułamkowego laplasjanu (izotropowy proces stabilny) dla zbiorów wypukłych. Natomiast w 2010 Chen, Kim i Song [15] uzyskali ostre dwustronne i jawne oszacowania jądra ciepła ułamkowego laplasjanu dla zbiorów $C^{1,1}$. Ostre oszacowania $p_D(t,x,y)$ w mniej jawnej formie są znane też dla zbiorów lipschitzowskich dla niektórych operatorów. Takie oszacowania zostały uzyskane w 2003 dla laplasjanu przez Varopoulosa. Następnie w 2010 w pracy [P1] otrzymaliśmy oszacowania dla ułamkowego laplasjanu w stożkach. Kolejnym krokiem w rozwoju tej teorii była praca [H1], gdzie uzyskano oszacowania dla ułamkowego laplasjanu dla bardzo ogólnych zbiorów. Udowodniliśmy, że zachodzi następująca przybliżona faktoryzacja jądra ciepła.

Twierdzenie 29 (Theorem 1 w [H1]). *Niech $\alpha \in (0,2)$ oraz $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie izotropowym procesem α-stabilnym w $\mathbb{R}^d$ oraz niech $T \in (0,\infty]$. Jeśli D jest $(\kappa, T^{1/\alpha})$-pulchny, to istnieje stała $C = C(d,\alpha,\kappa)$ taka, że dla $0 < t < T$ i $x,y \in \mathbb{R}^d$,*

$$C^{-1}\mathbb{P}^x(\tau_D > t/2)\mathbb{P}^y(\tau_D > t/2) \leq \frac{p_D(t,x,y)}{p_t(x-y)} \leq C\mathbb{P}^x(\tau_D > t/2)\mathbb{P}^y(\tau_D > t/2)\,. \tag{32}$$

Porównywalność w (32) jest jednostajna w czasie i przestrzeni, na przykład dla stożków, jednorodnych zbiorów lipschitzowskich oraz zewnętrznych zbiorów klasy $C^{1,1}$. Ponadto używając Twierdzenia 28, nierówność (32) można zapisać w bardziej jawnej postaci. Dla ułamkowego laplasjanu znane są wzory oraz oszacowania funkcji Greena dla wielu zbiorów, dlatego korzystając z Twierdzenia 28 otrzymujemy ostre i jawne oszacowania jądra ciepła dla dużej klasy zbiorów.

Dowód Twierdzenia 29 w głównej mierze opiera się na Lemacie 3. Wielkości, które pojawiają się w tym lemacie oraz prawdopodobieństwo przeżycia, szacujemy wykorzystując brzegową nierówność Harnacka. Pozwoliło to w znaczący sposób zredukować rachunki w stosunku na przykład do pracy [15] oraz otrzymać oszacowania dla dużych czasów i zbiorów nieograniczonych. Wcześniej przy dowodzeniu dolnego oszacowania wykorzystywano między innymi mocną ultrakontraktywność operatorów przejścia procesu zabitego, co wiązało się z ograniczeniami na zbiór D (operatory muszą być zwarte) oraz paraboliczną nierówność Harnacka.

Powyższe wyniki zostały uogólnione na dużą klasę podporządkowanych ruchów Browna spełniających słabe warunki skalowania [15, 17, 16, 18], ale dowody były oparte na połączeniu pomysłów z prac [15] i [H1]. To oznacza, że ważnym narzędziem była wciąż brzegowa nierówność Harnacka i znajomość oszacowań na funkcje Greena zbiorów $C^{1,1}$. Niestety w przypadku ogólniejszych procesów izotropowo-unimodalnych nie były znane oszacowania funkcji Greena. Poza tym brzegowa nierówność Harnacka może nie zachodzić, co na przykład dzieje się dla tak zwanego uciętego procesu stabilnego. W pracy [H4] zmodyfikowaliśmy metody dowodowe, dzięki czemu mogliśmy je zastosować między innymi do wspomnianego procesu i zbiorów o regularnym brzegu. Przy szacowaniu jadra ciepła $p_D(t,x,y)$ izotropowo-unimodalnych procesów Lévy'ego dla zbiorów D klasy $C^{1,1}$ użyliśmy oszacowań na jądro ciepła procesu wolnego $p(t,x,y) = p_t(y-x)$, z [H3] i oszacowań funkcji podharmonicznych przy brzegu D z pracy [H5].

Zaczniemy od pewnego oszacowania dla zbiorów ograniczonych. Niech zbiór D będzie otwarty i ograniczony. Załóżmy, że $p_t(0)$ jest skończone dla dowolnego $t > 0$, co jest równoważne temu, że $e^{-t\psi}$ jest całkowalna dla dowolnego $t > 0$. Wtedy operatory całkowe na $L^2(D)$ o jądrach $p_D(t,x,y) \le p_t(0)$ są zwarte, a nawet operatorami Hilberta-Schmidta. Wiadomo, że istnieją wartości własne operatora $-\mathcal{L}|_D$: $0 < \lambda_1(D) < \lambda_2(D) \le \ldots$ i baza ortonormalna funkcji własnych $\phi_1 \ge 0, \phi_2, \phi_3 \ldots$ takich, że

$$\phi_k(x) = e^{\lambda_k(D)t} \int p_D(t,x,z)\phi_k(z)dz.$$

Niech $\lambda_k := \lambda_k(D)$. Następująca reprezentacja jądra ciepła w rozważanej sytuacji jest bardzo użyteczna,

$$p_D(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\phi_k(x)\phi_k(y). \tag{33}$$

Z powyższej równości wynika, że jądro ciepła dla dużego czasu t zanika jak $e^{-\lambda_1 t}$, dlatego w następnym stwierdzeniu prezentujemy oszacowanie na pierwszą wartość własną. Przypominamy, że nasze oszacowania są wyrażone przy pomocy V, funkcji odnowy procesu drabinowego dla jednowymiarowego rzutu z $\{X_t\}_{t\ge 0}$, ale równie dobrze mogą być zapisane przy pomocy wykładnika Lévy'ego-Chinczyna lub funkcji h.

W poniższym twierdzeniu prezentujemy ostre oszacowania dla dowolnych ograniczonych zborów $C^{1,1}$. Poza tym oszacowania są globalne, czyli zachodzą dla wszystkich $t > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Twierdzenie 30 (Theorem 4.5 w [H4]). *Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\ge 0}$ jest izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$, a $\psi \in$ WLSC $\cap$ WUSC. Wtedy istnieje $r_0 = r_0(d,\psi) > 0$ takie, że dla $0 < r < r_0$ oraz dla otwartych i ograniczonych $D \subset \mathbb{R}^d$ klasy $C^{1,1}$ w skali r takich, że $\nu(\operatorname{diam} D) > 0$ mamy, dla $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$,*

$$p_D(t,x,y) \approx \mathbb{P}^x(\tau_D > t/2)\mathbb{P}^y(\tau_D > t/2)p\left(t \wedge V^2(r), x, y\right) \tag{34}$$

oraz

$$\mathbb{P}^x\left(\tau_D > t\right) \approx e^{-\lambda_1 t}\left(\frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t} \wedge V(r)} \wedge 1\right). \tag{35}$$

Ponadto, jeżeli spełnione są globalne warunki skalowania, to możemy położyć $r_0 = \infty$, a stała porównywalności zależy tylko od d, $\operatorname{diam} D/r$ oraz charakterystyk skalowania ψ.

W [H4, Proposition 4.4] uzyskaliśmy ostre oszacowania pierwszej wartości własnej λ_1 wyrażone przy pomocy funkcji odnowy V. Godnym podkreślenia jest fakt, że zakładamy tylko lokalne warunki na gęstość miary Lévy'ego (równoważnie WLSC i WUSC w nieskończoności) i nie zakładamy nic o jej zachowaniu w nieskończoności. W szczególności miara Lévy'ego może mieć nośnik ograniczony, a wtedy brzegowa nierówność Harnacka nie zachodzi. Bezpośrednim wnioskiem z powyższego twierdzenia przy wykorzystaniu mocnej ultrakontraktywności uzyskanej w pracy [D2] jest ostre oszacowanie na *stan podstawowy* ϕ_1. Na przykład otrzymujemy oszacowanie dla kul ze stałymi niezależnymi od promienia.

WNIOSEK **31** (Corollary 4.7 w [H4]). *Załóżmy, że ψ spełnia globalne warunki* WLSC *i* WUSC. *Niech $r > 0$ oraz $\phi_1^{(r)}$ będzie nieujemną funkcją własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda_1(B_r)$. Istnieje wtedy stała $c = c(d, \psi)$ taka, że*

$$c^{-1}\frac{V(\delta_D(x))}{r^{d/2}V(r)} \le \phi_1^{(r)}(x) \le c\frac{V(\delta_D(x))}{r^{d/2}V(r)}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dowód Twierdzenia 30 składa się z trzech kroków. Na początek dowodzimy ograniczenia górnego dla małych czasów. Następnie uzyskujemy dolne ograniczenie, także dla małych czasów. Ostatni krok to wykorzystanie równości (33) do otrzymania oszacowań dla dużych czasów. Górne ograniczenie uzyskaliśmy wykorzystując Lemat 3 dla dopełnienia kuli.

Twierdzenie 32 (Theorem 2.1 w [H4]). *Niech $\{X_t\}_{t\ge 0}$ będzie izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Załóżmy, że $p(t,x) \le tF(|x|)$, $t > 0$, $x \ne 0$, gdzie $F \ge 0$ jest nierosnąca. Niech* (**H**) *zachodzi, $R > 0$ i $D = \overline{B}_R^c$. Wtedy, dla $0 < t \le V^2(|x-y|)$ i $x, y \in D$, mamy*

$$p_D(t,x,y) \le C\frac{H_R^2}{\mathcal{J}(R)^4}\left(\frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t}\wedge V(R)}\wedge 1\right)\left(\frac{V(\delta_D(y))}{\sqrt{t}\wedge V(R)}\wedge 1\right)tF(|x-y|/9), \tag{36}$$

gdzie $\mathcal{J}(r) = \inf_{0<\rho\le r}\left[V^2(\rho)\int_{B_r^c}\nu(y)dy\right]$.

Zwróćmy uwagę, że wykorzystując Stwierdzenie 11, zawsze możemy wziąć $F(r) = \psi^*(1/r)$, ale jak wiadomo z Twierdzenia 13, jest to optymalny wybór tylko przy założeniu słabych skalowań na symbol procesu. Wynik ten może być jednak wykorzystany dla szerszej klasy procesów z innym wyborem funkcji F, zobacz (21). W szczególności dla ruchu Browna podporządkowanego subordynatorem gamma ([Pre2]). Ponadto, w pracy [Pre3], udowodniliśmy między innymi, że zachodzi niezmiennicza na skalowanie nierówność Harnacka dla tego typu procesów, co w szczególności pociąga warunek (**H**). Dlatego możemy wykorzystać powyższe twierdzenia do procesów rozważanych w tych pracach.

Przy założeniu globalnych warunków skalowania dla symbolu, dostępne są ostre oszacowania jądra ciepła procesu wolnego (Twierdzenie 8). Zachodzi również (**H***), zatem korzystając z Twierdzenia 32 otrzymujemy następujące ograniczenie górne.

Twierdzenie 33 (Theorem 2.6 w [H4]). *Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\ge 0}$ jest izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Niech $R > 0$ oraz D będzie otwartym zbiorem spełniającym własność zewnętrznej kuli w skali R. Przypuśćmy, że dla ψ zachodzą globalnie* WLSC *i* WUSC. *Wtedy istnieje $C = C(d,\psi)$ taka, że dla dowolnego $t > 0$ i $x, y \in D$,*

$$p_D(t,x,y) \le C\left(\frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t}\wedge V(R)}\wedge 1\right)\left(\frac{V(\delta_D(y))}{\sqrt{t}\wedge V(R)}\wedge 1\right)p(t,x,y).$$

Przejdziemy teraz do omówienia drugiego kroku dowodu Twierdzenia 30. Konsekwencją trzeciej nierówności z Lematu 3 jest dolne ograniczenie na jądro ciepła Dirichleta. W poniższym twierdzeniu prezentujemy oszacowanie na jądro ciepła sumy dowolnych dwóch kul o tym samym promieniu. Ponieważ dla jąder ciepła zachodzi monotoniczność ze względu na zawieranie zbiorów, takie oszacowanie jest wystarczające dla zbadania dowolnych zbiorów klasy $C^{1,1}$.

Twierdzenie 34 (Theorem 3.3 w [H4]). *Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Niech $R > 0$ i $\psi \in WLSC(\underline{\alpha}, R^{-1}, \underline{c}) \cap WLSC(\overline{\alpha}, R^{-1}, \overline{C})$ oraz $D = B(z_1, R) \cup B(z_2, R)$. Wtedy istnieją stałe $c = c(d, \psi)$ i $C = C(d, \psi)$ takie, że*

$$p_D(t, x, y) \geq C \left(\frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t}} \wedge 1 \right) \left(\frac{V(\delta_D(y))}{\sqrt{t}} \wedge 1 \right) \left(p_{t/2}(0) \wedge [t\, \nu(2|x-y| \wedge \mathrm{diam}(D))] \right),$$

gdy $0 < t \leq cV^2(R)$, $x, y \in D$, $\delta_D(x) = \delta_{B(z_1,R)}(x)$ oraz $\delta_D(y) = \delta_{B(z_2,R)}(y)$.

Poza zbiorami ograniczonymi, w pracy [H4], rozważaliśmy jeszcze pewne zbiory nieograniczone. Dokładniej zbiory zewnętrzne, których dopełnienia są zbiorami ograniczonymi oraz zbiory typu półprzestrzeń, czyli zawartych pomiędzy dwiema półprzestrzeniami o równoległych brzegach. Oszacowania dla zbiorów zewnętrznych (na przykład dla dopełnienie kuli) były sporym wyzwaniem. Było to spowodowane tym, że warunek na brzeg $C^{1,1}$ jest w oczywisty sposób warunkiem lokalnym i nie specyfikuje on geometrii zbioru w nieskończoności, podczas gdy właśnie geometria ta wpływa w istotny sposób na zachowanie jądra ciepła dla dużych czasów. Jak dotąd znane były tylko oszacowania dla procesu stabilnego ([H1, 20]) i relatywistycznego ([17]). Wynik otrzymany dla zbiorów zewnętrznych (Twierdzenie 35) w pracy [H4], jest nowy nawet dla sumy dwóch niezależnych procesów stabilnych o różnych wykładnikach stabilności. Godnym podkreślenia jest fakt, że stałe porównywalności są niezależne na dylatacje zbioru, co jest dodatkowym plusem naszych metod. Wobec powyższego kolejne twierdzenie może być uznane za jeden z głównych rezultatów [H4]. W przypadku ułamkowgo laplasjanu analogiczny wynik został otrzymany w pracy [H1] (Theorem 3).

Twierdzenie 35 (Theorem 5.4 w [H4]). *Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Niech $\psi \in WLSC(\underline{\alpha}, 0, \underline{c}) \cap WUSC(\overline{\alpha}, 0, \overline{C})$ oraz $d > \overline{\alpha}$. Załóżmy, że D jest zbiorem $C^{1,1}$ w skali R_1 oraz $D^c \subset \overline{B_{R_2}}$. Wtedy istnieją stałe $c_* = c_*(d, \psi)$, $c^* = c^*(d, \psi)$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$,*

$$c_* \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{4+2d} \left(\frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t} \wedge V(R_1)} \wedge 1 \right) \left(\frac{V(\delta_D(y))}{\sqrt{t} \wedge V(R_1)} \wedge 1 \right) p(t, x, y) \leq p_D(t, x, y)$$

oraz

$$p_D(t, x, y) \leq c^* \left(\frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t} \wedge V(R_1)} \wedge 1 \right) \left(\frac{V(\delta_D(y))}{\sqrt{t} \wedge V(R_1)} \wedge 1 \right) p(t, x, y).$$

Natychmiastowym wnioskiem z tego twierdzenia są ostre oszacowania prawdopodobieństwa przeżycia procesu w zbiorze zewnętrznym. Mianowicie mamy (globalne w czasie i przestrzeni),

$$\mathbb{P}^x(\tau_D > t) \approx \frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t} \wedge V(R_1)} \wedge 1.$$

Ostatnie twierdzenie omawiane w tym rozdziale opisuje zachowanie jądra ciepła dla zbiorów typu półprzestrzeń. Półprzestrzeń na poziomie $a \in \mathbb{R}$ będziemy oznaczać przez $\mathbb{H}_a = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 > a\}$.

Twierdzenie 36 (Theorem 5.8 w [H4]). *Załóżmy, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest izotropowo-unimodalnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Niech ψ spełnia globalne warunki* WLSC *oraz* WUSC*, D będzie $C^{1,1}$ w skali R oraz $\mathbb{H}_a \subset D \subset \mathbb{H}_b$. Wtedy, dla $x, y \in \mathbb{R}^d$ i $t > 0$, mamy*

$$p_D(t, x, y) \approx \mathbb{P}^x(\tau_D > t)\mathbb{P}^y(\tau_D > t)p(t, x, y) \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}^x(\tau_D > t) \approx \frac{V(\delta_D(x))}{\sqrt{t}} \wedge 1,$$

a stałe w oszacowaniu zależą tylko od d, ψ, $a - b$ oraz R.

W sytuacji powyższych dwu twierdzeń w szczególności otrzymujemy, że $\mathbb{P}^x(\tau_D > t) \approx \mathbb{P}^x(\tau_D > t/2)$. Dlatego, przy odpowiednich ograniczeniach na czas t, we wszystkich trzech prezentowanych przypadkach zachodzi przybliżona faktoryzacja jądra ciepła typu (32).

Bezpośrednimi wnioskami z tych oszacowań są oszacowania innych funkcji ważnych w teorii potencjału, to znaczy funkcji Greena i jądra Poissona. Można też oszacować rozkład czasu trafienia rozważanych procesów w zbiory zwarte.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Poza pięcioma pracami, stanowiącymi jednotematyczny cykl publikacji, po uzyskaniu stopnia doktora opublikowałem jeszcze pięć artykułów, dalsze dwa zostały zaakceptowane do publikacji, a kolejne trzy zostały wysłane do redakcji. Łącznie jestem autorem lub współautorem 18 artykułów. Liczba cytowań, według bazy Web of Science (na dzień 16.02.2017), jest równa 132 (118 bez autocytowań) zaś h-indeks (indeks Hirscha) jest równy 7. Sumaryczny *impact factor* czasopism dla pięciu publikacji wchodzących w skład *osiągnięcia naukowego*, według listy Journal Citation Reports wynosi 7,044, a sumaryczny *impact factor* czasopism dla wszystkich publikacji wynosi 13,008, zob. Tablicę 1.

Tablica 1: Impact factor czasopism według listy Journal Citation Report zgodnie z rokiem opublikowania (lub z roku 2015 dla publikacji z 2016 i 2017 roku).

praca	czasopismo	data publikacji	impact factor
[H1]	Annals Prob.	2010	1,470
[H2]	Potential Anal.	2014	0,992
[H3]	J. Funct. Anal.	2014	1,322
[H4]	Stoch. Pr. Appl.	2014	1,056
[H5]	Prob. Th. Rel. Fields	2015	2,204
[P1]	Colloq. Math.	2010	–
[P2]	Colloq. Math	2012	0,403
[P3]	Potential Anal.	2016	0,956
[P4]	J. Math. Anal. Appl.	2017	1,014
[P5]	Potential Anal.	2017	0,956
[P6]	Trans. Amer. Math. Soc.	2017	1,196*
[P7]	Prob. Math. Stat.	2017	0,315**
[D1]	Illinois J. Math	2007	0,558
[D2]	Prob. Math. Stat.	2008	–
[D3]	Potential Anal.	2008	0,566
		Suma:	13,008

* - praca [P6] została przyjęta do druku we wrześniu 2015 r.
** - praca [P7] została przyjęta do druku w lutym 2016 r.

Lista prac po uzyskaniu stopnia doktora:

[P1] K. Bogdan, T. Grzywny. *Heat kernel of fractional Laplacian in cones,* Colloquium Mathematicum 118(2), 365–377 (2010).

[P2] T. Grzywny, M. Ryznar. *Potential theory of one-dimensional geometric stable processes*, Colloquium Mathematicum 129(1), 7–40 (2012).

[P3] T. Grzywny, M. Ryznar. *Hitting times of points and intervals for symmetric Lévy processes,* Potential Analysis, 1–39, DOI:10.1007/s11118-016-9600-z (2016).

[P4] W. Cygan, T. Grzywny. *Heat content for convolution semigroups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 446(2). 1393–1414 (2017).

[P5] T. Grzywny, K. Szczypkowski. *Kato classes for Lévy processes, Potential Analysis*, 1–32, DOI:10.1007/s11118-017-9614-1 (2017).

[P6] W. Cygan, T. Grzywny, B. Trojan. *Asymptotic behavior of densities of unimodal convolution semigroups* , w druku w Transactions of the American Mathematical Society, 1–22, DOI: 10.1090/tran/6830.

[P7] T. Grzywny, T. Jakubowski, G. Żurek. *Green function for gradient perturbation of unimodal Lévy processes*, w druku w Probability and Mathematical Statistics, 1–25 (`http://www.math.uni.wroc.pl/~pms/forthcoming.php`).

[Pre1] T. Grzywny, K.-Y. Kim, P. Kim. *Estimates of Dirichlet heat kernel for symmetric Markov processes*, 1–40, arxiv: http://arxiv.org/abs/1512.02717.

[Pre2] T. Grzywny, M. Ryznar and B. Trojan. *Asymptotic behaviour and estimates of slowly varying convolution semigroups*, 1–35, arxiv: http://arxiv.org/abs/1606.04178.

[Pre3] T. Grzywny, M. Kwaśnicki. *Potential kernels, probabilities of hitting a ball, harmonic functions and the boundary Harnack inequality for unimodal Lévy processes*, 1–34, arxiv: https://arxiv.org/abs/1611.10304.

Mój dorobek naukowy dopełniają jeszcze poniższe trzy publikacje wchodzące w skład rozprawy doktorskiej, które nie będą tutaj omówione.

[D1] T. Grzywny, M. Ryznar, *Estimates of Green Function for some perturbations of fractional Laplacian*, Illinois Journal of Mathematics 51(4), 1409–1438 (2007).

[D2] T. Grzywny, *Intrinsic ultracontractivity for Lévy processes*, Probability and Mathematical Statistics 28, 91–106 (2008).

[D3] T. Grzywny, M. Ryznar, *Two-sided optimal bounds for Green functions of half-spaces for relativistic α-stable process*, Potential Analysis 28(3), 201–239 (2008).

Przedstawię teraz wyniki uzyskane w pracach [P1]-[P7] oraz [Pre1]-[Pre3].

Prawdopodobieństwa trafienia

Głównymi wynikami pracy [P3] były oszacowania i asymptotyki prawdopodobieństwa trafienia w punkt i odcinek po czasie $t > 0$ dla punktowo rekurencyjnych symetrycznych procesów Lévy'ego na prostej. Oszacowanie na prawdopodobieństwo trafienia w 0 po czasie $t > 0$, gdy symbol procesu spełnia WLSC z wykładnikiem $\underline{\alpha} > 1$, jest następującej postaci:

$$\mathbb{P}^x(T_{\{0\}} > t) \approx \frac{1}{t\psi^{-1}(1/t)|x|\psi(1/x)} \wedge 1, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

W przypadku gdy założymy o procesie, że jest unimodalny, nie musimy zakładać nic o symbolu i otrzymujemy

$$\mathbb{P}^x(T_{\{0\}} > t) \approx \frac{K(x)}{K(1/\psi^{-1}(1/t))} \wedge 1,$$

gdzie K jest skompensowanym jądrem potencjału

$$K(x) = \int_0^\infty (p_t(0) - p_t(x))dt.$$

Oprócz czasu trafiania w punkt, dla dowolnego symetrycznego procesu Lévy'ego, którego wykładnik charakterystyczny spełnia własność WLSC z $\underline{\alpha} > 1$, otrzymaliśmy oszacowania prawdopodobieństwa trafienia w odcinek po ustalonym czasie $t > 0$. W trakcie badań udowodniliśmy między innymi globalną nierówność Harnacka dla takich procesów, co było dość zaskakujące, ponieważ poza skalowaniami nie zakładamy nic więcej. W szczególności miara Lévy'ego może być czysto atomowa.

Ciepło całkowite

W pracy [P4] rozważaliśmy wielkość zwaną *ciepłem całkowitym* dla ogólnych procesów Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$, to jest

$$H_\Omega(t) = \int_\Omega \mathbb{P}^x(X_t \in \Omega)dx.$$

Otrzymaliśmy oszacowania funkcji H_Ω opisane za pomocą funkcji Pruitta h oraz asymptotyczne zachowanie przy $t \to 0^+$. Wspomnianą asymptotykę uzyskaliśmy dla ogólnych procesów Lévy'ego o skończonym wahaniu. Do tego celu użyliśmy teorii półgrup pokazując, że funkcje lipschitzowskie są w dziedzinie generatora infinitezymalnego. W tym przypadku

$$|\Omega| - H_\Omega(t) \sim tC(\Omega),$$

gdzie stała $C(\Omega)$ jest podana jawnym wzorem i silnie zależy od procesu. Ponadto, opisaliśmy także asymptotyczne zachowanie ciepła całkowitego dla procesów izotropowych, których wykładnik charakterystyczny ψ jest funkcją regularnie zmieniającą się w nieskończoności o wykładniku $\alpha > 1$. W tej sytuacji

$$|\Omega| - H_\Omega(t) \sim 1/\psi^{-1}(1/t)c(d,\alpha)Per(\Omega),$$

gdzie $Per(\Omega)$ jest wariacyjną miarą brzegu zbioru. W przypadku regularnych zbiorów, na przykład o brzegu lipschitzowskim, jest ona tożsama z miarą Hausdorffa brzegu zbioru.

Asymptotyka jądra ciepła

Klasyczny wynik uzyskany przez Pólya ($d = 1$) oraz Blumenthala i Getoora ($d \geq 2$) podaje asymptotyczne zachowanie jądra ciepła izotropowych procesów α-stabilnych, $\alpha \in (0, 2)$:

$$\lim_{t|x|^{-\alpha} \to 0} \frac{p_t(x)}{t|x|^{-d-\alpha}} = \mathcal{A}_{d,\alpha}, \tag{37}$$

gdzie $\mathcal{A}_{d,\alpha}$ jest pewną stałą. W artykule [P6] rozważaliśmy izotropowo-unimodalne procesy Lévy'ego, których symbole są funkcjami regularnie zmieniającymi się w 0 lub nieskończoności. Uzyskaliśmy istnienie analogicznej granicy jak w przypadku stabilnym, gdy wykładnik regularności symbolu jest ściśle pomiędzy 0 i 2. Należy podkreślić, że otrzymane granice są jednostajne przy odpowiednim związku czasu t i położenia x. Ponadto udowodniliśmy, że na odwrót, istnienie takiej granicy pociąga regularną zmienność symbolu. Głównym wynikiem tej pracy jest otrzymanie analogonu Twierdzenia 13, gdzie zamiast nierówności występują granice. Poza zachowaniem poza przekątną badaliśmy także asymptotyczne zachowanie na przekątnej.

Metody wypracowane w [P6] uogólniliśmy w artykule [Pre2]. Wyznaczyliśmy w niej asymptotyczne zachowanie jąder ciepła zarówno na przekątnej jak i poza nią, gdy symbol należy do tak zwanej klasy de Haana, to jest podklasy funkcji wolno zmieniających się. Udowodniliśmy, że jest to równoważne stwierdzeniu, że gęstość miary Lévy'ego zmienia się regularnie z wykładnikiem $-d$.

Klasy Kato

Klasy Kato pełnią istotną rolę zarówno w teorii procesów stochastycznych jak i teorii operatorów pseudoróżniczkowych. Jednak ich definicja zależy od tego przez kogo jest wykorzystywana. Mianowicie, w przypadku podejścia probabilistycznego, warunkiem definiującym klasę Kato jest istnienie następującej granicy, która w pewien sposób opisuje małość w czasie

$$\lim_{t \to 0^+} \left[\sup_x \mathbb{E}^x \left(\int_0^t |q(X_u)| \, du \right) \right] = 0 \,, \tag{38}$$

gdzie q jest funkcją borelowską na przestrzeni stanów procesu $\{X_t\}_{t \geq 0}$. Wykorzystując lemat Khas'minskiego powyższy warunek jest wystarczający, żeby wykazać lokalną regularność półgrupy Feynmana-Kaca (Schrödingera)

$$\widetilde{P}_t f(x) = \mathbb{E}^x \left[\exp \left(- \int_0^t q(X_u) \, du \right) f(X_t) \right] .$$

Alternatywna definicja wywodząca się z teorii operatorów opisuje małość w przestrzeni

$$\lim_{r \to 0^+} \left[\sup_x \mathbb{E}^x \left(\int_0^\infty e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{B(x,r)}(X_u) |q(X_u)| \, du \right) \right] = 0 \,, \tag{39}$$

dla pewnego (wszystkich) $\lambda > 0$. Zauważmy, że jeśli przez G^λ oznaczymy rezolwentę, to powyższą granicę można zapisać jako

$$\lim_{r \to 0^+} \left[\sup_x G^\lambda (\mathbf{1}_{B(x,r)} |q|)(x) \right] = 0.$$

Głównym wynikiem pracy [P5] jest odpowiedź na pytanie kiedy te dwie definicje są równoważne dla ogólnych procesów Lévy'ego.

Twierdzenie 37 (Theorem 1.1 in [P5]). *Niech $\{X_t\}_{t \geq 0}$ będzie dowolnym procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Warunki* (38) *oraz* (39) *nie są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy* 0 *jest regularne dla* $\{0\}$, *to znaczy, że* $\mathbb{P}^0(T_{\{0\}} = 0) = 1$.

Poza tym warunkiem probabilistycznym podaliśmy też równoważny opis analityczny przy użyciu wykładnika charakterystycznego. Ponadto, w przypadku gdy te definicje nie są równoważne, opisaliśmy szczegółowo każdą z tych klas. Należy podkreślić, że powyższe twierdzenie zachodzi dla *dowolnego* procesu Lévy'ego, a przeprowadzone rozumowania zależą od jego struktury, zwłaszcza dla procesów niesymetrycznych.

Wolno zmieniające się symbole

W pracach [H1]-[H5] większość wyników dotyczy procesów izotropowo-unimodalnych, których wykładnik charakterystyczny spełnia słabe warunki skalowania WLSC i WUSC a przynajmniej WLSC. Natomiast procesy, których symbol zachowuje się w nieskończoności na przykład jak logarytm, są bardzo słabo zbadane. W pracy [P2] badaliśmy proces geometrycznie stabilny ($\psi(\xi) = \ln(1 + |\xi|^{\alpha})$, $\alpha \in (0, 2]$) na prostej, dowodząc między innymi niezmienniczą na skalownie nierówność Harnacka i oszacowania funkcji Greena i jądra Poissona dla odcinka i półprostej. Był to pierwszy tego typu wynik dla procesów o wolno zmieniającym się symbolu. Następnie, w pracy [Pre2], skupiliśmy się na oszacowaniach jądra ciepła i funkcji Greena całej przestrzeni dla procesów, których wykładniki Lévy'ego-Chinczyna nie spełniają WLSC. Otrzymaliśmy między innymi ostre oszacowania jądra ciepła procesów o gęstości miary Lévy'go postaci $\frac{\ell(1/|x|)}{|x|^d}$, gdzie ℓ jest funkcją ograniczoną i wolno zmieniającą się w nieskończoności. Symbol takiego procesu jest wtedy też funkcją wolno zmieniającą się i jest asymptotycznie równy

$$\psi(\xi) \sim \int_1^{|\xi|} \frac{\ell(s)}{s} ds.$$

Przy tym założeniu jądro ciepła posiada następujące oszacowanie

$$p_t(x) \approx t\frac{\ell(1/|x|)}{|x|^d} e^{-t\psi(1/|x|)}.$$

Należy tutaj podkreślić, że w tej sytuacji funkcja p_t nie jest ograniczoną i nie wyraża się przy pomocy odwrotnej transformaty Fouriera, dlatego nie można używać tutaj standardowych oszacowań z analizy fourierowskiej omówionych powyżej.

Artykuł [Pre3] w głównej mierze poświęcony jest procesom, dla których ψ nie spełnia WLSC. Uzyskaliśmy oszacowanie na prawdopodobieństwo trafienia w kule przez proces startujący z jej zewnętrza oraz wzmocniliśmy oszacowanie na funkcję Greena całej przestrzeni z pracy [H2] oraz [Pre2]. Ponadto udowodniliśmy niezmienniczą na skalowanie brzegową nierówność Harnacka, w szczególności nierówność Harnacka przy dość słabym założeniu na gęstość miary Lévy'ego.

Jądro ciepła zabitych procesów Markowa

Tematyką jądra ciepła z warunkiem Dirichleta zajmowaliśmy się również w pracach [P1], [P3] oraz [Pre1]. W [P1] badaliśmy jądra ciepła dla stożków dla ułamkowego laplasjanu otrzymując ostre oszacowania. Był to pierwszy tego typu wynik dla zbioru nieograniczonego i operatora nielokalnego. Badania te stanowiły też pierwszy etap badań rozwiniętych później w pracy [H1]. Artykuł [P3] jest głównie poświęcony prawdopodobieństwu trafienia w punkt i odcinek dla ogólnych symetrycznych procesów Lévy'ego na prostej, ale dodatkowo jako zastosowanie otrzymanych oszacowań uzyskaliśmy ostre ograniczenia na jądro ciepła procesu zabitego po trafieniu w odcinek dla procesów izotropowo-unimodalnych, dla których symbole spełniają globalne własności skalowania z wykładnikami pomiędzy 1 a 2. Otrzymaliśmy zatem uzupełnienie Twierdzenia 35, gdy $1 = d < \underline{\alpha}$. W tej sytuacji faktoryzacja (32) także jest prawdziwa, tylko oszacowania prawdopodobieństwa przeżycia są bardziej złożone niż w sytuacji tranzytywnej (Twierdzenie 35). Należy podkreślić, że poza przypadkiem stabilnym rozwiązanym w pracy [H1] nie były do tej pory znane oszacowania jądra ciepła dopełnienia odcinka, gdy proces jest rekurencyjny.

Oprócz procesów Lévy'ego rozważaliśmy także bardziej ogólne procesy Markowa. W artykule [Pre1] uzyskaliśmy ostre oszacowania jądra ciepła zabitych procesów Markowa, których miary skoków są porównywalne z miarą Lévy'ego procesu izotropowo-unimodalnego. Poza tym, że otrzymane wyniki zachodzą dla szerokiej klasy procesów Markowa, są one też nowe dla procesów Lévy'ego, ponieważ w tej pracy rozważaliśmy zbiory o brzegu, który jest mniej gładki niż $C^{1,1}$.

Zaburzenia gradientowe

Artykuł [P7] poświęcony jest badaniu operatora $\mathcal{L}+b(x)\cdot\nabla$ na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, gdzie $\mathcal{L}$ jest generatorem procesu izotropowo-unimodalnego, którego symbol spełnia warunki skalowania WLSC i WUSC z wykładnikami większymi od 1, a b jest polem wektorowym z odpowiedniej klasy Kato. Operator $\mathcal{L}$ jest wyższego rzędu niż ∇, zatem $\mathcal{L}+b(x)\cdot\nabla$ można traktować jako operator $\mathcal{L}$ zaburzony operatorem niższego rzędu. Głównym wynikiem pracy jest porównywalność funkcji Greena tego operatora z funkcją Greena operatora niezaburzonego na ograniczonych zbiorach klasy $C^{1,1}$, przy dodatkowym założeniu regularności gęstości miary Lévy'ego. W szczególności wszystkie podporządkowane ruchy Browna spełniają to założenie. Podstawowym narzędziem jest tutaj wzór Duhamela dla funkcji Greena, który udowodniliśmy w pracy [P7]

$$\tilde{G}_D(x,y) = G_D(x,y) + \int_D \tilde{G}_D(x,z)b(z)\cdot\nabla_z G_D(z,y)dz.$$

Tutaj $\tilde{G}_D(x,y)$, $G_D(x,y)$ są odpowiednio funkcjami Greena dla zbioru D dla operatora zaburzonego i niezaburzonego. Bezpośrednim wnioskiem z tej porównywalności jest uzyskanie niezmienniczej na skalowanie brzegowej nierówności Harnacka dla zaburzonego operatora.

Literatura

[1] S. Aljančić, D. Arandelović. 0-regularly varying functions. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 22(36):5–22, 1977.

[2] D. Applebaum. Lévy processes—from probability to finance and quantum groups. *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(11): 1336–1347, 2004.

[3] M. T. Barlow, A. Grigor'yan, T. Kumagai. Heat kernel upper bounds for jump processes and the first exit time. *J. Reine Angew. Math.*, 626:135–157, 2009.

[4] R. F. Bass, M. Kassmann. Harnack inequalities for non-local operators of variable order. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(2):837–850, 2005.

[5] R. F. Bass, D. Levin. Harnack inequalities for jump processes. *Potential Anal.*, 17:375–388, 2002.

[6] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[7] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[8] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[9] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor. Some theorems on stable processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:263–273, 1960.

[10] K. Bogdan, K. Burdzy, Z.-Q. Chen. Censored stable processes. *Probab. Theory Related Fields*, 127(1):89–152, 2003.

[11] L. A. Caffarelli, A. Vasseur. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. *Ann. of Math. (2)*, 171(3):1903–1930, 2010.

[12] Z.-Q. Chen, P. Kim. Global Dirichlet Heat Kernel Estimates for Symmetric Lévy Processes in Half-Space. *Acta Appl. Math.*, 146:113–143, 2016.

[13] Z.-Q. Chen, P. Kim, T. Kumagai. Global heat kernel estimates for symmetric jump processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(9):5021–5055, 2011.

[14] Z.-Q. Chen, P. Kim, T. Kumagai. On heat kernel estimates and parabolic Harnack inequality for jump processes on metric measure spaces. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 25(7):1067–1086, 2009.

[15] Z.-Q. Chen, P. Kim, R. Song. Heat kernel estimates for the Dirichlet fractional Laplacian. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 12(5):1307–1329, 2010.

[16] Z.-Q. Chen, P. Kim, R. Song. Dirichlet heat kernel estimates for $\Delta^{\alpha/2}+\Delta^{\beta/2}$. *Illinois J. Math.*, 54(4):1357–1392, 2012.

[17] Z.-Q. Chen, P. Kim, R. Song. Global heat kernel estimate for relativistic stable processes in exterior open sets. *J. Funct. Anal.*, 263(2):448–475, 2012.

[18] Z.-Q. Chen, P. Kim, R. Song. Dirichlet heat kernel estimates for rotationally symmetric Lévy processes. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 109(1):90–120, 2014.

[19] Z.-Q. Chen, T. Kumagai. Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces. *Probab. Theory Related Fields*, 140(1-2):277–317, 2008.

[20] Z.-Q. Chen, J. Tokle. Global heat kernel estimates for fractional Laplacians in unbounded open sets. *Probab. Theory Related Fields*, 149(3-4):373–395, 2011.

[21] R. Cont, P. Tankov. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[22] E. B. Davies. *Heat kernels and spectral theory*, volume 92 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[23] R. A. Doney. *Fluctuation theory for Lévy processes*, volume 1897 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 2007. Lectures from the 35th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–23, 2005, Edited and with a foreword by Jean Picard.

[24] C. Dupuis. *Mesure de Hausdorff de la trajectoire de certains processus à accroissements indépendants et stationnaires*, Séminaire de Probabilités, VIII (Univ. Strasbourg, année universitaire 1972-1973), Lecture Notes in Math., vol. 381, Springer, 1974, pp. 37–77.

[25] B. Fristedt. Sample functions of stochastic processes with stationary, independent increments. In *Advances in probability and related topics, Vol. 3*, pages 241–396. Dekker, New York, 1974.

[26] R. K. Getoor. First passage times for symmetric stable processes in space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101:75–90, 1961.

[27] P. B. Gilkey. *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 1995.

[28] A. Grigor'yan. Heat kernels on metric measure spaces with regular volume growth. In *Handbook of geometric analysis, No. 2*, volume 13 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 1–60. Int. Press, Somerville, MA, 2010.

[29] A. Grigor'yan, J. Hu, K.-S. Lau. Estimates of heat kernels for non-local regular Dirichlet forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(12):6397–6441, 2014.

[30] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste. Heat kernel on connected sums of Riemannian manifolds. *Math. Res. Lett.*, 6(3-4):307–321, 1999.

[31] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste. Dirichlet heat kernel in the exterior of a compact set. *Comm. Pure Appl. Math.*, 55(1):93–133, 2002.

[32] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste. Heat kernel on manifolds with ends. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(5):1917–1997, 2009.

[33] F. Hiroshima, J. Lörinczi. Lieb-Thirring bound for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian. *Commun. Stoch. Anal.*, 6(4):589–602, 2012.

[34] N. Jacob. *Pseudo differential operators and Markov processes. Vol. I.* Imperial College Press, London, 2001. Fourier analysis and semigroups.

[35] N. Jacob, V. Knopova, S. Landwehr, R.L. Schilling. A geometric interpretation of the transition density of a symmetric Lévy process. *Sci. China Math.*, 55(6):1099–1126, 2012.

[36] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Małecki. One-dimensional quasi-relativistic particle in the box. *Rev. Math. Phys.*, 25(8):1350014, 52, 2013.

[37] K. Kaleta, P. Sztonyk. Upper estimates of transition densities for stable-dominated semigroups. *J. Evol. Equ.*, 13(3):633–650, 2013.

[38] G. Karch, W. A. Woyczyński. Fractal Hamilton-Jacobi-KPZ equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(5):2423–2442, 2008.

[39] P. Kim, R. Song, Z. Vondraček. Potential theory of subordinate Brownian motions revisited. In *Stochastic analysis and applications to finance*, volume 13 of *Interdiscip. Math. Sci.*, pages 243–290. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.

[40] P. Kim, R. Song, Z. Vondraček. Uniform boundary Harnack principle for rotationally symmetric Lévy processes in general open sets. *Sci. China Math.*, 55(11):2317–2333, 2012.

[41] P. Kim, R. Song, Z. Vondraček. Global uniform boundary Harnack principle with explicit decay rate and its application. *Stochastic Process. Appl.*, 124(1):235–267, 2014.

[42] V. Knopova, A. M. Kulik. Exact asymptotic for distribution densities of Lévy functionals. *Electron. J. Probab.*, 16:no. 52, 1394–1433, 2011.

[43] V. Knopova, R. L. Schilling. Transition density estimates for a class of Lévy and Lévy-type processes. *J. Theoret. Probab.*, 25(1):144–170, 2012.

[44] T. Kulczycki, M. Ryznar. Gradient estimates of harmonic functions and transition densities for Lévy processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(1): 281–318, 2016.

[45] T. Kulczycki, B. Siudeja. Intrinsic ultracontractivity of Feynman-Kac semigroup for relativistic stable processes. Trans. Amer. Math. Soc., 358: 5025–5057, 2006.

[46] M. Kwaśnicki, J. Małecki, M. Ryznar. Suprema of Lévy processes. *Ann. Probab.*, 41 (3B):2047–2065, 2013.

[47] E. H. Lieb, R. Seiringer. *The stability of matter in quantum mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[48] A. Mimica. Heat kernel estimates for subordinate Brownian motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 113(5):627–648, 2016.

[49] S. A. Molčanov. Diffusion processes, and Riemannian geometry. *Uspehi Mat. Nauk*, 30(1(181)):3–59, 1975.

[50] J. R. Norris. Heat kernel asymptotics and the distance function in Lipschitz Riemannian manifolds. *Acta Math.*, 179(1):79–103, 1997.

[51] G. Pólya. On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral. *Messenger of Math.*, 52:185–188, 1923.

[52] W. E. Pruitt. The growth of random walks and Lévy processes. *Ann. Probab.*, 9(6):948–956, 1981.

[53] K.-i. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[54] R. L. Schilling, R. Song, Z. Vondraček. *Bernstein functions. Theory and applications.*, volume 37 of *de Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 2012.

[55] M. L. Silverstein. Classification of coharmonic and coinvariant functions for a Lévy process. *Ann. Probab.*, 8(3):539–575, 1980.

[56] B. Siudeja. Symmetric stable processes on unbounded domains. *Potential Anal.*, 25(4):371–386, 2006.

[57] R. Song, Z. Vondraček. Harnack inequalities for some classes of Markov processes. *Math. Z.* 246:177–202, 2004.

[58] P. Sztonyk. Approximation of stable-dominated semigroups. *Potential Anal.*, 33(3):211–226, 2010.

[59] P. Sztonyk. Transition density estimates for jump Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 121(6):1245–1265, 2011.

[60] S. R. S. Varadhan. On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20:431–455, 1967.

[61] N. Th. Varopoulos. Gaussian estimates in Lipschitz domains. *Canad. J. Math.*, 55(2):401–431, 2003.

[62] T. Watanabe. The Isoperimetric Inequality for Isotropic Unimodal Lévy Processes. *Probab. Theory Relat. Fields* 63: 487–499, 1983.

[63] Q. S. Zhang. The boundary behavior of heat kernels of Dirichlet Laplacians. *J. Differential Equations*, 182(2):416–430, 2002.