

Autoreferat

1. **Imię i nazwisko:** Łukasz Płociniczak.

2. **Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne:**

- Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, Politechnika Wrocławska 2013 (kwiecień), dyplom z wyróżnieniem. Temat rozprawy doktorskiej: *Mathematical Analysis of a New Corneal Topography Model*. Promotor: prof. dr hab. Wojciech Okrański
- Magister inżynier matematyki, specjalność: matematyka teoretyczna, Politechnika Wrocławska 2011 (lipiec), dyplom z wyróżnieniem. Temat pracy magisterskiej: *Mathematical Models of the Corneal Topography*. Promotor: prof. dr hab. Wojciech Okrański

3. **Zatrudnienie w jednostkach naukowych.**

- 2015–: Politechnika Wrocławska, Wydział Matematyki, *adiunkt*¹
- 2014–2015: Politechnika Wrocławska, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, *adiunkt*
- 2013–2014: Politechnika Wrocławska, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, *asystent*

4. **Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.).**

(a) Tytuł:

O pewnym równaniu nieliniowej subdyfuzji: istnienie, jednoznaczność, problemy odwrotne oraz metody numeryczne

(b) Lista publikacji składająca się na osiągnięcie naukowe.

- [H1] Ł. Płociniczak, H. Okrańska, *Approximate self-similar solutions to a nonlinear diffusion equation with time-fractional derivative*, *Physica D* 261 (2013), 85–91.
- [H2] Ł. Płociniczak, *Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. Derivation, approximation and applications*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 24 (1–3) (2015), 169–183.
- [H3] Ł. Płociniczak, *Approximation of the Erdélyi-Kober fractional operator with application to the time-fractional porous medium equation*, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 74(4) (2014), 1219–1237.
- [H4] Ł. Płociniczak, *Diffusivity identification in a nonlinear time-fractional diffusion equation*, *Fractional Calculus and Applied Analysis* 19(4) (2016), 843–866.
- [H5] Ł. Płociniczak, Sz. Sobieszek, *Numerical schemes for integro-differential equations with Erdélyi-Kober fractional operator*, *Numerical Algorithms* 76(1) (2017), 125–150.
- [H6] Ł. Płociniczak, M. Światała, *Existence and uniqueness results for a time-fractional nonlinear diffusion equation*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 462(2) (2018), 1425–1434.

¹Zmiana miejsca zatrudnienia wynikała z przekształcenia się Instytutu Matematyki i Informatyki na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki w Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

(c) Omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników

Wyróżnionym osiągnięciem, które stanowi podstawę do wszczęcia postępowania habilitacyjnego jest cykl 6 prac, w których zajmujemy się równaniami różniczkowymi z pochodną dowolnego rzeczywistego rzędu. Z historycznych przyczyn ten operator różniczkowania jest nazywany pochodną ułamkową (ang. *fractional derivative*), a dział matematyki zajmujący się nim nosi nazwę analizy ułamkowej (*fractional calculus*). Dzięki swoim własnościom związanych z długą pamięcią oraz nielokalnością, pochodne ułamkowe znajdują coraz szersze zastosowania w matematycznych modelach wielu zjawisk fizycznych, chemicznych oraz biologicznych.

Celem prac [H1-H6] jest analiza nieliniowego równania anomalnej dyfuzji, w którym pochodna ułamkowa występuje jako operator ewolucji w czasie (w naszym przypadku jest to subdyfuzja). Pochodna ułamkowa jest operatorem nielokalnym, zatem znalezienie jawnych postaci dokładnych rozwiązań równań ułamkowych jest zwykle nieosiągalne. Jedynie w prostych przypadkach rozwiązania mogą być wyrażone jawnie za pomocą funkcji specjalnych. Ponieważ równania z pochodną ułamkową są coraz częściej używane w zastosowaniach, bardzo cenna jest znajomość choćby przybliżonych postaci ich rozwiązań, które jednocześnie będą na tyle proste by móc być szybko wykorzystywane przez praktyków. Stanowiło to motywację do uzyskania niektórych wyników przedstawionych w wymienionych artykułach. Pozostałe rezultaty dotyczą istnienia i jednoznaczności rozwiązań badanego równania oraz problemów odwrotnych związanych z identyfikacją dyfuzyjności. Podajemy również twierdzenia związane z konstrukcją metod numerycznych służących do znajdowania przybliżeń operatora Erdélyi-Kobera oraz rozwiązań równań całkowo-różniczkowych, w których on występuje.

W pierwszej części rozprawy wyłożymy podstawy analizy ułamkowej oraz jej zastosowań. Ponadto wskażemy związek naszych wyników z istniejącą wiedzą oraz ich znaczenie w zastosowaniach. W dalszej części przedstawimy szczegółowy opis prac składających się na osiągnięcie naukowe. Autoreferat zakończymy omówieniem artykułów, które nie zostały włączone do osiągnięcia.

Spis treści

4 Wskazanie osiągnięcia	1
4.1 Operatory ułamkowe	4
4.1.1 Notacja oraz podstawowe definicje i własności	4
4.1.2 Zastosowania rachunku ułamkowego	6
4.2 Szczegółowy opis wyników	7
4.2.1 Cel rozprawy	7
4.2.2 Sformułowanie modelu oraz postać samopodobna równania (prace [H1-H3])	8
4.2.3 Istnienie i jednoznaczność (praca [H6])	10
4.2.4 Rozwiązania przybliżone (prace [H1-H3])	15
4.2.5 Problemy odwrotne (praca [H4])	19
4.2.6 Metody numeryczne (prace [H2-H3, H5])	24
5 Omówienie pozostałych osiągnięć	34
5.1 Modele topografii rogówki (prace [P1-P9])	35
5.2 Asymptotyka rozwiązań ułamkowych równań różniczkowych (prace [P10-P12])	36
5.3 Model analityczny mikroskopu opartego na wirach optycznych (prace [P13-P15])	36
5.4 Analiza metody punktu przegięcia w technice pomiarowej (praca [P16])	37
5.5 Analiza równania wzniosu kapilarnego (praca [P17])	37

4.1 Operatory ułamkowe

W tej części rozprawy przedstawimy podstawowe wiadomości dotyczące analizy operatorów będących uogólnieniami różniczkowania oraz całkowania: pochodnej oraz całki ułamkowej.

4.1.1 Notacja oraz podstawowe definicje i własności

W tym punkcie podamy podstawowe definicje operatorów ułamkowych oraz wprowadzimy notację, z której będziemy korzystać w dalszych częściach rozprawy. Bardzo obszerny przegląd teorii całek i pochodnych ułamkowych znaleźć można w monografiach [96, 91, 35], natomiast ciekawy wstęp historyczny znajduje się w [81].

Definicja 1 Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha > 0$. *Całka ułamkowa Riemanna-Liouville'a* rzędu α z lokalnie całkownej funkcji f jest zdefiniowana wzorem

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \geq a. \quad (4.1.1)$$

Jeśli $a = 0$, to piszemy $I_0^\alpha \equiv I^\alpha$. Ponadto gdy $\alpha = 0$ kładziemy $I_a^0 = Id$.

Od razu możemy poczynić kilka uwag. Przede wszystkim bezpośredni rachunek oraz twierdzenie Fubniego pokazuje, że całka ułamkowa jest operatorem z przestrzeni funkcji lokalnie całkownych w nią samą (szczegóły znajdują się w [76] oraz w monografii [96]). Ponadto jeśli $\alpha = n \in \mathbb{N}$ to

$$I_a^n f(x) := \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n, \quad (4.1.2)$$

czyli całka Riemanna-Liouville'a sprowadza się do znanego wzoru na n -tą funkcję pierwotną. W analogiczny sposób możemy zdefiniować pochodną ułamkową w sensie Riemanna-Liouville'a.

Definicja 2 Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha \geq 0$. *Pochodna ułamkowa Riemanna-Liouville'a* rzędu $\alpha > 0$ z lokalnie całkownej funkcji f zdefiniowana jest wzorem

$$D_a^\alpha f(x) := \frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha} f(x), \quad x \geq a, \quad (4.1.3)$$

dla $n = [\alpha] + 1$. W przypadku $a = 0$ piszemy $D^\alpha \equiv D_0^\alpha$.

Widzimy, że jeśli $\alpha = n \in \mathbb{N}$ to $D_a^\alpha = \frac{d^n}{dx^n} I_a^0 = \frac{d^n}{dx^n}$, czyli pochodna Riemanna-Liouville'a rzeczywiście uogólnia klasyczny operator różniczkowania. Ponadto dla $\alpha = 0$ mamy $D_a^0 = \frac{d^1}{dx^1} I_a^1 = Id$. Możemy zauważyć, że pochodna ułamkowa (4.1.3) jest operatorem nielokalnym więc aby obliczyć jej wartość w punkcie x trzeba znać wartości funkcji we wszystkich $t \in (a, x)$. Własność ta bardzo kontrastuje z lokalnym charakterem klasycznej pochodnej oraz jest podstawą sukcesu analizy ułamkowej w modelowaniu zjawisk z pamięcią [79].

W prosty sposób można pokazać wzory na różniczkowanie i całkowanie funkcji potęgowych.

Fakt 1 Niech $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ oraz $\beta > -1$. Dla $f(x) = (x-a)^\beta$ zachodzi

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (4.1.4)$$

oraz

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(1 + \beta - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \quad \alpha \geq 0. \quad (4.1.5)$$

W szczególności dla $\beta = 0$ mamy

$$(D_a^\alpha 1)(x) = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (4.1.6)$$

W dalszej części autoreferatu omawiamy rezultaty dotyczące rozwiązań równań różniczkowych z pochodną ułamkową. Poniżej definiujemy niezbędne pojęcia. Aby nie odbiegać zbyt daleko od tematyki rozprawy, ograniczymy się tutaj wyłącznie do najprostszych, modelowych równań. Niektóre uogólnienia zostaną omówione we właściwej części rozprawy.

Definicja 3 Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ oraz $n = [\alpha] + 1$. **Zagadnieniem początkowym (Cauchy'ego) z pochodną Riemanna-Liouville'a** nazywamy równanie różniczkowe

$$D_a^\alpha y = f(x, y(x)), \quad (4.1.7)$$

z warunkami początkowymi

$$D_a^{\alpha-k} y(a) = y_k, \quad k = 1 \dots n. \quad (4.1.8)$$

Mówimy, że $y = y(x)$ jest rozwiązaniem gdy spełnia (4.1.7)-(4.1.8) oraz jest ciągła.

Zauważmy, że warunki początkowe w powyższej definicji nie są standardowego typu, to znaczy nie zadajemy wartości funkcji oraz pochodnych rzędu całkowitego. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia początkowego z pochodną Riemanna-Liouville'a dowodzi się wprowadzając równoważne równanie całkowe Volterry i korzystając z klasycznej teorii. Na przykład można pokazać, że dla istnienia i jednoznaczności rozwiązania wystarczy spełnianie warunku Lipschitza przez funkcję f ze względu na y (bardzo obszerne omówienie znajduje się w [96, 22]).

Istnieje kilka metod znajdowania jawnych postaci rozwiązań równań różniczkowych z pochodną ułamkową, z których najpowszechniejsze to sprowadzenie do równania całkowego oraz skorzystanie z transformaty Laplace'a (dla równań liniowych). Oczywiście zadanie takie może być wykonalne jedynie dla prostych postaci funkcji f w (4.1.7). Okazuje się, że nawet dla równań liniowych ich rozwiązania dane są często za pomocą funkcji specjalnych.

Postać warunków początkowych (4.1.8) sprawia, że bardzo trudno jest podać ich interpretację fizyczną (lub geometryczną). O ile dynamika ułamkowa znajduje wiele zastosowań w modelowaniu rzeczywistych zjawisk o tyle wciąż istnieją trudności z zadawaniem odpowiednich warunków początkowych. Jedno z rozwiązań tego problemu zostało podane przez Caputo [16], który zmodyfikował definicję pochodnej ułamkowej poprzez zamianę kolejności operatorów różniczkowania oraz całkowania w (4.1.3). W szczególności, pochodna Caputo ze stałej wynosi zero.

W analizie ułamkowej bada się również szereg innych operatorów uogólniających operatory różniczkowania. Z tych najważniejszych wymienić można pochodną Riesz [96, 24] oraz związany z nią ułamkowy Laplasjan [15, 104], operator Hadamarda [48], Weyla [80] oraz pochodną Grünwalda-Letnikova [91]. Nie będziemy tutaj omawiać szczegółowo tych operatorów gdyż nie są one przedmiotem naszych rozważań w dalszej części rozprawy. Wspomnijmy jednak o ważnym operatorze blisko z nią związanym z całką ułamkową. Jest on centralnym obiektem, którego dotyczy wiele wyników będących częścią wyróżnionych prac [H1-H6].

Definicja 4 Niech $a, b, c > 0$ oraz funkcja f będzie lokalnie całkowna. Operator Erdélyi-Kobera zdefiniowany jest następującym wzorem

$$I_c^{a,b}f(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^1 (1-s)^{b-1} s^a f(xs^{\frac{1}{c}}) ds, \quad x \geq 0. \quad (4.1.9)$$

W przypadku gdy funkcja f ma zwarty nośnik, dopuszczamy $a, c \in \mathbb{R}$.

Operator Erdélyi-Kobera (E-K) pojawił się w literaturze w latach czterdziestych ubiegłego wieku podczas badań w analizie zespolonej [27, 53]. Posiada on szereg ciekawych własności [100, 90], a jego zastosowania w analizie ułamkowej opisane są w monografii [51]. Oprócz tego szereg rozwiązań równań całkowych z operatorem E-K znaleźć można w [97, 52] oraz w referencjach tam umieszczonych.

4.1.2 Zastosowania rachunku ułamkowego

Przez ostatnie pół wieku rachunek ułamkowy znajduje coraz większy obszar zastosowań w naukach przyrodniczych oraz inżynierii. Spowodowane jest to między innymi rozwojem technologii pozwalającej bardziej dokładnie badać dynamikę wielu zjawisk, konstruować nowe materiały oraz rozważać naturę układów złożonych (*complex systems*). Poniżej omówimy pokrótce kilka ważnych współczesnych zastosowań pochodnych ułamkowych. Dodatkowe informacje dotyczące analizy ułamkowej oraz jej zastosowań znaleźć można w monografiach [95, 42, 71].

Jedne z pierwszych zastosowań analizy ułamkowej miały miejsce w modelowaniu materiałów lepkosprężystych. W najprostszym ujęciu możemy myśleć o pochodnej ułamkowej zadającej prawo konstytutywne leżące pomiędzy prawem Hooke'a dla materiałów sprężystych, a prawem Newtona dla modelowania lepkości płynów. W pierwszym przypadku naprężenie jest proporcjonalne do odkształcenia, a w drugim - do jego pochodnej. Operator ułamkowy interpoluje pomiędzy tymi dwoma wariantami. Podstawy teorii dotyczącej modeli ułamkowych dla materiałów lepkosprężystych wyłożone są w artykułach [5, 54], natomiast ciekawe wyniki eksperymentalne zostały opublikowane w [78]. Bardziej współczesny oraz matematyczny przegląd ułamkowej teorii lepkosprężystości przedstawiony został w monografii [72], gdzie poruszone zostały również problemy propagacji fal w wielu ośrodkach.

Kolejnym ważnym zastosowaniem rachunku ułamkowego jest modelowanie anomalnej dyfuzji. Mówiąc bardzo skrótowo jest to dyfuzja o dynamice wolniejszej (subdyfuzja) lub szybszej (superdyfuzja) niż dyfuzja będąca wynikiem prawa Ficka. Taka ewolucja często jest utożsamiana z losowym błędzeniem cząstki, której ruch jest opisywany procesem stochastycznym skonstruowanym na bazie rozkładów ciężkoogonowych. Bardzo obszerny i ciekawy opis takiej konstrukcji opartej na błędzeniu losowym z czasem ciągłym (CTRW) wraz z licznymi zastosowaniami znaleźć można w [79, 101]. Zjawisk, w których zaobserwowano anomalną dynamikę ciągle przybywa. Dynamika szybsza niż klasyczna, czyli superdyfuzyjna, zaobserwowana była w turbulentnej dyfuzji Richardsona w atmosferze [93, 8], w niektórych przepływach obrotowych [106], w polimerach [87], optyce kwantowej [98], fizyce plazmy [21] oraz ruchu ameb i bakterii [56, 83]. Subdyfuzja występuje między innymi w transporcie na fraktalach [10, 41], niektórych polimerach [28, 49], konwekcji w płynach o dużej liczbie Pécleta [109, 107], transporcie ładunku w amorficznych półprzewodnikach [99, 38] czy infiltracji w ośrodkach porowatych [25, 92, 103, 55, 4]. To ostatnie zjawisko stało się motywacją dla rozważań przedstawionych w niniejszym autoreferacie.

4.2 Szczegółowy opis wyników

4.2.1 Cel rozprawy

Głównym celem rozprawy jest przedstawienie wyników dotyczących nieliniowego równania subdyfuzji, w którym dyfuzyjność jest typu potęgowego. Są w dużej mierze motywowane zastosowaniami modelu ułamkowego ośrodka porowatego w inżynierii materiałowej oraz hydrologii. Dotyczą zarówno praktycznych aspektów zagadnienia takich jak oszacowania, metody numeryczne oraz problemy odwrotne, jak również tych teoretycznych: istnienia, jednoznaczności rozwiązań oraz własności operatorów nielokalnych. Całość wyników prezentuje teorię czasowo-ułamkowego uogólnienia równania ośrodka porowatego, które w przypadku klasycznym (z pochodną czasową rzędu pierwszego) jest aktywnie badane już od kilkudziesięciu lat. Dyfuzja anomalna była jak dotąd przedmiotem intensywnych dociekań jedynie w przypadku liniowym. Nasze prace są jednymi z pierwszych prezentujących wyniki dotyczące ułamkowego równania nieliniowej dyfuzji.

Do głównych rezultatów omawianego osiągnięcia należą następujące wyniki.

- Zbadanie własności operatora Erdélyi-Kobera (E-K) zdefiniowanego wzorem (4.1.9). Najważniejsze z nich dotyczą szybkości jego zbieżności do operatora identyczności oraz reprezentacji za pomocą szeregu funkcyjnego.
- Udowodnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla czasowo-ułamkowego równania dyfuzji nieliniowej.
- Znalezienie kilku oszacowań oraz rozwiązań przybliżonych użytecznych w zastosowaniach.
- Regularyzacja problemu odwrotnego polegającego na identyfikacji dyfuzyjności w badanym równaniu.
- Zaproponowanie schematu numerycznego do rozwiązywania równań całkowo-różniczkowych z operatorem E-K.
- Konstrukcja dyskretyzacji operatora E-K wraz ze wskazaniem rzędów zbieżności oraz dokładną postacią asymptotyczną błędu.

Wszystkie wymienione powyżej wyniki są oryginalne (być może z wyjątkiem kilku prostych własności operatora E-K) i nie były dotychczas omawiane w literaturze. Osiągnięcie opisane w niniejszym autoreferacie rozwija teorię nieliniowego równania subdyfuzji oraz podaje ściśle wyniki, których motywacją jest jego znaczenie w inżynierii materiałowej.

Nasze zainteresowanie podjętą tematyką ma dwojaką naturę. Po pierwsze, jak zostało powyżej wspomniane, rozpatrywane równanie ma szerokie zastosowania w hydrologii oraz inżynierii materiałowej. Po drugie, w trakcie badań okazało się, że jeśli chodzi o wyniki czysto matematyczne, to literatura nie zawiera zbyt wielu istotnych rezultatów. Stworzyło to potrzebę uzupełnienia kilku luk w badanej tematyce. Okazało się, że opublikowane rezultaty wzbudziły zainteresowanie innych badaczy z całego świata. Poniżej podane są statystyki dotyczące cytowań (bez autocytowań; źródło: Web of Knowledge)

[H1] (2013) 3 Cytowania w czasopismach: Journal of Mathematical Physics, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, International Journal of Numerical Analysis and Modelling.

[H2] (2015) 10 Cytowań w czasopismach: Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Boundary Value Problems, Applied Mathematics and Computation, Dynamic Systems and Applications, International Journal of Heat and Mass Transfer, Materials and Structures.

[H3] (2014) 7 Cytowań w czasopismach: SIAM Journal on Applied Mathematics, Boundary Value Problems, Dynamic Systems and Applications, Journal of Inverse and Ill-posed Problems.

W chwili pisania niniejszego autoreferatu pozostałe prace nie były cytowane, ponieważ zostały opublikowane stosunkowo niedawno.

4.2.2 Sformułowanie modelu oraz postać samopodobna równania (prace [H1-H3])

We wszystkich pracach wskazanych w osiągnięciu [H1-H6] znajdują się wyniki dotyczące studiów nad równaniem czasowo-ułamkowym równania (sub)dyfuzji anomalnej

$$\partial_t^\alpha u = (D(u)u_x)_x, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.2.1)$$

gdzie pochodna po czasie jest operatorem ułamkowym w sensie Riemanna-Liouville'a (4.1.3). Fizyczne wyprowadzenie powyższego wzoru oraz jego zasadność w modelowaniu zjawiska infiltracji ośrodków porowatych, takich jak niektóre materiały budowlane, zostały podane w jednej z prac wymienionych w osiągnięciu [H2]. Nadmienić trzeba, że wyprowadzenie fizyczne prowadzi do równania (4.2.1), w którym pochodna jest typu Caputo. Niemniej jednak w przypadku zerowego warunku początkowego pochodna Caputo jest równa operatorowi Riemanna-Liouville'a (zob. [96]).

Przypadek $\alpha \rightarrow 1^-$ będziemy nazywać **klasycznym** w myśl redukcji do zwykłego równania nieliniowej dyfuzji. Dyfuzyjność D może przyjmować różne postaci dla nas jednak przez większość rozprawy będzie zachodziło $D(u) \propto u^m$ dla $m \geq 1$. Jeśli $D(u) = \text{const.}$ to będziemy mówić o przypadku **liniowym**.

Zagadnienie (sub)dyfuzji anomalnej jest badane od kilku lat zwłaszcza w sytuacji, gdy dyfuzja opisana jest równaniem liniowym [73, 34, 62]. W takim przypadku udaje się nawet podać rozwiązanie w zwartej postaci za pomocą funkcji specjalnych Wrighta [75]. Bardzo ciekawe i ogólne rezultaty dotyczące rozwiązania fundamentalnego czasowo- i przestrzennie-ułamkowego równania dyfuzji anomalnej zostały podane w [74]. Autorzy podali wynik w zwartej formie w przypadku, gdy pochodna czasowa jest typu Caputo, a przestrzenna - Riesz-Fellera (jednowymiarowa wersja ułamkowego Laplasjanu z uogólnieniem na skośność). Dla czasowo- oraz przestrzennie-ułamkowego zagadnienia dyfuzji anomalnej odpowiedzi na typowe pytania o istnienie i jednoznaczność zagadnienia Cauchy'ego zostały pozytywnie udzielone (zob. np. [64], istnienie słabych rozwiązań było pokazane w [58]). Ułamkowa zasada maksimum dla (4.2.1) badana była w [67, 66, 45], a w pracy [68] została użyta do dowodu istnienia i jednoznaczności.

Bezpośrednią motywacją do podjęcia naszych badań były prace [25, 4, 55] omawiające doniesienia eksperymentalne dotyczące infiltracji niektórych materiałów budowlanych oraz pewnych minerałów (zeolit). Eksperyment, który staramy się opisać może być tak zaprojektowany, aby jeden w wymiarów materiału był dużo większy niż pozostałe [4, 25] (na przykład $12\text{mm} \times 12\text{mm} \times 120\text{mm}$). Przepływ będzie wtedy istotnie jednowymiarowy. Aby zminimalizować działanie grawitacji próbkę materiału umieszcza się poziomo i mocuje sztywno. Jedną z jej ścian poddaje się kontaktowi z wodą a wchłanianie się wilgoci wewnątrz ośrodka obserwuje się na przykład jądrowym rezonansem magnetycznym. Następnie wartości pomiarowe, czyli wilgotność dla danego punktu przestrzeni w chwili czasu, umieszcza się na wykresie względem samopodobnej zmiennej $xt^{-\frac{1}{2}}$. W klasycznym przypadku wszystkie punkty powinny znaleźć się wtedy na jednej krzywej [25]. Okazuje się, że w niektórych materiałach zachodzi zupełnie inne samopodobne skalowanie. Ta odmienna od klasycznej dynamika zjawiska skłoniła wielu autorów do poszukiwania nowych równań opisujących badany materiał. Równania te były zazwyczaj podane czysto fenomenologicznie, bez dokładnych wyprowadzeń oraz ścisłych analiz. Nasze wyniki omówione poniżej starają się uzupełnić luki w tej tematyce.

W pracach [H1-H3, H6] będziemy przyjmować potęgową postać dyfuzyjności

$$D(u) = u^m, \quad m \geq 1. \quad (4.2.2)$$

Jest to bardzo powszechna forma, w wielu przypadkach potwierdzona eksperymentalnie [9, 11]. Używamy również zmiennych bezwymiarowych, które mogą być zawsze wprowadzone przez odpowiednie przeskalowanie wszystkich występujących w równaniu wielkości (por. [H2]). Nasze główne równanie przyjmuje postać

$$\partial_t^\alpha u = (u^m u_x)_x, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4.2.3)$$

Jest to nielokalne w czasie nieliniowe równanie dyfuzji określone na półprostej. Rozważać będziemy następujące fizyczne warunki brzegowe

$$u(0, t) = 1, \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.2.4)$$

oraz

$$-u^m(0, t)u_x(0, t) = 1, \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.2.5)$$

Pierwszy z nich opisuje typowy eksperyment opisany powyżej, w którym jeden brzeg ośrodka (na przykład cegły) jest utrzymywany w stałej wilgotności. Warunek (4.2.5) zadaje strumień czyli wyobrazić możemy sobie, że woda jest „wtłaczana” do ośrodka przez jeden z jego brzegów. W zastosowaniach interesujące jest przede wszystkim poznanie tempa propagacji wilgoci wewnątrz cegły. Jako, że najważniejszym z punktu widzenia zastosowań warunkiem jest (4.2.4), większość naszych wyników dotyczy właśnie tego.

Poczyńmy ostatnie ze wstępnych założeń o modelu. W pracach [H2-H3, H6] zajmowaliśmy się poszukiwaniem rozwiązań (4.2.3) o zwartym nośniku. Motywacja takich rozważań jest dwójaka. Po pierwsze, z fizycznego punktu widzenia prędkość propagacji frontu wilgoci wewnątrz ośrodka jest zawsze skończona, to znaczy, że dla dowolnego czasu $t > 0$ istnieje taki punkt $x^*(t)$, że $u(x, t) = 0$ dla $x \geq x^*(t)$. (Oczywiście przy założeniu nieskończonego ośrodka - w przypadku rzeczywistej cegły w pewnym momencie cała zostałaby wypełniona wodą). Po drugie, rozważania nad klasycznym równaniem nieliniowej dyfuzji (równaniem ośrodka porowatego) wskazują, że przy pewnych założeniach (odpowiedni dobór dyfuzyjności) rozwiązanie spełniające badane przez nas warunki brzegowe ma zawsze zwarty nośnik (por. [3, 20]). Opierając się zatem na tych motywacjach zakładamy, że

$$u(x, t) = 0 \quad \text{dla} \quad x \geq x^*(t). \quad (4.2.6)$$

Interesują nas rozwiązania samopodobne równania (4.2.3), podstawmy zatem

$$u(x, t) = t^a U(\eta), \quad \eta = \frac{x}{t^b}, \quad (4.2.7)$$

gdzie stałe a i b są do wyznaczenia. Pochodna ułamkowa transformuje się następująco

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (I_t^{1-\alpha} (t^a U(xt^{-b}))) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-z)^{-\alpha} z^a U(xz^{-b}) dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{a-\alpha+1} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^a U(\eta s^{-b}) ds \right). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Wyrażenie po prawej stronie zawiera operator E-K, co daje

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{a-\alpha+1} I_{-\frac{1}{b}}^{a, 1-\alpha} U(\eta) \right) = t^{a-\alpha} \left[(a-\alpha+1) - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] I_{-\frac{1}{b}}^{a, 1-\alpha} U(\eta), \quad (4.2.9)$$

gdzie użyliśmy reguły łańcucha

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{d}{d\eta} = -b\eta t^{-1} \frac{d}{d\eta}. \quad (4.2.10)$$

Prawa strona równania (4.2.3) transformuje się następująco

$$(u^m(x, t)u_x(x, t))_x = t^{a(m+1)-2b} (U^m(\eta)U'(\eta))', \quad (4.2.11)$$

gdzie primem oznaczyliśmy pochodną względem η . Porównując (4.2.9) z (4.2.11) otrzymujemy warunek na to, aby zmienna t została wyrugowana:

$$2b - ma = \alpha. \quad (4.2.12)$$

Jako, że mamy dwie niewiadome musimy zadać kolejne równanie na a i b . Znajdziemy je korzystając z warunków brzegowych (dokładne rozumowanie przedstawione jest w pracy [H2]). W rezultacie otrzymujemy równanie całkowo-różniczkowe

$$(U^m U')' = \left[(a - \alpha + 1) - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] I_{-\frac{1}{b}}^{\alpha, 1-\alpha} U, \quad 0 < \alpha < 1, \quad m \geq 1, \quad (4.2.13)$$

wraz z zestawem dwóch warunków brzegowych

$$U(0) = 1, \quad U(\eta) = 0 \quad \text{dla} \quad \eta \geq \eta^* > 0 \quad \text{dla} \quad a = 0, \quad b = \frac{\alpha}{2}, \quad (4.2.14)$$

albo

$$-U(0)^m U'(0) = 1, \quad U(\eta) = 0 \quad \text{dla} \quad \eta \geq \eta^* > 0 \quad \text{dla} \quad a = \frac{\alpha}{m+2}, \quad b = \frac{m+1}{m+2} \alpha, \quad (4.2.15)$$

dla pewnego η^* będącego ograniczeniem nośnika

$$\eta^* := \sup \{ \eta > 0 : U(\eta) > 0 \}. \quad (4.2.16)$$

Liczba η^* będzie znaleziona jako część rozwiązania zagadnienia. Ponieważ równanie (4.2.13) jest zdegenerowane w okolicy punktu, w którym $U = 0$, więc rozwiązanie traci gładkość w otoczeniu η^* . Dlatego też należy interpretować je w sensie słabym (zob. [86]), co jest podstawą rozważań w przypadku klasycznym.

4.2.3 Istnienie i jednoznaczność (praca [H6])

W pracy [H6] omawiamy wyniki dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (4.2.13) z warunkami (4.2.14). Przypomnijmy, że szukamy rozwiązań o zwartym nośniku, którego dokładne położenie musi być znalezione jako część rozwiązania. Jak wspomnieliśmy powyżej, rozwiązanie U rozumiane jest w sensie słabym (por. [86]).

Eksperyment pokazuje, że liniowa dyfuzja nie wystarcza do opisu dyspersji wilgoci w pewnych materiałach (np. niektórych ceglach czy zeolicie). Stąd potrzeba dokładnej matematycznej analizy równania (4.2.1), która jest przedmiotem niniejszej rozprawy. Zgodnie z naszą wiedzą, większość opublikowanych wyników jest natury eksperymetalnej lub fizycznej (zob. [30, 89, 102, 77, 61]). W cytowanych pracach rozważa się różne wersje nieliniowego równania subdyfuzji oraz sprawdza się jak numerycznie wyznaczone rozwiązanie odtwarza wyniki eksperymetalne. Pierwsze podejścia do ścisłej analizy polegają na zastosowaniu metod grup Liego w poszukiwaniu rozwiązań

samopodobnych. W pracy [29] autorzy skonstruowali kilka *dokładnych* rozwiązań równania (4.2.1) używając odpowiednich transformacji zmiennych. Podobne wyniki otrzymane były w [23, 69, 70].

Wymienione powyżej prace wskazują na istnienie pewnych klas rozwiązań nieliniowych równań cząstkowych i w większości nie biorą pod uwagę z góry zadanych warunków brzegowych. Nasze rozumowanie prowadzi do udowodnienia istnienia oraz jednoznaczności i jest ono uogólnieniem metod używanych w klasycznej teorii nieliniowych równań Volterry (patrz [85, 3]). Według wiedzy autora, jest to pierwsze udokumentowane w literaturze podejście do tego zagadnienia.

Na koniec tego krótkiego przeglądu literatury omówimy wyniki dotyczące klasycznej wersji równania (4.2.1), czyli - w przypadku potęgowej dyfuzyjności - równania ośrodka porowatego. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego zagadnienia (z różnymi typami warunków początkowo-brzegowych) były pokazane w [3] oraz [20] (por. inne podejście oparte na równaniach całkowych [84, 85]). Regularność rozwiązań klasycznego równania ośrodka porowatego została zbadana w [2, 1]. Bardzo szczegółowa klasyfikacja rozwiązań samopodobnych równań typu (4.2.1) w przypadku $\alpha = 1$ była dokonana w cyklu prac [31, 32, 33]. W tychże pracach, podane zostały również warunki konieczne istnienia rozwiązania o zwartym nośniku. W serii wykładów [2] znajduje się przegląd wielu rezultatów dotyczących klasycznego równania ośrodka porowatego, natomiast bardziej współczesne podsumowanie ma miejsce w monografii Vazqueza [105]. Rozpatrywany w niniejszej rozprawie problem dodaje element nielokalności do równania ośrodka porowatego powodując, że duża część poprzednio używanych technik dowodowych nie może zostać zastosowana. Najbardziej użyteczne dla nas metody pochodzą z teorii nieliniowych równań Volterry i część wyników rozprawy rozszerza ich stosowalność do zagadnień ułamkowych.

Zanim przejdziemy do właściwych wyników, potrzebna nam będzie przeddefiniowana wersja operatora E-K.

Oznaczenie 1 Niech $\alpha \in (0, 1)$ oraz $U = U(\eta)$ będzie funkcją lokalnie całkowalną, tożsamościowo równą zero dla $\eta \leq 0$. Operator G_α zdefiniowany jest następującym wzorem

$$G_\alpha U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{(1-\eta)^{\frac{\alpha}{2}}}^1 (1-s)^{-\alpha} U(1-s^{-\frac{2}{\alpha}}(1-\eta)) ds, \quad \eta \in (0, 1). \quad (4.2.17)$$

Powyższy operator posiada kilka ciekawych własności, które zebrane są w poniższym lemacie.

Lemat 1 ([H6], Lemma 1) Niech $0 < \alpha < 1$ oraz $U(\eta) := \eta^\beta$ dla pewnej $\beta > 0$. Ponadto

$$A := \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-\alpha} \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)}, \quad B := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (4.2.18)$$

Wtedy,

(i) (Zachowanie w zerze)

$$G_\alpha U(\eta) \sim C\eta^{\beta+1-\alpha} \quad \text{gdy } \eta \rightarrow 0^+, \quad (4.2.19)$$

Ponadto powyższy wzór może być jednokrotnie zróżniczkowany stronami ze względu na η .

(ii) (Oszacowania)

$$A\eta^{\beta+1-\alpha} \leq G_\alpha U(\eta) \leq B\eta^{\beta+1-\alpha}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (4.2.20)$$

Dowód powyższego lematu opiera się na analizie całki

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}^1 (1-s)^{-\alpha} \left(1-s^{-\frac{2}{\alpha}}(1-z)\right)^\beta ds, \quad (4.2.21)$$

dla $z \rightarrow 0^+$. Widzimy, że dla coraz mniejszych z masa funkcji podcałkowej koncentruje się coraz bardziej w okolicy $s = 1$. Sugeruje to rozwinięcie w szereg Taylora w okolicy tego punktu. Niestety jest to punkt nieróżniczkowalności. Tę trudność można usunąć poprzez podstawienie

$$s = (1 - (1 - z)^{\frac{\alpha}{2}}) t + (1 - z)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (4.2.22)$$

które ustala przedział całkowania oraz pozwala na zastosowanie kilku oszacowań implikujących poprawny wynik.

Aby poczynić bardzo istotny krok w stronę dowodu istnienia i jednoznaczności zauważmy, że istnieje transformacja, która przeprowadza zagadnienie ze swobodnym brzegiem w pewien problem Cauchy'ego.

Twierdzenie 1 ([H6]) Rozwiązanie zagadnienia ze swobodnym brzegiem (4.2.13)-(4.2.14) wyraża się jako

$$U(\eta) = (m(\eta^*)^2)^{\frac{1}{m}} y(z), \quad z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}, \quad (4.2.23)$$

gdzie η^* jest zdefiniowane w (4.2.16) oraz $y = y(z)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$m(y^m y')' = \left[(1 - \alpha) + \frac{\alpha}{2} (1 - z) \frac{d}{dz} \right] G_\alpha y, \quad 0 < \alpha < 1, \quad m \geq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (4.2.24)$$

z warunkami

$$y(0) = 0, \quad (4.2.25)$$

oraz

$$\lim_{z \rightarrow 0} y(z)^m y'(z) = 0. \quad (4.2.26)$$

Widzimy, że pierwsza z głównych trudności - czyli swobodny brzeg - może być usunięta poprzez odpowiednią zamianę zmiennych. Dzięki niej drugi warunek w brzegowy w (4.2.14) przekształca się w warunek początkowy, natomiast pierwszy pozwala nam wyliczyć położenie frontu nośnika (4.2.16)

$$\eta^* = \frac{1}{\sqrt{m y(1)^m}}. \quad (4.2.27)$$

Drugi warunek początkowy (4.2.26) jest wynikiem dwukrotnego obustronnego scałkowania równania (4.2.24) i wykorzystania faktu, że $G_\alpha y$ jest funkcją ciągłą. Prawdziwy jest również silniejszy wynik dający zachowanie asymptotyczne rozwiązania (4.2.24) dla $z \rightarrow 0^+$.

Twierdzenie 2 ([H6], Theorem 1) Rozwiązanie $y = y(z)$ równania (4.2.24) z warunkiem (4.2.25) spełnia

$$y(z) \sim \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{m}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{2-\alpha}{m}\right)} \frac{z^{\frac{2-\alpha}{m}}}{(2-\alpha)\left(1+\frac{1}{m}\right)-1} \quad \text{dla } z \rightarrow 0^+, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.2.28)$$

Dla dowodu trzeba zauważyć, że ponieważ y jest dwukrotnie różniczkowalna to zachodzi

$$y(z) = Cz^\beta + R(z), \quad \beta \geq 1, \quad (4.2.29)$$

dla pewnej różniczkowalnej funkcji R . Gdy taka postać rozwiązania jest podstawiona do równania (4.2.24), to możliwe jest znalezienie stałych C oraz β . Kluczowe jest użycie Lematu 1 dającego zachowanie się operatora G_α na funkcji potęgowej. Widzimy, że rozwiązanie y badanego problemu nie dość, że zeruje się w $z = 0$, to również ma tam znikającą pochodną.

Wykorzystując pochodną ułamkową ten wynik możemy zapisać w postaci

$$D_0^{\frac{2-\alpha}{m}} y(0) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{m}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{2-\alpha}{m}\right)} \frac{\Gamma\left(1+\frac{2-\alpha}{m}\right)}{(2-\alpha)\left(1+\frac{1}{m}\right)-1}. \quad (4.2.30)$$

Aby pokazać główny wynik, to jest istnienie i jednoznaczność zagadnienia (4.2.24) z warunkami (4.2.25) oraz (4.2.26) przekształcimy badany problem do równania całkowego i następnie skorzystamy z twierdzenia o punkcie stałym.

Fakt 2 ([H6]) *Rozwiązanie równania całkowego*

$$y(z) = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\frac{\alpha}{2} \int_0^z (1-t) G_\alpha y(t) dt + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \int_0^z (z-t) G_\alpha y(t) dt\right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad (4.2.31)$$

jest dwukrotnie różniczkowalne dla $z \in (0, 1)$ oraz spełnia równanie (4.2.24) wraz z warunkami (4.2.25)-(4.2.26).

Wyrażenie (4.2.31) jest równaniem punktu stałego dla nieliniowego operatora

$$T(y)(z) := \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\int_0^z \left(\frac{\alpha}{2} + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)z-t\right) G_\alpha y(t) dt\right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (4.2.32)$$

Jako dziedzinę operatora T weźmy

$$K := \{y \in C[0, 1] : y \geq 0\}, \quad (4.2.33)$$

oraz jako podzbiór, w którym będziemy szukać rozwiązania

$$K_0 := \{y \in C[0, 1] : y(0) = 0, y(z) > 0 \text{ dla } z \in (0, 1]\}. \quad (4.2.34)$$

Od razu zauważmy, że operator T jest monotoniczny

$$y_1 \leq y_2 \implies T(y_1) \leq T(y_2), \quad (4.2.35)$$

oraz jednorodny rzędu $\frac{1}{m+1}$

$$T(\lambda y) = \lambda^{\frac{1}{m+1}} T(y), \quad \lambda > 0. \quad (4.2.36)$$

Ponadto, reprezentacja (4.2.31) może być użyta do pokazania dodatniości y oraz pochodnej y' ([H6], Proposition 1).

Możemy wreszcie sformułować główny wynik twierdzący, że równanie (4.2.13) (oraz równoważnie (4.2.31)) posiada dokładnie jedno rozwiązanie o zwartym nośniku.

Twierdzenie 3 ([H6], Corollary 1) *Równanie całkowo-różniczkowe (4.2.13) wraz z warunkami (4.2.14) posiada dokładnie jedno rozwiązanie będące dodaniem funkcji malejącej o zwartym nośniku.*

Korzystając z Faktu 2 oraz wcześniejszych wyników zawartych w Twierdzeniu 1 wystarczy pokazać, że równanie (4.2.31) posiada dokładnie jeden punkt stały należący do przestrzeni K_0 . Standardowe podejście polegające na zastosowaniu jednego z klasycznych twierdzeń o punkcie stałym zawodzi ponieważ nieliniowość naszego równania nie jest lipschitzowska. Podobne zagadnienia całkowe były dotychczas badane przez wielu matematyków (zob. [36, 82, 84, 14]), którzy pokazali wiele warunków dostatecznych na istnienie rozwiązania. My skorzystamy z twierdzenia Bushella wykorzystującego metrykę projekcyjną Hilberta (zob. [13, 14]).

Twierdzenie 4 (Bushell, 1976) Załóżmy, że $T : K \rightarrow K$ jest operatorem monotonicznie rosnącym oraz jednorodnym rzędu p dla $0 < p < 1$. Jeśli istnieje funkcja $\varphi \in K_0$ taka, że

$$\gamma_1 \varphi \leq T(\varphi) \leq \gamma_2 \varphi, \quad (4.2.37)$$

dla pewnych stałych $\gamma_{1,2}$, to T ma jedyny punkt stały $y \in K_0$ oraz

$$\gamma_1^{\frac{1}{1-p}} \varphi \leq y \leq \gamma_2^{\frac{1}{1-p}} \varphi. \quad (4.2.38)$$

Wystarczy zatem pokazać istnienie nad- i podrozwiązania dla równania $Ty = y$, ponieważ jak zauważyliśmy poprzednio, operator T jest monotoniczny oraz jednorodny. Postać funkcji φ zadającej nad- i podrozwiązanie może zostać odgadnięta na podstawie zasugerowania się asymptotycznym zachowaniem rozwiązania danym w Twierdzeniu 2. Dokładny wynik prezentuje poniższy lemat.

Lemat 2 ([H6], Lemma 2) Niech $\varphi(z) := z^{\frac{2-\alpha}{m}}$, wtedy

$$\gamma_1 \varphi \leq T(\varphi) \leq \gamma_2 \varphi, \quad (4.2.39)$$

gdzie

$$\gamma_1 = \begin{cases} \left(\left(\frac{\alpha}{2} \right)^{1-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{m}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha+\frac{2-\alpha}{m}\right)} \frac{1}{2-\alpha+m(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{m+1}}, & 0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{m+1}; \\ \left(\left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2-\alpha} \frac{\Gamma\left(1+\frac{2-\alpha}{m}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha+\frac{2-\alpha}{m}\right)} \frac{1}{2-\alpha} \right)^{\frac{1}{m+1}}, & 1 - \frac{1}{m+1} < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (4.2.40)$$

$$\gamma_2 = \Gamma(3 - \alpha)^{-\frac{1}{m+1}}.$$

Dowód jest techniczny i stosuje oszacowania otrzymane wcześniej w Lemacie 1. Ważne jest, że rozwiązanie równania (4.2.24) szacuje się przez odpowiednie funkcje potęgowe.

Funkcja φ wyprowadzona w Lemacie 2 może być teraz zastosowana w twierdzeniu Bushella, co kończy szkic dowodu istnienia i jednoznaczności.

Na koniec tej części podamy teraz krótki wniosek mówiący o oszacowaniach na nośnik oraz na samo rozwiązanie.

Wniosek 1 Niech $U = U(\eta)$ będzie jedynym rozwiązaniem (4.2.13) z warunkami (4.2.14). Dla $0 \leq \eta \leq \eta^*$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{m\gamma_2^{m+1}}} \leq \eta^* \leq \frac{1}{\sqrt{m\gamma_1^{m+1}}}, \quad (4.2.41)$$

oraz

$$\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{\frac{m+1}{m}} \left(1 - \sqrt{m\gamma_1^{m+1}} \eta \right)^{\frac{2-\alpha}{m}} \leq U(\eta) \leq \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{\frac{m+1}{m}} \left(1 - \sqrt{m\gamma_2^{m+1}} \eta \right)^{\frac{2-\alpha}{m}}, \quad (4.2.42)$$

gdzie $\gamma_{1,2}$ są zdefiniowane w (4.2.40).

4.2.4 Rozwiązania przybliżone (prace [H1-H3])

Wiemy już, że zagadnienie (4.2.13)-(4.2.14) posiada jednoznacznie wyznaczone dodatnie rozwiązanie o zwartym nośniku. Omówimy teraz wyniki mające ważne znaczenie w zastosowaniach. Ponieważ rozwiązanie równania (4.2.13) jest niemożliwe do otrzymania w zwartej, analitycznej postaci, w celu wykorzystania rozwiązania do celów praktycznych konieczne jest użycie metod numerycznych lub znalezienie rozwiązań przybliżonych. Rozwiązaniami przybliżonymi zajmiemy się w tej części autoreferatu zostawiając metody numeryczne do ostatniej sekcji.

Jako wynik uboczny, przy pokazywaniu istnienia i jednoznaczności rozwiązania naszego zagadnienia, otrzymaliśmy oszacowania (4.2.42). Od razu zauważyć można, że nie mogą być one dokładne - warunek brzegowy w $\eta = 0$ nie jest spełniony. Pokażemy jak otrzymać można dokładniejsze przybliżenia. Rachunki będą rozumiane w sensie rachunku zaburzeń, więc niemożliwe stanie się podanie ostrych oszacowań. Otrzymane rozwiązania przybliżone należy rozumieć w sensie asymptotycznym, kiedy $\alpha \rightarrow 1^+$.

Wyniki, które teraz omówimy pochodzą z pracy [H2] ale ich wcześniejsze wersje zostały opublikowane w [H1,H3]. Rozważmy zatem równanie (4.2.13) tym razem zaopatrzone w jeden z dwóch warunków brzegowych (4.2.14) albo (4.2.15). Podstawowym pomysłem na otrzymanie rozwiązań przybliżonych jest zastąpienie nielokalnego operatora E-K jego przybliżeniem. To ostatnie może być otrzymane na podstawie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5 ([H3], Theorem 1) *Niech U będzie analityczna oraz $a > -1, b > 0, c > 0$. Dla operatora Erdélyi-Kobera (4.1.9) ma miejsce następująca reprezentacja*

$$I_c^{a,b}U(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!}, \quad \eta \geq 0, \quad (4.2.43)$$

gdzie

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\Gamma(a + \frac{j}{c} + 1)}{\Gamma(a + b + \frac{j}{c} + 1)}. \quad (4.2.44)$$

Ponadto, dla $k \rightarrow \infty$ mamy

$$\lambda_k \sim (-1)^k \frac{\Gamma(c(a+1))}{\Gamma(b)} \frac{c}{k^{c(a+1)}}. \quad (4.2.45)$$

Główna idea dowodu powyższego twierdzenia opiera się na odpowiednim zastosowaniu wzoru Faà di Bruno dla pochodnej funkcji złożonej

$$\frac{d^n}{ds^n} U(g(s)) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(g'(s), g''(s), \dots, g^{(n-k+1)}(s)) U^{(k)}(g(s)), \quad (4.2.46)$$

gdzie $B_{n,k}$ są wielomianami Bella. Biorąc $g(s) = \eta s^{\frac{1}{c}}$ rozwijamy funkcję $U(\eta s^{\frac{1}{c}})$ w szereg Taylora. Korzystając z własności wielomianów Bella (por. [H3] wzór (2.23) oraz [110]) otrzymujemy ostatecznie

$$U(\eta s^{\frac{1}{c}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(s^{\frac{1}{c}} - 1\right)^k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!}, \quad (4.2.47)$$

co po umieszczeniu w definicji operatora E-K (4.1.9) oraz scałkowaniu daje nam (4.2.43). Postać asymptotyczną λ_k otrzymujemy z reprezentacji całkowej

$$\lambda_k = (-1)^k \frac{c}{\Gamma(b)} \int_0^1 (1 - (1-s)^c)^{b-1} (1-s)^{c(a+1)-1} s^k ds, \quad (4.2.48)$$

gdzie wyrażenie $(1 - (1 - s)^c)^{b-1}$ zostaje rozwinięte w szereg tak, aby po scałkowaniu otrzymać kombinację funkcji, których zachowania asymptotyczne są znane.

Znajomość współczynników λ_k zdefiniowanych wzorem (4.2.44) pozwala nam na pokazanie wyniku uogólniającego Fakt 6, czyli punktowego zbiegania operatora E-K do identyczności dla $b \rightarrow 0^+$. Pokazuje to następujący rezultat, który dowodzi się poprzez odpowiednie przekształcenie całki (4.2.48) i skorzystanie z twierdzenia Lebesgue'a.

Fakt 3 ([H2], Proposition 1) *Mamy*

$$\lambda_k \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k > 0, \end{cases} \quad \text{dla } a > -1, c > 0. \quad (4.2.49)$$

Zwróćmy również uwagę na bardzo restrykcyjne założenie o analityczności funkcji U podane w Twierdzeniu 5. Jest ono konieczne, aby uzyskać pełne rozwinięcie w szereg. W praktycznych zastosowaniach, a zwłaszcza w infiltracji ośrodka porowatego, gdzie występuje punkt utraty gładkości, konieczne jest rozważanie mniej regularnych funkcji. Poniższy wynik podaje oszacowanie na błąd przybliżenia operatora E-K skończoną sumą szeregu (4.2.43).

Fakt 4 ([H2], Proposition 2) *Niech U będzie funkcją $C^N(0, \infty)$ z jednostajnie ograniczonymi pochodnymi. Mamy wtedy*

$$\left| I_c^{a,b} U(\eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!} \right| \leq C \frac{|\eta|^N}{N^{c(a+1)} N!}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (4.2.50)$$

gdzie λ_k jest zdefiniowane w (4.2.44) a C zależy od U , a , b oraz c .

W celu zbadania zachowania się błędu przybliżenia operatora E-K warto jest skorzystać z postaci asymptotycznej (4.2.45) dla λ_j . Ponieważ dla $N \rightarrow \infty$ resztę szeregu

$$I_\delta^{\beta,\gamma} U(\eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!} = \lambda_N U^{(N)}(\eta) \frac{\eta^N}{N!} + \dots, \quad (4.2.51)$$

dominuje pierwszy jej wyraz, więc zachodzi

$$I_c^{a,b} U(\eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!} \sim (-1)^N c \frac{\Gamma(c(a+1))}{\Gamma(b)} \frac{U^{(N)}(\eta) \eta^N}{N^{c(a+1)} N!}, \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty. \quad (4.2.52)$$

W pracach [H2-H3] podane są konkretne przykłady ilustrujące powyższe rezultaty.

Podstawowym pomysłem na przybliżenie głównego równania jest zastąpienie operatora F_α jego przybliżeniem otrzymanym ze wzoru (4.2.43). Jak nadmieniliśmy poprzednio, branie zbyt wielu wyrazów w rozwinięciu szeregu jest niekorzystne w przypadku funkcji, które nie są dostatecznie regularne. Oszacowania (4.2.42) poprzez funkcje typu pierwiastek (praca [H2]) sugerują, że też tak może być w naszym przypadku. Przybliżmy zatem $I_{-\frac{2}{\alpha}}^{0,1-\alpha}$ w najprostszym sposobie niewymagający obliczania pochodnej

$$I_{-\frac{2}{\alpha}}^{0,1-\alpha} U(\eta) \approx \lambda_0 U(\eta). \quad (4.2.53)$$

Można zauważyć, że jest to równoznaczne z zastosowaniem metody Laplace'a dla całek w celu znalezienie najbardziej znaczącego rzędu wyrażenia $F_\alpha U$ dla $\alpha \rightarrow 1^-$ [H2-H3]. Nielocalne równanie (4.2.13) przybliża się zatem przez

$$(U^m U')' \approx AU - B\eta U', \quad (4.2.54)$$

	A	B
Warunki (4.2.14)	$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$,	$\frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}$;
Warunki (4.2.15)	$\frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2+m})}{\Gamma(1-\alpha+\frac{\alpha}{2+m})}$,	$\alpha \frac{m+1}{m+2} \frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2+m})}{\Gamma(2-\alpha+\frac{\alpha}{2+m})}$;

Tablica 1: Współczynniki równania (4.2.54).

gdzie stałe A oraz B zależą od warunków brzegowych i przedstawione są w Tab. 1.

Równanie zwyczajne (4.2.54) z zadanymi warunkami brzegowymi wciąż nie posiada analitycznego rozwiązania, które może być zapisane w zwartej postaci (wyjątkiem jest przypadek liniowy w całości rozpatrzony w [H3]). Ponadto, jako część rozwiązania należy znaleźć położenie frontu propagacji η^* . W celu zamiany tego problemu o swobodnym brzegu na zagadnienie początkowe zastosujemy podstawienie podobne do tego, które zostało użyte przy pokazywaniu istnienia i jednoznaczności (4.2.23). Tym razem jest to (zob. [50])

$$U(\eta) = (m(\eta^*)^2 y(z))^{\frac{1}{m}}, \quad z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}. \quad (4.2.55)$$

Różni się ono od (4.2.23) braniem pierwiastka stopnia m z y. Stwarza to możliwość łatwiejszego przetransformowanego równania (4.2.13), które teraz przyjmuje postać

$$\frac{1}{m} y'^2 + y y'' = A y + \frac{B}{m} (1-z) y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = B, \quad (4.2.56)$$

gdzie warunek początkowy na pochodną wyznaczony jest ze struktury równania po podstawieniu do niego $z = 0$. Rozwiązanie powyższego zagadnienia dane jest poprzez szereg Taylora otrzymany standardowymi technikami.

Twierdzenie 6 ([H2,H3]) Niech $y = y(z)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (4.2.56). Wtedy

$$y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad (4.2.57)$$

gdzie współczynniki rozwinięcia mogą zostać obliczone wzorami rekurencyjnymi

$$a_0 = 0, \quad a_1 = B, \quad a_{n+1} = \frac{1}{Bn(n+1)} \left[\left(A - \frac{Bn}{m} - \frac{2n}{m} a_2 \right) a_n - \sum_{k=2}^n \frac{1}{m} (k+1)(n-k+1) a_{k+1} a_{n-k+1} + (n-k+1)(n-k+2) a_k a_{n-k+2} \right], \quad n \geq 1. \quad (4.2.58)$$

Ponadto rozwiązanie równania (4.2.54) wyraża się poprzez

$$\begin{aligned} U(\eta) &= \left(m(\eta^*)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{\eta}{\eta^*} \right)^k \right)^{\frac{1}{m}} = \left(m(\eta^*)^2 \left(1 - \frac{\eta}{\eta^*} \right) \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \left(\frac{\eta}{\eta^*} \right)^j \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left(m(\eta^*)^2 \left(1 - \frac{\eta}{\eta^*} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \binom{k}{j} a_{k+1} \right) \left(-\frac{\eta}{\eta^*} \right)^j \right)^{\frac{1}{m}}, \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

gdzie granica nośnika dana jest jako

$$\eta^* = \frac{1}{\sqrt{my(1)}}, \quad (4.2.60)$$

w przypadku warunków (4.2.14) albo

$$\eta^* = \left(m^{\frac{1}{m}} y^{\frac{1}{m}}(1) y'(1) \right)^{-\frac{m}{m+2}}, \quad (4.2.61)$$

dla warunków (4.2.15).

Dla przykładu możemy podać kilka pierwszych współczynników

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{Am - B}{2(1+m)}, & a_3 &= \frac{(A+B)m(B-Am)}{6B(1+m)^2(1+2m)}, \\ a_4 &= \frac{(A+B)m(B-Am)(B(3+m) - Am(5+3m))}{24B^2(1+m)^3(1+m(5+6m))}. \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

Biorąc początkowe wyrazy w rozwinięciu Taylora możemy otrzymać ciąg przybliżeń

$$\begin{aligned} U_1(\eta) &= \left(m(\eta_1^*)^2 a_1 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_1^*} \right) \right)^{\frac{1}{m}}, & U_2(\eta) &= \left(m(\eta_2^*)^2 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_2^*} \right) \left(a_1 + a_2 - a_2 \frac{\eta}{\eta_2^*} \right) \right)^{\frac{1}{m}}, \\ U_3(\eta) &= \left(m(\eta_3^*)^2 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_3^*} \right) \left(a_1 + a_2 + a_3 - (a_2 + 2a_3) \frac{\eta}{\eta_3^*} + a_3 \left(\frac{\eta}{\eta_3^*} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{m}}, \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

Ponadto można obliczyć ważną w zastosowaniach wielkość całkowitej masy płynu, która wniknęła do ośrodka aż do czasu t

$$I(t) := \int_0^\infty u(x, t) dx = \int_0^\infty t^a U(xt^{-b}) dx = t^{a+b} \int_0^{\eta^*} U(\eta) d\eta. \quad (4.2.64)$$

Jej przybliżeniami są

$$\begin{aligned} I_1(t) &= t^{a+b} \frac{m\eta_1^*}{1+m} (m(\eta_1^*)^2 a_1)^{\frac{1}{m}}, \\ I_2(t) &= t^{a+b} \frac{m\eta_2^*}{1+m} (m(\eta_2^*)^2 a_1)^{\frac{1}{m}} {}_2F_1 \left(1 + \frac{1}{m}, -\frac{1}{m}; 2 + \frac{1}{m}; -\frac{a_2}{a_1} \right). \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

Innym sposobem uzyskania analitycznej postaci przybliżenia rozwiązania zagadnienia (4.2.54) jest zastosowanie rachunku zaburzeń. Załóżmy zatem, że zachodzi formalne rozwinięcie

$$y(z) = y_0(z) + \frac{1}{m} y_1(z) + \dots, \quad (4.2.66)$$

oraz podstawmy to wyrażenie do głównego równania. Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned} y_0 y_0'' &= A y_0, & y_0(0) &= 0, & y_0'(0) &= B, \\ y_0'^2 + y_0 y_1'' + y_1 y_0'' &= A y_1 + B(1-z) y_0', & y_1(0) &= 0, & y_1'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

Co od razu daje rozwiązanie

$$\begin{aligned} y_0(z) &= Az^2/2 + Bz, \\ y_1(z) &= -2(A+B) \left[\frac{z^2}{2} - \frac{B}{A} \left(\left(z + \frac{2B}{A} \right) \left(\ln \left(1 + \frac{A}{2B} z \right) - 1 \right) + \frac{2B}{A} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

4.2.5 Problemy odwrotne (praca [H4])

W tej części autoreferatu przedstawimy wyniki dotyczące problemów odwrotnych związanych z równaniem subdyfuzji (4.2.13). Zwykle w doświadczeniach eksperymetatorzy mierzą dynamikę wilgotności danej próbki ośrodka porowatego [25]. Znają zatem funkcję $U = U(\eta)$ będącą rozwiązaniem (4.2.13). Na tej podstawie starają się wyznaczyć własności materiałowe ośrodka, które są zapisane w dyfuzyjności $D = D(U)$. Takie przedstawienie problemu jest tak zwanym *zagadnieniem odwrotnym*: znając rozwiązanie równania całkowo-różniczkowego, musimy odnaleźć jeden ze współczynników tego równania. Problemy odwrotne są często źle określone w sensie Hadamarda [39].

Definicja 5 *Problem matematyczny (na przykład równanie różniczkowe lub algebraiczne) jest **dobrze postawiony** jeśli posiada wszystkie poniższe własności*

- *ma rozwiązanie,*
- *ma dokładnie jedno rozwiązanie,*
- *małe zmiany w danych wejściowych powodują małe zmiany w wyniku (stabilność).*

*Jeśli problem nie jest dobrze postawiony mówimy, że jest **źle postawiony**.*

Pierwszą pracą, która zapoczątkowała badania w obszarze problemów odwrotnych była [17], gdzie rozwiązane zostało zagadnienie istnienia i jednoznaczności wyznaczenia współczynnika α oraz dyfuzyjności, która mogła zależeć jedynie od zmiennej przestrzennej. Podobny problem, tym razem z niezerowym „potencjałem” był badany w [47], gdzie zaproponowany został również efektywny algorytm numeryczny. Identyfikacja funkcji źródłowej w równaniu ułamkowej subdyfuzji została przeprowadzona w [111]. Ponadto, względnie nową pracą jest [94], w której autorzy podejmują problem odwrotny wyznaczenia warunku początkowego. Ciekawym artykułem jest również [63], w którym do pokazania jednoznaczności rozwiązania zagadnienia odwrotnego została użyta silna zasada maksimum. Więcej cennych wyników znaleźć można w pracach cytowanych wyżej oraz w artykule przeglądowym [46], w którym bardzo wyraźnie zarysowane zostały różnice w zagadnieniach odwrotnych dla klasycznej oraz czasowo-ułamkowej dyfuzji.

Zaznaczmy, że większość dotychczasowych oraz bieżących badań dotyczy liniowego równania subdyfuzji. Pewien krok w stronę badań nad nieliniowymi zagadnieniami odwrotnymi związanymi z badanym równaniem został poczyniony w [65], gdzie nieliniowość występowała w funkcji źródłowej. Podobny problem rozważany był w nowej pracy [44], w której autorzy pokazują istnienie oraz jednoznaczność wyznaczania semi-liniowego składnika w badanym równaniu. We wszystkich znanych nam pracach dotyczących problemów odwrotnych, dyfuzyjność jest co najwyżej funkcją zmiennych *niezależnych*. Podejście przedstawione poniżej jako część osiągnięcia, analizuje sytuację dyfuzyjności będącej funkcją zmiennej *zależnej*.

Często podstawowym problemem jest brak stabilności rozwiązania zagadnienia źle postawionego. Istnienie i jednoznaczność może być zapewniona przez odpowiednie powiększenie klasy funkcji oraz zdefiniowanie rozwiązania w sensie najmniejszych kwadratów [37, 26]. W zastosowaniach brak stabilności stwarza możliwość silnego wzmocnienia błędów pomiarowych, co w rezultacie doprowadza do całkowitego zamazania informacji o rozwiązaniu. Stosuje się zatem szereg technik regularyzacyjnych mających na celu, choćby częściowe, zapewnienie stabilności.

Oznaczenie 2 *Operator F_α określony na funkcjach lokalnie całkowalnych zdefiniowany jest następującym wzorem*

$$F_\alpha U(\eta) := I_{-\frac{\alpha}{2}}^{0,1-\alpha} U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} U(\eta s^{-\frac{\alpha}{2}}) ds, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \eta \geq 0, \quad (4.2.69)$$

gdzie $I_{-\frac{z}{2}}^{0,1-\alpha}$ jest operatorem Erdélyi-Kobera (4.1.9).

Naszym zagadnieniem odwrotnym jest znalezienie $D(U)$ na podstawie wiedzy o U . Bezpośrednie całkowanie równania (4.2.13) pozwala od razu zapisać wzór na dyfuzyjność

$$D(U(\eta)) = \frac{1}{U'(\eta)} \left[D_s U'(0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \int_0^\eta F_\alpha U(z) dz - \frac{\alpha}{2} \eta F_\alpha U(\eta) \right]. \quad (4.2.70)$$

Istnienie jednoznacznego (z dokładnością do stałej D_s) rozwiązania naszego problemu jest zatem zapewnione przez powyższy wzór. Ponieważ różniczkowanie jest operacją niestabilną, to nasze rozwiązanie również posiada tę wadę. Dodatkowo, numeryczne obliczenie dyfuzyjności z powyższego wzoru jest bardzo kosztowne obliczeniowo, ponieważ wymaga znajomości całki nielokalnego operatora. Ten problem może być rozwiązany za pomocą przybliżenia operatora F_α wielokrotnością identyczności zgodnie z Twierdzeniem 5. Przybliżony wzór na dyfuzyjność ma wtedy postać

$$\tilde{D}(U(\eta)) = \frac{1}{U'(\eta)} \left[D_s U'(0) + \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} \right) \int_0^\eta U(z) dz - \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} \eta U(\eta) \right]. \quad (4.2.71)$$

Powstaje pytanie dotyczące błędu, który popełniamy obliczając dyfuzyjność przybliżonym wzorem.

Zanim przejdziemy do omówienia dokładnych oszacowań oraz strategii regularyzacyjnych, pokażemy kilka pomocniczych wyników. Najpierw podamy kilka własności operatora F_α . Pierwsze z nich są prostymi konsekwencjami definicji.

Fakt 5 ([H4], Proposition 2.1) Niech U będzie ograniczoną funkcją określoną na \mathbb{R} . Wtedy funkcja $F_\alpha U$ jest ograniczona dla każdego $\alpha \in (0, 1)$. Ponadto,

- (a) $F_\alpha U(0) = \frac{U(0)}{\Gamma(2-\alpha)}$.
- (b) Jeśli U jest rosnąca (malejąca), to $F_\alpha U$ jest również rosnąca (malejąca).
- (c) Jeśli $\lim_{\eta \rightarrow \infty} U(\eta) = g$, to $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\alpha U(\eta) = \frac{g}{\Gamma(2-\alpha)}$.

Rzeczywiście, F_α przeprowadza funkcje ograniczone w funkcje ograniczone ponieważ z definicji (4.2.69) mamy $|F_\alpha U| \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \|U\|_\infty$. Korzystając z tego oraz Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej od razu pokazujemy również punkt (c) powyższego faktu.

Jak należy się spodziewać z okoliczności pojawienia się operatora F_α w naszych rozważaniach, powinien on w pewnym sensie dążyć do operatora identyczności gdy $\alpha \rightarrow 1^-$. Mówi o tym następujący fakt.

Fakt 6 ([H4], Theorem 1) Niech U będzie ograniczona oraz różniczkowalna. Wtedy

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} F_\alpha U(\eta) = U(\eta). \quad (4.2.72)$$

Dowód powyższego faktu opiera się na całkowaniu przez części we wzorze (4.2.69) określającym operator F_α , dlatego potrzebne jest założenie o różniczkowalności U . W celu udowodnienia kolejnych wyników potrzebujemy nieco silniejszych oszacowań na szybkość zbieżności. Okazuje się, że zależy ona nie tylko od wielkości funkcji U , ale również od jej pochodnej.

Lemat 3 ([H4], Lemma 1) Niech funkcja $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ograniczona, malejąca oraz znikająca w nieskończoności. Wtedy

$$|F_\alpha U(\eta) - U(\eta)| \leq \left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} - 1 \right) U(\eta s_0^{-\alpha/2}) + \Gamma(2-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - \frac{1}{2-\alpha} \right) \max_{s \in [s_0, 1]} \left(\frac{d}{ds} U(\eta s^{-\frac{\alpha}{2}}) \right), \quad (4.2.73)$$

gdzie $s_0 := 1 - \Gamma(2-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Ponownie, dla dowodu lematu kluczowym jest całkowanie przez części w definicji operatora F_α . Jednak tym razem potrzebne jest ono po to, aby skorzystać z Twierdzenia Newtona-Leibniza jako sposobu reprezentacji funkcji U

$$U(\eta) = U(\eta) - U(\infty) = \int_0^1 \frac{d}{ds} (U(\eta s^{-\alpha/2})) ds. \quad (4.2.74)$$

Możemy teraz zapisać

$$|F_\alpha U(\eta) - U(\eta)| \leq \left| \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - 1 \right) \frac{d}{ds} (U(\eta s^{-\alpha/2})) ds \right|. \quad (4.2.75)$$

Ponieważ funkcja podcałkowa umieszczona w nawiasach jest malejąca oraz posiada zero w s_0 więc możemy rozdzielić całkę na dwie części oraz oszacować każdą z osobna. Oszacowanie (4.2.73) daje dostatecznie dobre ograniczenie, co pokazuje przykład podany w pracy [H4].

Przedstawione oszacowania punktowe posłużą nam teraz do omówienia wyniku dotyczącego nierówności globalnych.

Definicja 6 ([H4], Definition 2.3) Dla $\eta_0 > 0$ i funkcji $U : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy półnormę

$$\|U\|_{\infty, \eta_0} := \sup_{\eta \in [0, \eta_0]} |U(\eta)|. \quad (4.2.76)$$

Będziemy również pisać $\|U\|_\infty := \|U\|_{\infty, \infty}$.

Wprowadzenie η_0 jest konieczne głównie ze względu na techniczną możliwość udowodnienia kilku następujących faktów. W rzeczywistym eksperymencie za maksymalną wartość η_0 możemy przyjąć η^* zdefiniowane powyżej jako ograniczenie nośnika U (por. (4.2.14)-(4.2.15)). W takiej sytuacji mamy oczywiście $\|U\|_{\infty, \eta^*} = \|U\|_\infty$.

Twierdzenie 7 ([H4], Theorem 1) Niech funkcja $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ograniczona, malejąca oraz znikająca w nieskończoności. Wtedy

$$\|F_\alpha U - U\|_{\infty, \eta_0} \leq A(\alpha) \|U\|_\infty + B(\alpha) \eta_0 \|U'\|_\infty. \quad (4.2.77)$$

Ponadto, jeśli U oraz U' są w $L^1(0, \infty)$ to

$$\|F_\alpha U - U\|_1 \leq C(\alpha) \|U\|_1 \quad (4.2.78)$$

gdzie $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ oraz $C(\alpha)$ są zdefiniowane poprzez

$$A(\alpha) := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} - 1, \quad B(\alpha) := \frac{\alpha}{2} \frac{\Gamma(2-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(1 - \Gamma(2-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}} \left(1 - \frac{1}{2-\alpha}\right), \quad (4.2.79)$$

oraz $C(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)$. Ponadto mamy $A(\alpha) \rightarrow 0$ i $B(\alpha) \rightarrow 0$ gdy $\alpha \rightarrow 1^-$.

Powyższy wynik daje zbieżność $F_\alpha U$ do U , gdy $\alpha \rightarrow 1^-$ w normach supremum oraz L^1 . Ponadto, z postaci stałych $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ oraz $C(\alpha)$ widzimy, że zbieżność jest rzędu pierwszego. Powyższe własności przydadzą się przy omawianiu rezultatów dotyczących problemów odwrotnych dla (4.2.13) w dalszej części niniejszego autoreferatu.

Następujące twierdzenie pokazuje oszacowanie na różnicę pomiędzy (4.2.70) oraz (4.2.71).

Twierdzenie 8 ([H4], Theorem 2) *Niech U będzie ograniczona, malejąca oraz znikająca w nieskończoności. Ustalmy $\eta_0 > 0$ takie, że $E_{\eta_0} := \sup_{\eta \in [0, \eta_0]} |\eta/U'(\eta)|$ jest skończone. Wtedy*

$$\left\| D(U) - \tilde{D}(U) \right\|_{\infty, \eta_0} \leq E_{\eta_0} (2A(\alpha) \|U\|_\infty + B(\alpha)\eta_0 \|U'\|_\infty), \quad (4.2.80)$$

gdzie $A(\alpha)$ oraz $B(\alpha)$ są zdefiniowane w Twierdzeniu 7.

Udowodnienie powyższego wyniku polega na oszacowaniu punktowej różnicy:

$$\begin{aligned} \left| D(U(\eta)) - \tilde{D}(U(\eta)) \right| &\leq \frac{1}{|U'(\eta)|} \left[\left| \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \int_0^\eta F_\alpha U(z) dz - \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} \right) \int_0^\eta U(z) dz \right| \right. \\ &\quad \left. + \eta \left| \frac{\alpha}{2} F_\alpha U(\eta) - \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} U(\eta) \right| \right]. \end{aligned} \quad (4.2.81)$$

Pierwszy z nich szacuje się w następujący sposób

$$\begin{aligned} &\left| \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \int_0^\eta F_\alpha U(z) dz - \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} \right) \int_0^\eta U(z) dz \right| \\ &\leq \eta \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \|F_\alpha U - U\|_{\infty, \eta_0} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} - 1 \right) \|U\|_\infty \right], \end{aligned} \quad (4.2.82)$$

natomiast drugi

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{2} F_\alpha U(\eta) - \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} U(\eta) \right| &= \frac{\alpha}{2} \left| F_\alpha U(\eta) - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} U(\eta) \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \left[|F_\alpha U(\eta) - U(\eta)| + \left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} - 1 \right) |U(\eta)| \right]. \end{aligned} \quad (4.2.83)$$

Nałożenie supremum, skorzystanie z Twierdzenia 7 oraz manipulowanie funkcjami gamma implikuje tezę twierdzenia.

Przystąpmy teraz do problemu braku stabilności rozwiązania (4.2.70). Jedynek składnikiem wyrażenia (4.2.70) służącego obliczaniu dyfuzyjności który powoduje niestabilność jest operator różniczkowania. Zwróćmy uwagę, że w każdym eksperymencie, jakkolwiek pomiar obciążony jest błędem. Oznacza to, że dokładna wartość U nie jest nigdy znana. Niech $\delta > 0$ będzie poziomem szumu (błędu) w danych wejściowych, to znaczy

$$\|u - u^\delta\| \leq \delta, \quad (4.2.84)$$

gdzie U jest dokładną (nieznaną) funkcją, U^δ zmierzoną (znaną) jej wartością, a $\|\cdot\|$ jest pewną normą. Powstaje zatem naturalne pytanie, jak bardzo obliczona wartość $D(U^\delta)$ różni się od dokładnej wartości dyfuzyjności $D(U)$. Ponieważ obliczanie $D(U^\delta)$ jest niestabilne, ta wielkość może różnić się od $D(U)$ o dowolnie dużo. Konieczna jest zatem odpowiednia strategia regularyzacyjna.

Polega ona na wybraniu rodziny *stabilnych* operatorów, które przybliżają pochodną (w naszym przypadku) dowolnie blisko.

Wybieramy rodzinę operatorów przybliżającą pochodną

$$\|U' - (U^\delta)'_h\|_\infty \leq R(h, \delta), \quad (4.2.85)$$

dla której istnieje $h_0 = h_0(\delta)$, że $R(h_0(\delta), \delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$ (zob. [26]). Zzregularyzowana wartość dyfuzyjności $D_h(U)$ jest obliczona ze wzoru (4.2.70) dla U'_h . Podobnie rozumieć będziemy wyrażenie $D_h(U^\delta)$. Następujące twierdzenie mówi o tym jaki błąd popełniamy obliczając dyfuzyjność korzystając z regularyzacji oraz zaszumionych danych.

Twierdzenie 9 ([H4], Theorem 3) *Złożmy, że $\|U - U^\delta\|_\infty \leq \delta$ oraz niech D_h będzie rodziną operatorów regularyzujących pochodną, wybraną zgodnie z (4.2.85). Ustalmy również $\eta_0 > 0$. Wtedy, dla U ograniczonej, malejącej oraz znikającej w nieskończoności oraz takiej, że $\epsilon := \inf_{\eta \in [0, \eta_0]} |U'(\eta)| > 0$, mamy*

$$\|D(U) - D_h(U^\delta)\|_{\infty, \eta_0} \leq \frac{1}{\epsilon} \left[D_s \left(1 + \frac{R(h, \delta) + \|U'\|_\infty}{\epsilon} \right) R(h, \delta) + \frac{\eta_0}{\Gamma(2 - \alpha)} \left(\delta + \frac{\delta + \|U\|_\infty R(h, \delta)}{\epsilon} \right) \right]. \quad (4.2.86)$$

W zastosowaniach praktyczniejszy jest jednak następujący wniosek.

Wniosek 2 *Niech będą spełnione założenia Twierdzenia 9. Jeśli strategia regularyzacyjna (4.2.85) jest taka, że $R(h_0(\delta), \delta) = O(\delta^\mu)$ gdy $\delta \rightarrow 0$, to*

$$\|D(U) - D_h(U^\delta)\|_{\infty, \eta_0} = O(\delta^\mu) \quad \text{gdy} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (4.2.87)$$

Dowód Twierdzenia 9 opiera się na kilku oszacowaniach. Jeśli zapiszemy $D(U(\eta)) = G(U(\eta))/U'(\eta)$, gdzie G jest licznikiem w (4.2.70), to

$$\begin{aligned} |D(U(\eta)) - D_h(U^\delta(\eta))| &= \left| \frac{G(U(\eta))}{U'(\eta)} - \frac{G_h(U^\delta(\eta))}{U'(\eta)} + \frac{G_h(U^\delta(\eta))}{U'(\eta)} - \frac{G_h(U^\delta(\eta))}{(U^\delta)'_h(\eta)} \right| \\ &\leq \frac{1}{|U'(\eta)|} |G(U(\eta)) - G_h(U^\delta(\eta))| + |G_h(U^\delta(\eta))| \left| \frac{1}{U'(\eta)} - \frac{1}{(U^\delta)'_h(\eta)} \right|. \end{aligned} \quad (4.2.88)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie można oszacować korzystając z założenia o poziomie szumu δ oraz definicji operatora F_α

$$|G(U(\eta)) - G_h(U^\delta(\eta))| \leq D_s \|U' - (U^\delta)'_h\|_\infty + \frac{\delta}{\Gamma(2 - \alpha)} \eta. \quad (4.2.89)$$

Drugi składnik szacuje się standardowo

$$\left| \frac{1}{U'(\eta)} - \frac{1}{(U^\delta)'_h(\eta)} \right| \leq \frac{1}{|U'(\eta)(U^\delta)'_h(\eta)|} |U'(\eta) - (U^\delta)'_h(\eta)| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \|U' - (U^\delta)'_h\|_\infty. \quad (4.2.90)$$

Łącząc powyższe nierówności oraz nakładając normę $\|\cdot\|_{\infty, \eta_0}$ otrzymujemy wynik.

Pokazaliśmy zatem, że w celu stabilnego oraz jednoznacznego wyznaczenia dyfuzyjności konieczne jest zastosowanie strategii regularyzacyjnej do obliczania pochodnej funkcji. Co ważne, przy optymalnym wyborze parametru regularyzacyjnego, wzór służący wyznaczeniu D nie pogarsza rzędu asymptotycznej zbieżności regularyzacji pochodnej wraz z poziomem szumu δ . Wzór (4.2.70) (lub 4.2.71)) w połączeniu z (4.2.85) może być zatem użyty do jednoznacznego oraz stabilnego obliczenia dyfuzyjności.

4.2.6 Metody numeryczne (prace [H2-H3, H5])

W tej części autoreferatu przedstawimy wyniki obliczeń numerycznych pokazujących dokładność przybliżeń otrzymanych w poprzedniej sekcji, jak również wyprowadzimy kilka schematów numerycznych służących do dyskretyzacji operatora E-K. Udowodnimy również twierdzenia o zbieżności tych metod.

Jak wspomnieliśmy powyżej, często pierwszym podejściem do badań nieliniowych równań z pochodną ułamkową są właśnie metody numeryczne. Ponieważ rozważane równania są nielokalne, ich analiza numeryczna wymaga innego podejścia niż w przypadku klasycznym. Istnieje bardzo bogata literatura dotycząca numerycznych rozwiązań równań całkowo-różniczkowych - w szczególności - ułamkowych. Wymienimy tutaj jedynie prace przeglądowe. Klasyczne monografie, bardzo obszernie omawiające równania Volterry to [12, 60, 6]. Przegląd metod numerycznych dla równań ułamkowych znajduje się na przykład w [7]. Ponadto, metody numeryczne skonstruowane specjalnie dla czasowo-ułamkowej dyfuzji badane były w [57], gdzie zastosowany został wydajny algorytm różnicowo-spektralny. Podobne wyniki otrzymane zostały w [59].

Główny wynik tej części podaje konstrukcję zbieżnego schematu różnic skończonych służącego do numerycznego wyliczenia działania operatora E-K na danej funkcji. Zgodnie z wiedzą habilitanta, ten operator nie był dotychczas analizowany numerycznie przez innych badaczy. Powstało jednak bardzo wiele prac wykorzystujących dyskretyzację pokrewnych mu operatorów takich jak całki i pochodne ułamkowe [22] oraz ułamkowy Laplasjan [108, 43].

Symulacje (prace [H2-H3])

Aby móc porównać dokładność różnych wyprowadzonych przybliżeń należy rozwiązać (4.2.3) numerycznie. Ponieważ nasze główne równanie jest nielokalne oraz nieliniowe, spodziewamy się, że obliczenia numeryczne będą kosztowne. Jest to spowodowane braniem pod uwagę całej historii w każdym kroku iteracyjnym. Wprowadźmy zatem siatkę (x_j, t_i) będącą dyskretyzacją czasoprzestrzeni, gdzie $x_j = jk$, $t_i = ih$ dla $k = X/M$ oraz $h = T/N$. Tutaj X oraz T są maksymalnymi wartościami, odpowiednio, zmiennej przestrzennej oraz czasowej. Liczby N oraz M są ilością punktów podziału. Jeśli przez u_n^i oznaczmy numeryczne przybliżenie $u(x_j, t_i)$ oraz zastosujemy metodę prostokątów dla przybliżenia pochodnej ułamkowej, to otrzymamy

$$(\partial_t^\alpha) u_j^i \approx \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(u_j^{i+1} + \sum_{k=1}^i a_{k,i} u_j^k \right) \quad (4.2.91)$$

z wagami

$$a_{k,i} = (i - k + 2)^{1-\alpha} - 2(i - k + 1)^{1-\alpha} + (i - k)^{1-\alpha}. \quad (4.2.92)$$

W celu dyskretyzacji nieliniowej części równania zastosujemy θ -ważoną metodę zawierającą w sobie schemat jawny ($\theta = 0$), niejawny ($\theta = 1$) oraz Cranka-Nicolson ($\theta = 1/2$). Ostatecznie otrzymujemy następujący schemat numeryczny

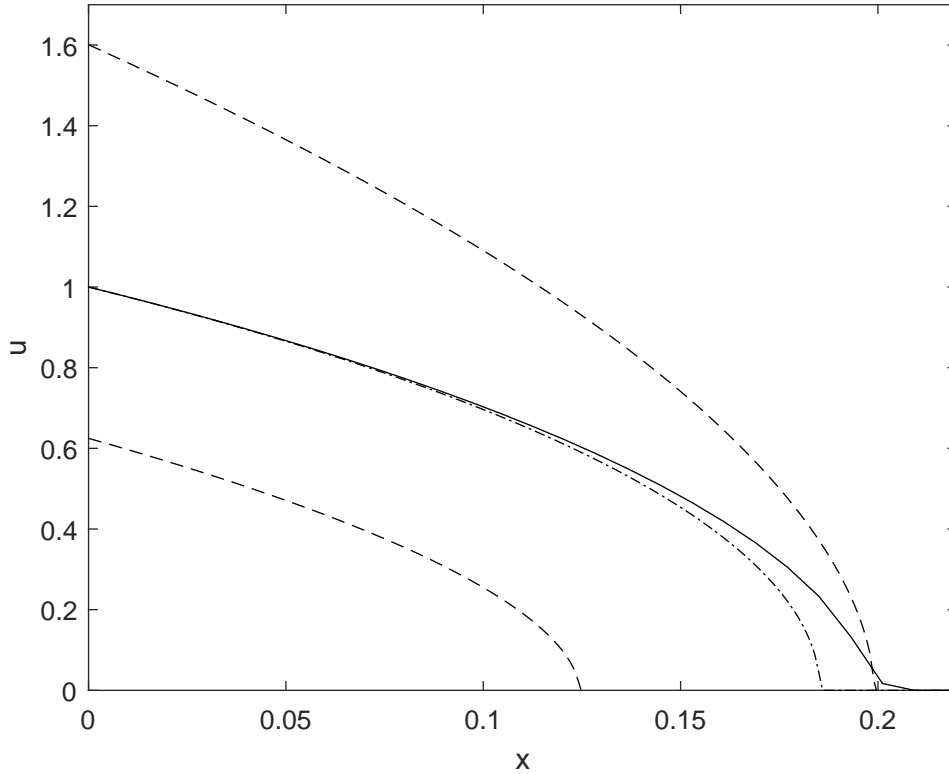
$$\begin{aligned} & u_j^{i+1} - (1 - \theta) \frac{h^\alpha}{k^2 \Gamma(2-\alpha)} \left(D_{j-1/2}^{i+1} u_{j-1}^{i+1} + \left(D_{j-1/2}^{i+1} + D_{j+1/2}^{i+1} \right) u_j^{i+1} + D_{j+1/2}^{i+1} u_{j+1}^{i+1} \right) \\ & = - \sum_{k=1}^i a_{k,i} u_j^k + \theta \frac{h^\alpha}{k^2 \Gamma(2-\alpha)} \left(D_{j-1/2}^i u_{j-1}^i + \left(D_{j-1/2}^i + D_{j+1/2}^i \right) u_j^i + D_{j+1/2}^i u_{j+1}^i \right), \end{aligned} \quad (4.2.93)$$

gdzie

$$D_{j\pm 1/2}^i = \frac{1}{2} \left((u^m)_j^i + (u^m)_{j\pm 1}^i \right). \quad (4.2.94)$$

W celu efektywnego obliczenia nieliniowej dyfuzyjności skorzystamy z metody linearyzacji podanej w [88]

$$(u^m)_j^{i+1} = (u^m)_j^i + m(u^{m-1})_j^i (u_j^i - u_j^{i-1}) + O(h^2), \quad (4.2.95)$$



Rysunek 1: Oszacowania oraz przybliżenie rozwiązania równania (4.2.3) z warunkami (4.2.4). Linia ciągła reprezentuje rozwiązanie numeryczne otrzymane za pomocą schematu (4.2.93), linie przerywane oznaczają oszacowania (4.2.42), natomiast linia przerywana z kropkami to przybliżenie U_3 zdefiniowane w (4.2.63). Wybrane parametry to $\alpha = 0.9$ oraz $m = 2$. Rysunek sporządzono dla czasu $t = 0.02$.

która opiera się na rozwinięciu Taylora w dziedzinie czasowej. Współczynnik dyfuzji przybliża się wtedy za pomocą

$$D_{j\pm 1/2}^{i+1} \approx \frac{1}{2} \left((u^m)_j^i + m(u^{m-1})_j^i (u_j^i - u_j^{i-1}) + (u^m)_{j\pm 1/2}^i + m(u^{m-1})_{j\pm 1/2}^i (u_{j\pm 1/2}^i - u_{j\pm 1/2}^{i-1}) \right), \quad (4.2.96)$$

Każda iteracja (4.2.93) wymaga wzięcia pod uwagę wszystkich poprzednich kroków oraz rozwiązania układu równań liniowych (dzięki linearyzacji). Ponieważ macierz układu jest trójdzielna, możemy zastosować wydajne algorytmy w celu jej odwrócenia. Zmniejsza to koszt obliczeniowy, który jednak wciąż pozostaje duży z uwagi na nielokalność zagadnienia.

Dla symulacji numerycznych użyjemy równania (4.2.3) z warunkami (4.2.4). Przykładowa symulacja przedstawiona została na Rys. 1, gdzie pokazany został profil wilgotności dla ustalonego czasu. Od razu zauważyć można małą użyteczność oszacowań (4.2.42). Ten fakt nie powinien dziwić, ponieważ nierówności te zostały otrzymane jako skutek uboczny twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności. Dają one jednak dosyć dobre wyobrażenie, gdzie znajduje się front η^* . Zauważmy również, że przybliżenie U_3 niewiele odbiega od dokładnego rozwiązania przez niemal całą dziedzinę. Mimo braku ścisłych oszacowań, przybliżenie to rozumiane w sensie asymptotycznym $\alpha \rightarrow 1$, jest dostatecznie dokładne oraz pozwala w łatwy i szybki sposób dopasować parametry modelu.

Dopasowanie modelu do rzeczywistych danych wziętych z [25] zostało przedstawione na Rys. 2. Użyliśmy tutaj zmiennych wymiarowych, to jest przybliżenia U_3 dla równania

$$\partial_t^\alpha u = (D_0 u^m u_x)_x, \quad (4.2.97)$$

z warunkami

$$u(0, t) = C, \quad u(\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x, t > 0. \quad (4.2.98)$$

Widzimy, że przybliżenie dobrze odtwarza dane eksperymentalne, być może z wyjątkiem punktów bliskich frontowi zwilżania. Jest to prawdopodobnie spowodowane doбором potęgowej formy dyfuzyjności oraz błędami eksperymentalnymi. Mimo tego faktu, prosta forma przybliżenia rozwiązania równania (4.2.3) dała dokładne rozwiązania oraz dużo łatwiejsza do zastosowania niż numeryczne rozwiązanie równania nielokalnego. Otrzymane parametry są bardzo zbliżone do tych wyznaczonych przez eksperymentatorów.

Schematy różnicowe dla operatora E-K (praca [H5])

Omówimy teraz wyniki dotyczące schematów różnicowych służących do dyskretyzacji operatora E-K. Są to jedne z pierwszych tego typu wyników w literaturze. W celu bardziej przejrzystego przedstawienia wyników, zmienimy notację, to jest oznaczymy

$$I_{a,b,c}y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^1 (1-s)^{b-1} s^a y(s^{1/c}x) ds, \quad x \in (0, X), \quad (4.2.99)$$

gdzie wszystkie parametry są teraz zapisywane w indeksie dolnym. Możemy również napisać

$$I_{a,b,c}y(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1-s)^{b-1} s^a y(s^{1/c}x) ds, \quad (4.2.100)$$

gdzie

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_i < \dots < s_n = 1, \quad (4.2.101)$$

jest podziałem odcinka $[0, 1]$. Sposób dyskretyzacji zależy teraz od numerycznego obliczenia całki. Przedstawimy teraz kilka typowych rodzajów dyskretyzacji. Dokładne szczegóły obliczeń znaleźć można w [H5].

- **Reguła prostokątów.**

$$L_{a,b,c}^r y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y(s_i^{1/c}x) \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1-s)^{b-1} s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^r(a, b) y(s_i^{1/c}x), \quad (4.2.102)$$

gdzie zdefiniowaliśmy wagi

$$v_i^r(a, b) := \frac{1}{\Gamma(b)} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1-s)^{b-1} s^a ds = \frac{B(s_{i+1}; a+1, b) - B(s_i; a+1, b)}{\Gamma(b)}, \quad (4.2.103)$$

oraz użyliśmy niezupełnej funkcji beta.

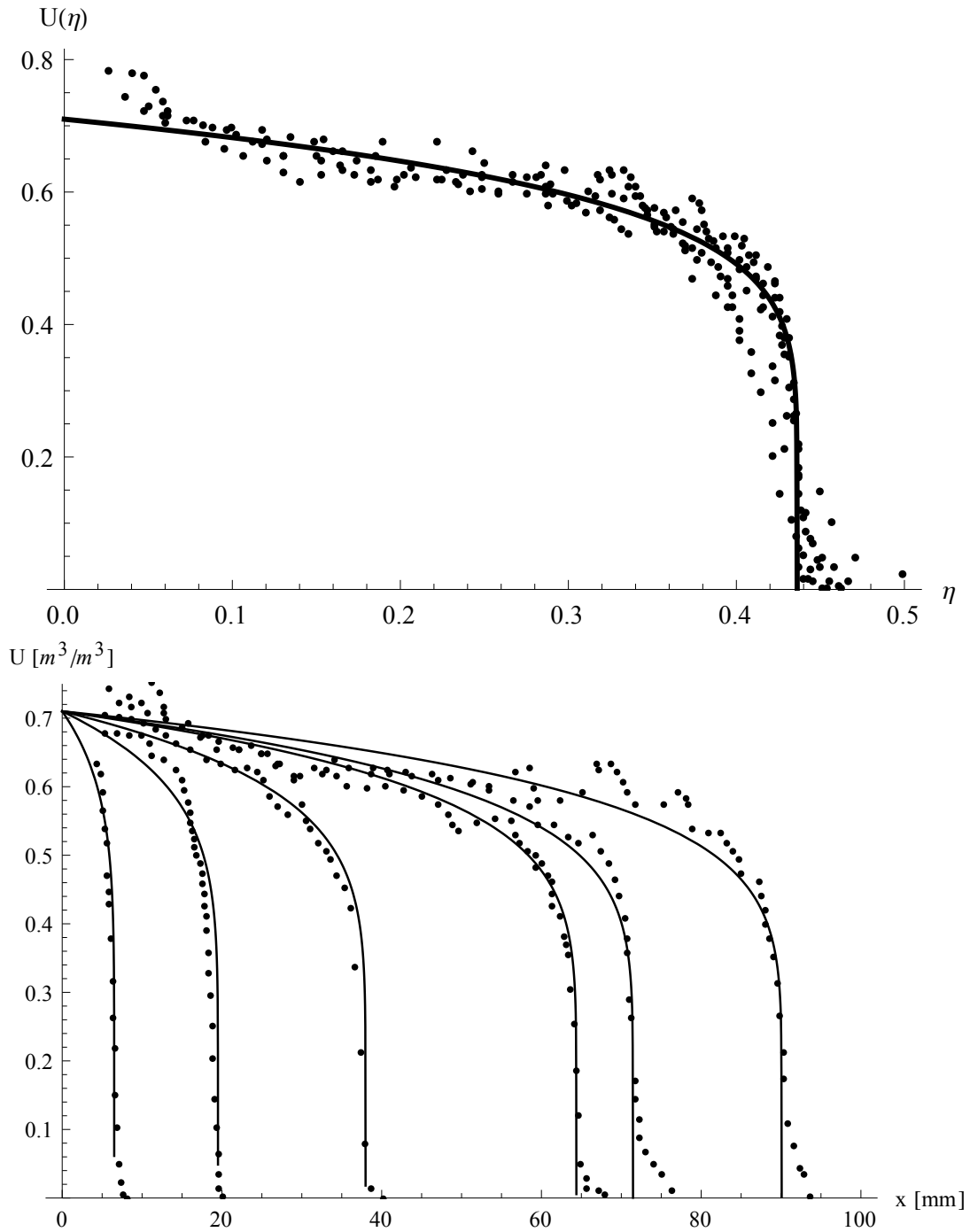
- **Reguła punktu środkowego.**

$$L_{a,b,c}^m y(x) := \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y(s_{i+1/2}^{1/c}x) \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1-s)^{b-1} s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^r(a, b) y(s_{i+1/2}^{1/c}x), \quad (4.2.104)$$

gdzie wagi $v^r(a, b)$ są takie same, jak w przypadku reguły prostokątów.

- **Reguła trapezów.**

$$\begin{aligned} L_{a,b,c}^t y(x) &:= \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y(s_{i+1}^{1/c}x) - y(s_i^{1/c}x)}{s_{i+1} - s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1-s)^{b-1} s^a (s - s_i) ds + y(s_i^{1/c}x) \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1-s)^{b-1} s^a ds \\ &= \sum_{i=0}^n v_i^t(a, b) y(s_i^{1/c}x), \end{aligned} \quad (4.2.105)$$



Rysunek 2: Dopasowanie U_3 ze wzoru (4.2.63) do danych eksperymentalnych wziętych z [25]. Na górze: postać samopodobna $U_3(\eta)$. Na dole: ewolucja czasowa $u_3(x, t)$. Dopasowane parametry wynoszą $\alpha = 0.855$, $C = 0.71 \text{ m}^3/\text{m}^3$, $m = 6.98$, $D_0 = 5.36 \text{ mm}/\text{s}^{0.855}$.

gdzie wagi mają postać

$$v_i^t(a, b) := \begin{cases} B_0, & i = 0; \\ A_{i-1} + B_i, & 0 < i < n; \\ A_{n-1}, & i = n, \end{cases} \quad (4.2.106)$$

$$A_i := \frac{1}{\Gamma(b)} \frac{\delta_i B(a+2, b) - s_i \delta_i B(a+1, b)}{s_{i+1} - s_i}, \quad (4.2.107)$$

$$B_i := \frac{1}{\Gamma(b)} \left(\delta_i B(a+1, b) - \frac{\delta_i B(a+2, b) - s_i \delta_i B(a+1, b)}{s_{i+1} - s_i} \right),$$

oraz

$$\delta_i B(a, b) := B(s_{i+1}; a, b) - B(s_i; a, b). \quad (4.2.108)$$

Oczywiście, można zastosować również inne metody interpolacyjne, jednak ich złożoność obliczeniowa wrasta bardzo gwałtownie z uwagi na nielokalność operatora E-K.

Jak się okazuje, dużo wydajniejsze jest przybliżanie operatora E-K wyrażonego całką (4.1.9) powstałą po podstawieniu $t = s^{1/c}x$. Wtedy

$$I_{a,b,c}y(x) = \frac{cx^{-c(a+b)}}{\Gamma(b)} \int_0^x (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} y(t) dt. \quad (4.2.109)$$

Zauważmy, że jest to operator typu Volterra (lub Abela ze względu na słabo osobliwe jądro). W podobny sposób jak wcześniej, możemy przybliżać powyższą całkę. Wprowadźmy podział odcinka $[0, x]$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n = x. \quad (4.2.110)$$

Wtedy

$$I_{a,b,c}y(x) = \frac{cx^{-c(a+b)}}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} y(t) dt. \quad (4.2.111)$$

Standardowe dyskretyzacje powyższej całki mają następującą postać.

- **Reguła prostokątów.**

$$K_{a,b,c}^r y(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y(t_i) \int_{(t_i/x)^c}^{(t_{i+1}/x)^c} (1-s)^{b-1} s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1} w_i^r(a, b, c) y(t_i), \quad (4.2.112)$$

z wagami

$$w_i^r(a, b, c) := \frac{B((t_{i+1}/x)^c; a+1, b) - B((t_i/x)^c; a+1, b)}{\Gamma(b)}. \quad (4.2.113)$$

- **Reguła punktu środkowego.**

$$K_{a,b,c}^m y(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y(t_{i+1/2}) \int_{(t_i/x)^c}^{(t_{i+1}/x)^c} (1-s)^{b-1} s^a ds = \sum_{i=0}^{n-1} w_i^r(a, b, c) y(t_{i+1/2}), \quad (4.2.114)$$

gdzie wagi są dokładnie takie same, jak w przypadku reguły prostokątów.

- **Reguła trapezów.**

$$K_{a,b,c}^t y(x) = \sum_{i=0}^n w_i^t(a, b, c) y(t_i), \quad (4.2.115)$$

z wagami zdefiniowanymi przez

$$w_i^t(a, b) := \begin{cases} D_0, & i = 0; \\ C_{i-1} + D_i, & 0 < i < n; \\ C_{n-1}, & i = n, \end{cases} \quad (4.2.116)$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_i &:= \frac{1}{\Gamma(b)} \frac{x \Delta_i B(a + 1/c + 1, b, c) - t_i \Delta_i B(a + 1, b, c)}{t_{i+1} - t_i}, \\ D_i &:= \frac{1}{\Gamma(b)} \left(\Delta_i B(a + 1, b, c) - \frac{x \Delta_i B(a + 1/c + 1, b, c) - t_i \Delta_i B(a + 1, b, c)}{t_{i+1} - t_i} \right), \end{aligned} \quad (4.2.117)$$

oraz

$$\Delta_i B(a, b, c) := B((t_{i+1}/x)^c; a, b) - B((t_i/x)^c; a, b). \quad (4.2.118)$$

Przyjmując jednostajne sieci pokrywające rozpatrywane odcinki możemy udowodnić rzędy błędów odcięcia powyższych dyskretyzacji. Najpierw jednak zaprezentujemy techniczny lemat.

Lemat 4 ([H5], Lemma 1) Dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $c > 0$ mamy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{a-1} \left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^c\right)^{b-1} \sim \begin{cases} \frac{1}{c} B\left(\frac{a}{c}, b\right), & a > 0 \text{ oraz } b > 0, \\ \ln n, & a = 0 \text{ oraz } b > 0, \\ c^{b-1} \ln n, & a > 0 \text{ oraz } b = 0, \\ \zeta(1-a)n^{-a}, & a < 0 \text{ oraz } b > a, \\ c^{b-1} \zeta(1-b)n^{-b}, & b < 0 \text{ oraz } a > b, \\ (1+c^{a-1})\zeta(1-a)n^{-a}, & a = b < 0, \end{cases} \quad (4.2.119)$$

gdzie $n \rightarrow \infty$.

Dowód lematu polega na odpowiednim oszacowaniu sumy. Dla $a, b > 0$ suma jest być zbieżna do całki Riemanna. Dla pozostałych przypadków konieczne jest zastosowanie innych technik, z których najbardziej pomocna polega na podzieleniu sumy na dwie części w zależności od monotoniczności sumowanej funkcji. Każda z tych sum częściowych może być wtedy oszacowana przez całkę, której zachowanie znajduje się po odpowiednim podstawieniu zmiennej.

Lemat 4 jest kluczowym narzędziem służącym do pokazania twierdzenia o rzędach zbieżności dyskretyzacji. Dzięki niemu możliwe jest *dokładne* wyznaczenie stałych, przez które szacuje się różnicę między operatorem $I_{a,b,c}$ a $L_{a,b,c}^\mu$ oraz $K_{a,b,c}^\mu$. Tutaj $\mu \in \{r, m, t\}$. Wprowadźmy jednostajną siatkę punktów, to jest $s_i = i/n$ oraz $t_i = xi/n$, gdzie n jest liczbą podziałów. Mamy oczywiście $s_{i+1} - s_i = 1/n$ oraz $t_{i+1} - t_i = x/n$.

Twierdzenie 10 ([H5], Theorem 1) Ustalmy $a, b, c > 0$ oraz załóżmy, że $y \in C^2(0, X)$. Wtedy dla ustalonego $x \in (0, X)$ dyskretyzacje odpowiadające operatorowi $I_{a,b,c}$ mają następujące zachowanie asymptotyczne dla $n \rightarrow \infty$.

- Reguła prostokątów

$$I_{a,b,c}y(x) - L_{a,b,c}^r y(x) \sim \frac{x y'(\sigma \frac{1}{c} x)}{c \cdot 2\Gamma(b)} \begin{cases} n^{-1} B\left(\frac{1}{c} + a, b\right), & \frac{1}{c} + a > 0; \\ n^{-1} \ln n, & \frac{1}{c} + a = 0; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)} \zeta\left(1 - \frac{1}{c} - a\right), & \frac{1}{c} + a < 0, \end{cases} \quad (4.2.120)$$

$$I_{a,b,c}y(x) - K_{a,b,c}^r y(x) \sim \frac{1}{n} \frac{x}{2\Gamma(b)} y'(\tau) B(a + 1, b).$$

- Reguła trapezów

$$I_{a,b,c}y(x) - L_{a,b,c}^t y(x) \sim \begin{cases} -\frac{x}{c} \left(\frac{1}{c} - 1\right) \frac{y'(\frac{\sigma}{c}x)}{12\Gamma(b)} \begin{cases} n^{-2}B\left(\frac{1}{c} + a - 1, b\right), & \frac{1}{c} + a > 1; \\ n^{-2} \ln n, & \frac{1}{c} + a = 1; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)} \zeta\left(2 - \frac{1}{c} - a\right), & \frac{1}{c} + a < 1, \end{cases} & c \neq 1; \\ -\frac{1}{n^2} \frac{x^2 y''(\sigma x)}{12\Gamma(b)} B(a+1, b), & c = 1. \end{cases} \quad (4.2.121)$$

$$I_{a,b,c}y(x) - K_{a,b,c}^t y(x) \sim -\frac{1}{n^2} \frac{x^2}{12\Gamma(b)} y''(\tau) B(a+1, b). \quad (4.2.122)$$

- Reguła punktu środkowego

$$I_{a,b,c}y(x) - L_{a,b,c}^m y(x) = \begin{cases} O(n^{-2}), & a + \frac{1}{c} > 1 \text{ and } b \geq 1; \\ O(n^{-2} \ln n), & a + \frac{1}{c} = 1 \text{ or } b \geq 1; \\ O(n^{-(1+\min\{b, a+\frac{1}{c}\})}), & -1 < a + \frac{1}{c} < 1 \text{ or } 0 < b < 1, \end{cases} \quad (4.2.123)$$

$$I_{a,b,c}y(x) - K_{a,b,c}^m y(x) = \begin{cases} O(n^{-2}), & c(a+1) \geq 1 \text{ and } b \geq 1; \\ O(n^{-(1+\min\{c(a+1), b\})}), & 0 < c(a+1) < 1 \text{ or } 0 < b < 1. \end{cases}$$

Tutaj $\sigma \in (0, 1)$ oraz $\tau \in (0, x)$ zależą od a, b, c , funkcji y oraz mogą być różne dla różnych dyskretyzacji.

Każdy przypadek wymieniony w tezie powyższego twierdzenia dowodzi się przez oszacowanie reszty w rozwinięciu Taylora-Lagrange'a. Na przykład, dla reguły prostokątów oraz operatora $K_{a,b,c}^r$ mamy

$$I_{a,b,c}y(x) = K_{a,b,c}^r y(x) + \frac{cx^{-c(a+b)}}{\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{n-1} y'(\tilde{\tau}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} (t - t_i) dt. \quad (4.2.124)$$

Definiując funkcję pomocniczą

$$G(z) := \int_{t_i}^z (x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} (t - t_i) dt, \quad (4.2.125)$$

możemy rozwinąć ją w $z = t_i$ oraz obliczyć wartość rozwinięcia w $z = t_{i+1}$ otrzymując

$$G(t_{i+1}) = (x^c - t_i^c)^{b-1} t_i^{c(a+1)-1} \frac{x^2}{2n^2} + \frac{d^2}{dt^2} [(x^c - t^c)^{b-1} t^{c(a+1)-1} (t - t_i)] \Big|_{t=\tilde{\tau}_i} \frac{x^3}{6n^3}. \quad (4.2.126)$$

Główną trudnością dowodu jest dokładne oszacowanie asymptotycznego rzędu reszty dla $n \rightarrow \infty$. W [H5] pokazujemy, że drugi składnik powyższego wyrażenia jest $o(n^{-2})$. Korzystając wtedy z Lematu 4 otrzymujemy rząd błędu dyskretyzacji operatorem $K_{a,b,c}^r$. W podobny sposób pokazujemy wszystkie inne oszacowania. Dla operatorów $L_{a,b,c}^m$ oraz $K_{a,b,c}^m$ występuje drobna różnica polegająca na niemożności skorzystania z twierdzenia o wartości średniej. Powoduje to, że otrzymany wynik jest podany jedynie z dokładnością do rzędu zbieżności (bez dokładnych stałych multiplikatywnych). Największą trudnością w dowodach jest pokazanie, że reszta rozwinięcia Taylora-Lagrange'a rzeczywiście jest rzędu większego od wcześniejszych wyrazów. Powodem tego jest osobliwe zachowanie się jądra operatora. Niemożliwe staje się wtedy stosowanie standardowych technik służących oszacowaniom reszty.

Dla dyskretyzacji operatorem $L_{a,b,c}^\mu$ zauważyć możemy, że osobliwość jądra operatora E-K pogarsza rząd zbieżności metody. Jest to niepożądany efekt wskazujący na to, że analiza numeryczna jest bardziej wydajna dla dyskretyzacji $K_{a,b,c}^\mu$. Zauważmy też, że zachodzi następujący wniosek mówiący o jednostajnych oszacowaniach.

	$a = 1, b = 1.5, c = 0.5$	$a = -0.9, b = 0.5, c = 2$
Reguła prostokątów	1.0000	0.6050
Reguła trapezów	2.0002	0.6000
Reguła punktu środkowego	1.9934	0.6008

Tablica 2: Oszacowane rzędy błędu dla dyskretyzacji $L_{a,b,c}$.

Wniosek 3 ([H5], Corollary 1) *Ustalmy $a, b, c > 0$ oraz załóżmy, że $y \in C^2(0, X)$. Niech M oznacza wspólne ograniczenia dla y' oraz y'' dla $x \in (0, X)$. Mamy wtedy następujące oszacowania*

- *Reguła prostokątów*

$$|I_{a,b,c}y(x) - L_{a,b,c}^r y(x)| \leq \frac{x}{c} \frac{M}{2\Gamma(b)} \begin{cases} n^{-1} B\left(\frac{1}{c} + a, b\right), & \frac{1}{c} + a > 0; \\ n^{-1} \ln n, & \frac{1}{c} + a = 0; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)} \zeta\left(1 - \frac{1}{c} - a\right), & \frac{1}{c} + a < 0, \end{cases} \quad (4.2.127)$$

$$|I_{a,b,c}y(x) - K_{a,b,c}^r y(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{x}{2\Gamma(b)} MB(a+1, b).$$

- *Reguła trapezów*

$$|I_{a,b,c}y(x) - L_{a,b,c}^t y(x)| \leq \begin{cases} \frac{x}{c} \left(\frac{1}{c} - 1\right) \frac{M}{12\Gamma(b)} \begin{cases} n^{-2} B\left(\frac{1}{c} + a - 1, b\right), & \frac{1}{c} + a > 1; \\ n^{-2} \ln n, & \frac{1}{c} + a = 1; \\ n^{-(1+\frac{1}{c}+a)} \zeta\left(2 - \frac{1}{c} - a\right), & \frac{1}{c} + a < 1, \end{cases} & c \neq 1; \\ \frac{1}{n^2} \frac{x^2 M}{12\Gamma(b)} B(a+1, b), & c = 1. \end{cases} \quad (4.2.128)$$

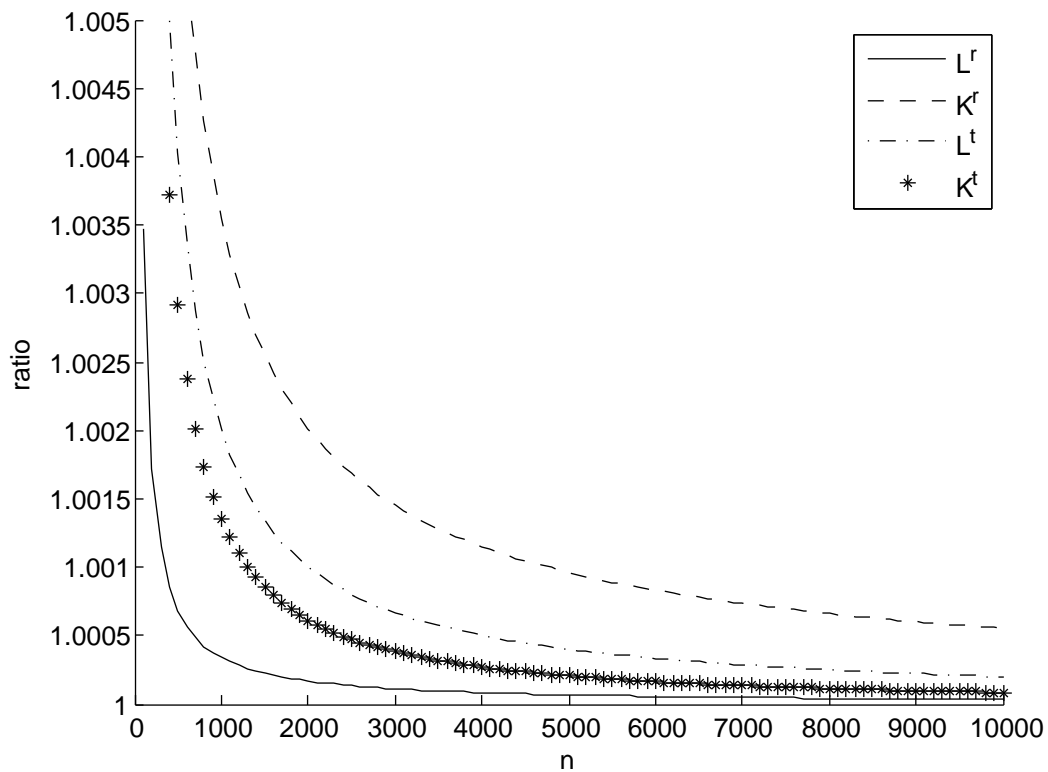
$$|I_{a,b,c}y(x) - K_{a,b,c}^t y(x)| \leq \frac{1}{n^2} \frac{x^2}{12\Gamma(b)} MB(a+1, b). \quad (4.2.129)$$

Aby numerycznie zilustrować Twierdzenie 10 policzymy dokładne stałe stojące przy n w odpowiednich potęgach wyliczonych w twierdzeniu. Bardziej konkretnie, dla metody trapezów oraz operatora $K_{a,b,c}^r$ obliczamy wyrażenie

$$\frac{|I_{a,b,c}y(x) - K_{a,b,c}^r y(x)|}{\frac{x}{2\Gamma(b)n} B(a+1, b)}, \quad (4.2.130)$$

dla coraz większych n . Ciąg ten powinien zbiegać do 1. Podobne wyrażenia są badane dla innych dyskretyzacji. Funkcja próbna jest jedną z dwóch w zależności od metody: $y(x) = x$ dla metody prostokątów lub $y(x) = x^2/2$ dla trapezów. Wybór jest podyktowany stałością pierwszej lub drugiej pochodnej. Rezultaty symulacji numerycznych ukazane są na Rys. 3. Widzimy, że wszystkie wielkości zbiegają do 1, co weryfikuje tezę Twierdzenia 10.

Kolejnym testem, który możemy wykonać jest numeryczne wyznaczenie rzędów zbieżności. Jako funkcję próbną wybierzmy $y(x) = e^x$. Ponieważ nie posiadamy analitycznego wzoru na funkcję $I_{a,b,c}y(x)$, konieczne jest zastosowanie metody pośredniej. Jedną z nich jest zastosowanie ekstrapolacji Richardsona, która zastosowana do wyliczenia rzędu zbieżności nosi nazwę metody Aitkena [40]. Wyniki obliczeń podane są w Tab. 2-3. Zobaczyć możemy, że obliczenia numeryczne są w zgodzie z teoretycznymi wynikami Twierdzenia 10. Zauważalne jest też pogorszenie zbieżności dla operatora $L_{a,b,c}$ wraz ze wzrostem rzędu osobliwości jądra operatora E-K.



Rysunek 3: Stosunki różnicy $|I_{a,b,c}y(x) - A_{a,b,c}y(x)|$ oraz jej asymptotycznej postaci podanej w (4.2.120)-(4.2.122) dla $n \rightarrow \infty$. Tutaj $A_{a,b,c}$ jest jednym z operatorów wymienionych w legendzie. Wybór funkcji próbnej $y = y(x)$ jest opisany w tekście. Wybrane parametry to $a = 0.5$, $b = 1.5$ oraz $c = 0.5$ dla $x = 1$.

	$a = 1, b = 1.5, c = 0.5$	$a = -0.9, b = 0.5, c = 2$
Reguła prostokątów	1.0001	1.0088
Reguła trapezów	2.0001	1.9977
Reguła punktu środkowego	1.9985	1.1955

Tablica 3: Oszacowane rzędy błędów dla dyskretyzacji $K_{a,b,c}$.

Na koniec podamy wynik dotyczący metody numerycznej służącej do numerycznego rozwiązania równania całkowo-różniczkowego z operatorem E-K

$$y' = f(x, y, I_{a,b,c}y), \quad y(0) = y_0, \quad x \in (0, X), \quad (4.2.131)$$

gdzie f jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza

$$|f(x, u, p) - f(x, v, p)| \leq L_1|u - v|, \quad |f(x, u, p) - f(x, u, q)| \leq L_1|p - q|. \quad (4.2.132)$$

Jako metodę numeryczną wybierzmy schemat oparty na metodach trapezów zarówno dla równania jak i dla dyskretyzacji operatora E-K. Ma ona postać

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n, K_{a,b,c}^t y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}, K_{a,b,c}^t y_{n+1})). \quad (4.2.133)$$

Nasza siatka podziału zmiennej niezależnej ma postać $x_n = nh$ dla $h = X/N$ oraz, zwyczajowo, oznaczyliśmy numeryczne przybliżenie $y_n \approx y(x_n)$. Metoda (4.2.133) jest zbieżna a jej rząd zbieżności wynosi 2.

Twierdzenie 11 ([H5], Theorem 3) *Założmy, że $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ oraz $x \in [0, X]$. Wtedy, dla $a > -1$, $b \geq 1$ oraz $c > 0$ schemat różnicowy (4.2.133) jest zbieżny z rzędem równym 2:*

$$|y(x_n) - y_n| = O(h^2) \quad \text{gdy} \quad h \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad nh = \text{const}. \quad (4.2.134)$$

Kiedy oznaczymy błąd metody przez

$$e_n := y(x_n) - y_n, \quad (4.2.135)$$

możemy zapisać

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y(x_n), Iy(x_n)) - f(x_n, y_n, Ky_n)) \\ &\quad + \frac{h}{2} (f(x_{n+1}, y(x_{n+1}), I_{a,b,c}y(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, y_{n+1}, Ky_{n+1})) + Ch^3, \end{aligned} \quad (4.2.136)$$

gdzie skorzystaliśmy z postaci błędu dyskretyzacji dla kwadratury trapezów. Szacując dalej oraz korzystając z definicji operatora $K_{a,b,c}^t$ i warunku Lipschitza możemy otrzymać następującą nierówność rekurencyjną

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq \frac{1}{1 - L_1 \frac{h}{2} - WL_2 \frac{h^2}{2}} \left[\left(1 + L_1 \frac{h}{2}\right) |e_n| + WL_2 h^2 \sum_{i=1}^n |e_i| + (DL_2 + C)h^3 \right] \\ &\leq (1 + C_1 h) |e_n| + C_2 h^2 \sum_{i=1}^n |e_i| + C_3 h^3, \end{aligned} \quad (4.2.137)$$

gdzie wszystkie wielkie litery oznaczają pewne dodatnie stałe. Rekurencja ta może być rozwiązana, to jest używając indukcji matematycznej możemy pokazać, że

$$|e_{n+1}| \leq \frac{(1 + C_1 h + C_2(n+1)h^2)^{n+1} - 1}{C_1 h} C_3 h^3. \quad (4.2.138)$$

Ponieważ mamy $(1 + C_1 h + C_2(n+1)h^{1+\delta})^{n+1} \leq (1 + C_4 h)^{n+1} \leq e^{C_4}$, to zachodzi $|e_{n+1}| \leq O(h^2)$. Występująca tutaj nierówność rekurencyjna jest przykładem uogólnienia dyskretnego lematu Gronwalla.

Pokazaliśmy zatem, że operator E-K może być skutecznie przybliżony numerycznie. Te dyskretyzacje mogą zostać użyte do skonstruowania schematu różnicowego służącego do znajdowania rozwiązań równań całkowo-różniczkowych, w których występuje ten operator. Przy takiej konstrukcji ważny jest odpowiedni dobór sposobu dyskretyzacji całek, gdyż niewłaściwy jego wybór może pogorszyć zbieżność metody.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych (artystycznych).

- (a) Lista publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego. Prace wymienione są tematycznie (nie chronologicznie).
- [P1] W. Okrański, Ł. Płociniczak, *A Nonlinear Mathematical Model of the Corneal Shape*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 13 (2012), 1498-1505.
 - [P2] W. Okrański, Ł. Płociniczak, *Bessel function model of corneal topography*, *Applied Mathematics and Computation* 223 (2013), 436-443.
 - [P3] W. Okrański, J.J. Nieto, Ł. Płociniczak, O. Dominguez, *On a nonlinear boundary value problem modeling corneal shape*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 414 (1) (2014), 461-471.
 - [P4] W. Okrański, Ł. Płociniczak, *Regularization of an Ill-posed Problem in Corneal Topography*, *Inverse Problems in Science and Engineering* 21 (6) (2013), 1090-1097.
 - [P5] W. Okrański, Ł. Płociniczak, *Nonlinear Parameter Identification in Corneal Geometry Model*, *Inverse Problems in Science and Engineering* 23 (3) (2015), 443-456.
 - [P6] G. Griffiths, Ł. Płociniczak, W. Schiesser, *Analysis of cornea curvature using radial basis functions - Part I: Methodology*, *Computers in Biology and Medicine*, 77 (2016), 274-284.
 - [P7] G. Griffiths, Ł. Płociniczak, W. Schiesser, *Analysis of cornea curvature using radial basis functions - Part II: Fitting to data-set*, *Computers in Biology and Medicine* 77 (2016), 285-296.
 - [P8] G. Griffiths, Ł. Płociniczak, W. Schiesser, *ODE/PDE Analysis of Corneal Curvature*, *Computers in Biology and Medicine* 53 (2014), 30-41.
 - [P9] W. Okrański, Ł. Płociniczak, *Solution estimates for a system of nonlinear integral equations arising in optometry*, *Journal of Integral Equations and Applications*, przyjęte do druku
 - [P10] Ł. Płociniczak, *On asymptotics of some fractional differential equations*, *Mathematical Modelling and Analysis* 18 (3) (2013), 358-373.
 - [P11] Ł. Płociniczak, *Eigenvalue asymptotics of a fractional boundary-value problem*, *Applied Mathematics and Computation* 241 (2014), 125-128.
 - [P12] W. Okrański, Ł. Płociniczak, *A note on fractional Bessel function and its asymptotics*, *Fractional Calculus and Applied Analysis* 16 (3) (2013), 559-572.
 - [P13] Ł. Płociniczak, A. Popiołek-Masajada, M. Szatkowski, J. Masajada, *High order vortex beam in the optical vortex microscope*, *SPIE Optical Engineering+ Applications*, International Society for Optics and Photonics (2015) p. 95810N-95810N-8.
 - [P14] Ł. Płociniczak, A. Popiołek-Masajada, J. Masajada, M. Szatkowski, *Analytical model of the optical vortex microscope*, *Applied Optics* 55(12) (2016), B20-B27.
 - [P15] Ł. Płociniczak, A. Popiołek-Masajada, M. Szatkowski, D. Wojnowski, *Transformation of the vortex beam in the optical vortex scanning microscope*, *Optics & Laser Technology* 81 (2016), 127-136.
 - [P16] M. Maciejewska, Ł. Płociniczak, A. Szczurek, *Regularization and the inflection point method for a sensor signal in gas concentration measurement*, *Inverse Problems in Science and Engineering* 25(4) (2017), 555-579.
 - [P17] Ł. Płociniczak, M. Świtała, *Monotonicity, oscillations and stability of a solution to a nonlinear equation modelling the capillary rise*, *Physica D* 362 (2018), 1-8

- (b) Omówienie wyników prac zawartych w publikacjach niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

5.1 Modele topografii rogówki (prace [P1-P9])

Tematyką związaną z modelowaniem topografii rogówki oka ludzkiego zajmowaliśmy się w pracach związanych z rozprawą doktorską habilitanta. Problemy tam powstałe okazały się jednak na tyle ciekawe matematycznie, że praca nad nimi jest wciąż kontynuowana w międzynarodowym gronie. Pokróćce omówimy wyniki uzyskane na tym polu.

Prace [P1-P2,P4] stanowiły początek badań nad modelem matematycznym rogówki oka ludzkiego oraz wchodziły w skład rozprawy doktorskiej habilitanta. Modelowanie zjawisk związanych z widzeniem staje się coraz bardziej znaczące dla rozwoju cywilizacyjnego, ponieważ pozwala lepiej i sprawniej diagnozować wady i choroby oczu. Jedną z najważniejszych części oka, która odpowiada za około 2/3 mocy optycznej, jest rogówka. Jest to wytrzymała i przezroczysta powłoka, która stanowi pierwszą granicę między okiem a światem zewnętrznym. Opis jej geometrii jest kluczowy do zrozumienia oraz leczenia problemów z widzeniem takich jak krótko- i dalekowzroczność oraz astygmatyzm.

Wyprowadzony model opiera się na stacjonarnym bilansie sił oraz potraktowaniu rogówki jako cienkiej membrany. W pewnym sensie można o nim myśleć jako o formie pośredniej między prostymi modelami opartymi na powierzchniach obrotowych generowanych przez krzywe stożkowe, a bardzo skomplikowanymi modelami związanymi z teorią sprężystości. W zapisie różniczkowym, nasz model ma postać

$$-T \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right) + kh = \frac{P}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}}, \quad h|_{\Omega} = 0, \quad (5.1.1)$$

gdzie $h = h(x, y)$ opisuje kształt rogówki, Ω jest dziedziną, T jest napięciem powierzchniowym, k stałą sprężystości (związaną z modułem Younga), a P ciśnieniem wewnątrzgałkowym. Równanie to ustanawia związek między topografią rogówki a ciśnieniem, które jest jednym z podstawowych parametrów mierzonych podczas badania oka.

W pracach [P1-P2] przedstawione zostały wyniki dotyczące istnienia i jednoznaczności oraz oszacowań dla osiowosymetrycznych rozwiązań powyższego zagadnienia brzegowego. Udało się otrzymać kilka rezultatów mówiących, że jeśli ciśnienie nie jest zbyt duże, to badany problem ma jednoznacznie określone rozwiązanie. Nie jest to jednak najbardziej ogólny wynik, który można osiągnąć. Inni autorzy [19] pokazali identyczną tezę przy całkowitej rezygnacji z założeń na występujące w równaniu parametry oraz kilka rezultatów pobocznych [18, 110]. Nasze rezultaty zostały ulepszone w [P3,P9], z których praca [P3] powstała przy współpracy z hiszpańskimi matematykami z Santiago de Compostela. Pokazujemy tam dodatkowe oszacowania oraz silniejszy rezultat egzystencjalny.

Artykuły [P4-P5] podejmują ważny z punktu widzenia zastosowań, temat problemów odwrotnych. Polega on na wyznaczeniu ciśnienia wewnątrzgałkowego na podstawie wiedzy o topografii rogówki. Ponieważ kształt oka jest dostatecznie łatwo mierzalny, a pomiar ciśnienia niemal zawsze jest inwazyjny (nieprzyjemny dla pacjenta), to tak postawione zagadnienie odwrotne jest dobrze umotywowane matematycznie. Nasze zagadnienie odwrotne okazuje się być źle postawione i konieczna jest jego regularyzacja, którą przeprowadzamy w wymienionych pracach. Uda się uzyskać stabilny oraz jednoznaczny sposób wyznaczenia ciśnienia. Oprócz tego pokazujemy szereg oszacowań na błąd regularyzacji.

Cykl prac [P6-P8] powstał przy współpracy badaczy z Lehigh Univeristy w USA oraz City Univeristy of London. Podejmują one tematykę metod numerycznych służących znajdowaniu rozwiązań powyższego równania. Prezentujemy tam wyniki dotyczące metody linii (ang. *Method of Lines, MOL*) oraz metody bezsiatkowej (ang. *Meshless Method*). Oba te podejścia różnią się od standardowych metod przyrostów oraz elementów skończonych i mają nad nimi pewną przewagę implementacyjną. Do wymienionych prac dołączone są kody w języku R mające na celu przybliżenie algorytmów dla matematycznie słabiej wyszkolonych badaczy (np. lekarzy).

5.2 Asymptotyka rozwiązań ułamkowych równań różniczkowych (prace [P10-P12])

Kolejne wymienione prace dotyczą, podobnie jak osiągnięcie naukowe, równań różniczkowych z pochodną ułamkową. Podstawowy wynik otrzymany został w [P10] i dotyczy asymptotycznego zachowania się rozwiązań równań typu

$${}^c D_0^\alpha y = \lambda q(x)y, \quad 0 < \alpha < 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.2.1)$$

Rozwiązanie powyższego równania ma różne zachowanie w zależności od znaku λ . Najciekawsze z nich występuje dla $\lambda < 0$ oraz $1 < \alpha < 2$, kiedy to pojawiają się tzw. ułamkowe oscylacje. Asymptotycznie, to jest dla dużych x lub dużych λ , rozwiązanie posiada dwie składowe: wykładniczo gasnące oscylacje oraz monotonicznie malejącą funkcję potęgową. W rezultacie rozwiązanie ma jedynie skończoną ilość miejsc zerowych a ich liczba jest silnie zależna od wartości α . W tejże pracy znajdujemy również wyrażenie przybliżające dokładną ilość tych zer.

Wyniki poprzedniego artykułu zostały wykorzystane przy badaniu zagadnień brzegowych, czyli powyższego równania zaopatrzonego jednorodnymi warunkami

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (5.2.2)$$

Adaptując powyższe rezultaty do tej sytuacji pokazujemy w [P11], że ilość funkcji własnych oraz odpowiadających im wartości własnych jest skończona. Jest to wynik bardzo różniący się od klasycznego, dotyczącego zagadnień Sturm-Liouville'a. W wymienionej pracy znajdujemy również asymptotyczne zachowanie się wartości własnych badanego zagadnienia ułamkowego.

Ostatnia praca z niniejszego cyklu [P12] prezentuje podobne wyniki jak powyżej, dotyczące tym razem ułamkowego równania Bessela. Znajdujemy tam asymptotykę rozwiązań, które nazwać możemy ułamkowymi funkcjami Bessela. Jak można się spodziewać, nasze wyniki redukują się do tych dobrze znanych klasycznie, jeśli parametr rzędu pochodnej α dąży do liczby całkowitej.

5.3 Model analityczny mikroskopu opartego na wirach optycznych (prace [P13-P15])

Prace [P13-P15] powstały przy współpracy z fizykami pracującymi na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. Współpraca była wspierana grantem Narodowego Centrum Nauki. Wkład habilitanta w pracę polegał na konstrukcji modelu analitycznego mikroskopu skaningowego opartego na wirach optycznych. Jest to nowa technologia oparta na innowacyjnym podejściu do skanowania obserwowanego obiektu.

Model analityczny takiego urządzenia opiera się na całce typu Fresnela, której jądro zawiera produkt składników opisujących takie elementy układu optycznego jak wiązka, wir optyczny oraz obiekt. Trudność w jej wyliczeniu polega na tym, że wir optyczny łamie symetrię osiową funkcji

podcałkowej. Komplikuje to w znaczny sposób obliczenia. W pracach [P13-P15] przedstawione są wyniki o coraz większym stopniu złożoności, które w rezultacie prowadzą do podania gotowych wzorów na amplitudę wiązki świetlnej po przejściu przez układ optyczny. Dodatkowo, wskazany jest również sposób na wprowadzenie dowolnego obiektu, który dzięki transformacie Fouriera, redukuje się do translacji i skalowania parametrów rozwiązania.

5.4 Analiza metody punktu przegięcia w technice pomiarowej (praca [P16])

Wyniki opisane w tej części zostały otrzymane podczas współpracy habilitanta z naukowcami pracującymi na Wydziale Inżynierii Środowiska Politechniki Wrocławskiej. Dotyczą one analizy sygnału czujnika związków lotnych takich jak benzen, toluen czy ksylen. Typowy pomiar polega na wystawieniu czujnika na działanie gazu i odczekanie pewnego, względnie długiego, czasu aż urządzenie osiągnie stan ustalony. Poziom sygnału nasycenia może być wtedy skorelowany z rzeczywistą koncentracją związku.

Jak się okazało oczekiwanie na wiarygodny pomiar stężenia można znacząco skrócić. Badany sygnał rośnie monotonicznie, jednak posiada dokładnie jeden punkt przegięcia. Dostyc niespodziewanie, współrzędne tego punktu liniowo zależną od koncentracji związku. Ponadto, punkt przegięcia występuje około 20 razy szybciej niż nasycenie czujnika, co daje nam szybką metodę wyznaczania koncentracji związku.

Problemem czysto matematycznym jest regularyzacja sygnału. Obliczenie punktu przegięcia oznacza znalezienie maksimum pochodnej. Możemy skorzystać z metody Brenta lub Złotego Podziału aby poradzić sobie z tym zadaniem bez konieczności liczenia drugiej pochodnej, jednak pierwsza pochodna zawsze musi zostać znaleziona. Sygnał zmierzony jest z błędem (szumem), co ma bardzo duży wpływ na wartość pochodnej oraz, tym samym, na wyznaczanie punktu przegięcia. W omawianej pracy proponujemy szereg algorytmów wygładzających sygnał tak, aby koncentracja mogła zostać znaleziona w stabilny sposób. Dowodzimy również kilku oszacowań *a-priori* mówiących o ile różni się znaleziony punkt przegięcia od tego rzeczywistego przy znajomości poziomu zaszumienia sygnału. Wyniki teoretyczne są zweryfikowane na podstawie rzeczywistych danych, co potwierdza naszą konstrukcję szybkiej techniki pomiarowej. Wynik może zostać wykorzystany w systemach szybkiego ostrzegania, gdzie znajomość, choćby niedokładnej, wartości koncentracji trujących związków musi zostać zmierzona w bardzo krótkim czasie.

5.5 Analiza równania wzniosu kapilarnego (praca [P17])

Równanie opisujące wznios kapilarny $H = H(t)$ w czasie uwzględniające napięcie powierzchniowe, grawitację oraz lepkość ma następującą bezwymiarową postać

$$HH' + H + \omega (HH')' = 1, \quad (5.5.1)$$

gdzie $\omega > 0$ oraz $H(0) = 0$, $H'(0) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Jest to nieliniowe, osobliwe równanie zwyczajne drugiego rzędu, którego analizą zajęliśmy się w cytowanej pracy. Najważniejszym wynikiem, oprócz globalnego istnienia i jednoznaczności, było sklasyfikowanie zachowania się rozwiązania ze względu na monotoniczność. Okazało się, że ze wszystkich fizycznych parametrów możemy utworzyć bezwymiarową kombinację ω , która determinuje charakter rozwiązania. Dokładniej, pokazaliśmy że dla $\omega < 0.25$ rozwiązanie jest monotoniczne, a dla $\omega > 0.25$ oscyluje ono wokół położenia równowagi. Wynik był zweryfikowany na podstawie rzeczywistych danych. W każdym przypadku teoria zgadzała się z eksperymentem.

Bibliografia

- [1] Donald G Aronson. "Regularity properties of flows through porous media: The interface". W: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 37.1 (1970), s. 1–10.
- [2] Donald G Aronson. "Regularity properties of flows through porous media". W: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17.2 (1969), s. 461–467.
- [3] Frederic V Atkinson i Lambertus A Peletier. "Similarity profiles of flows through porous media". W: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 42.5 (1971), s. 369–379.
- [4] Eduardo N de Azevedo i in. "Concentration-dependent diffusivity and anomalous diffusion: a magnetic resonance imaging study of water ingress in porous zeolite". W: *Physical Review E* 73.1 (2006), s. 011204.
- [5] Ronald L Bagley i PJ Torvik. "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity". W: *Journal of Rheology (1978-present)* 27.3 (1983), s. 201–210.
- [6] Christopher TH Baker. "A perspective on the numerical treatment of Volterra equations". W: *Journal of computational and applied mathematics* 125.1 (2000), s. 217–249.
- [7] Dumitru Baleanu i in. "Models and numerical methods". W: *World Scientific* 3 (2012), s. 10–16.
- [8] George K Batchelor. "The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion". W: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 76.328 (1950), s. 133–146.
- [9] Jacob Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation, 2013.
- [10] Jean-Philippe Bouchaud i Antoine Georges. "Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications". W: *Physics reports* 195.4-5 (1990), s. 127–293.
- [11] Royal Harvard Brooks i Arthur Thomas Corey. "Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design". W: *Transactions of the ASAE* 7.1 (1964), s. 26–0028.
- [12] Hermann Brunner i Pieter Jacobus Houwen. *The numerical solution of Volterra equations*. T. 3. Elsevier Science Ltd, 1986.
- [13] Peter J Bushell. "On a class of Volterra and Fredholm non-linear integral equations". W: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 79. 02. Cambridge Univ Press. 1976, s. 329–335.
- [14] Peter J Bushell. "The Cayley-Hilbert metric and positive operators". W: *Linear Algebra and its Applications* 84 (1986), s. 271–280.
- [15] Luis Caffarelli i Luis Silvestre. "An extension problem related to the fractional Laplacian". W: *Communications in partial differential equations* 32.8 (2007), s. 1245–1260.
- [16] Michele Caputo. "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II". W: *Geophysical Journal International* 13.5 (1967), s. 529–539.
- [17] Jin Cheng i in. "Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation". W: *Inverse problems* 25.11 (2009), s. 115002.
- [18] Isabel Coelho, Chiara Corsato i Pierpaolo Omari. "A one-dimensional prescribed curvature equation modeling the corneal shape". W: *Boundary Value Problems* 2014.1 (2014), s. 1.
- [19] Chiara Corsato, Colette De Coster i Pierpaolo Omari. "The Dirichlet problem for a prescribed anisotropic mean curvature equation: existence, uniqueness and regularity of solutions". W: *Journal of Differential Equations* 260.5 (2016), s. 4572–4618.

- [20] AH Craven i Lambertus A Peletier. "Similarity solutions for degenerate quasilinear parabolic equations". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 38.1 (1972), s. 73–81.
- [21] Diego del-Castillo-Negrete, BA Carreras i VE Lynch. "Nondiffusive transport in plasma turbulence: a fractional diffusion approach". W: *Physical review letters* 94.6 (2005), s. 065003.
- [22] Kai Diethelm i Neville J Ford. "Analysis of fractional differential equations". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 265.2 (2002), s. 229–248.
- [23] Vladan D Djordjevic i Teodor M Atanackovic. "Similarity solutions to nonlinear heat conduction and Burgers/Korteweg–deVries fractional equations". W: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 222.2 (2008), s. 701–714.
- [24] Nicolaas Du Plessis. "Some theorems about the Riesz fractional integral". W: *Transactions of the American Mathematical Society* 80.1 (1955), s. 124–134.
- [25] Abd El-Ghany El Abd i Jacek J Milczarek. "Neutron radiography study of water absorption in porous building materials: anomalous diffusion analysis". W: *Journal of Physics D: Applied Physics* 37.16 (2004), s. 2305.
- [26] Heinz Werner Engl, Martin Hanke i Andreas Neubauer. *Regularization of inverse problems*. T. 375. Springer Science & Business Media, 1996.
- [27] Arthur Erdélyi. "On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms". W: *The Quarterly Journal of Mathematics* 1 (1940), s. 293–303.
- [28] Elmar Fischer i in. "Segment diffusion in polymers confined in nanopores: A fringe-field NMR diffusometry study". W: *Physical Review E* 59.4 (1999), s. 4079.
- [29] Rafail K Gazizov, Alexei A Kasatkin i Stanislav Lukashchuk. "Symmetry properties of fractional diffusion equations". W: *Physica Scripta* 2009.T136 (2009), s. 014016.
- [30] DN Gerasimov, VA Kondratieva i OA Sinkevich. "An anomalous non-self-similar infiltration and fractional diffusion equation". W: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 239.16 (2010), s. 1593–1597.
- [31] Brian H Gilding. "On a class of similarity solutions of the porous media equation, III". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 77.2 (1980), s. 381–402.
- [32] Brian H Gilding i Lambertus A Peletier. "On a class of similarity solutions of the porous media equation". W: *Journal of mathematical analysis and applications* 55.2 (1976), s. 351–364.
- [33] Brian H Gilding i Lambertus A Peletier. "On a class of similarity solutions of the porous media equation II". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 57.3 (1977), s. 522–538.
- [34] Rudolf Gorenflo, Yuri Luchko i Francesco Mainardi. "Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation". W: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 118.1 (2000), s. 175–191.
- [35] Rudolf Gorenflo i Francesco Mainardi. *Fractional calculus*. Springer, 1997.
- [36] Gustaf Gripenberg. "Unique solutions of some Volterra integral equations". W: *Mathematica Scandinavica* 48.1 (1981), s. 59–67.
- [37] Charles W Groetsch. *Inverse problems in the mathematical sciences*. T. 52. Springer, 1993.
- [38] Qing Gu i in. "Non-Gaussian transport measurements and the Einstein relation in amorphous silicon". W: *Physical review letters* 76.17 (1996), s. 3196.
- [39] Jacques Hadamard. *Le probleme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. T. 220. Paris Russian translation), 1932.

- [40] Ernst Hairer, Syvert P Nørsett i Gerhard Wanner. "Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems". W: *Springer Ser. Comput. Math* (1993).
- [41] Shlomo Havlin i in. "Probability densities for the displacement of random walks on percolation clusters". W: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 18.12 (1985), s. L719.
- [42] Rudolf Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific, 2000.
- [43] Yanghong Huang i Adam Oberman. "Numerical methods for the fractional Laplacian: A finite difference-quadrature approach". W: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 52.6 (2014), s. 3056–3084.
- [44] Jaan Janno i Kairi Kasemets. "Uniqueness for an inverse problem for a semilinear time-fractional diffusion equation". W: *arXiv preprint arXiv:1609.03693* (2016).
- [45] Junxiong Jia i Kexue Li. "Maximum principles for a time–space fractional diffusion equation". W: *Applied Mathematics Letters* 62 (2016), s. 23–28.
- [46] Bangti Jin i William Rundell. "A tutorial on inverse problems for anomalous diffusion processes". W: *Inverse Problems* 31.3 (2015), s. 035003.
- [47] Bangti Jin i William Rundell. "An inverse problem for a one-dimensional time-fractional diffusion problem". W: *Inverse Problems* 28.7 (2012), s. 075010.
- [48] Anatoly Kilbas. "Hadamard-type fractional calculus". W: *Journal of the Korean Mathematical Society* 38.6 (2001), s. 1191–1204.
- [49] Rainer Kimmich i in. "Field-cycling NMR relaxometry of polymers confined to artificial tubes: verification of the exponent $3/4$ in the spin–lattice relaxation dispersion predicted by the reptation model". W: *Chemical physics letters* 307.3 (1999), s. 147–152.
- [50] John R King. "Approximate solutions to a nonlinear diffusion equation". W: *Journal of engineering mathematics* 22.1 (1988), s. 53–72.
- [51] Virginia S Kiryakova. *Generalized fractional calculus and applications*. CRC Press, 1993.
- [52] Virginia S Kiryakova i Bader N Al-Saqabi. "Transmutation method for solving Erdélyi–Kober fractional differintegral equations". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 211.1 (1997), s. 347–364.
- [53] Hermann Kober. "On fractional integrals and derivatives". W: *The Quarterly Journal of Mathematics* 11 (1940), s. 193–211.
- [54] RC Koeller. "Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity". W: *Journal of Applied Mechanics* 51.2 (1984), s. 299–307.
- [55] Michel Küntz i Paul Lavallée. "Experimental evidence and theoretical analysis of anomalous diffusion during water infiltration in porous building materials". W: *Journal of Physics D: Applied Physics* 34.16 (2001), s. 2547.
- [56] M Levandowsky, BS White i FL Schuster. "Random movements of soil amebas". W: *Acta Protozoologica* 36 (1997), s. 237–248.
- [57] Xianjuan Li i Chuanju Xu. "A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation". W: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 47.3 (2009), s. 2108–2131.
- [58] Xianjuan Li i Chuanju Xu. "Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation". W: *Communications in Computational Physics* 8.5 (2010), s. 1016.
- [59] Yumin Lin i Chuanju Xu. "Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation". W: *Journal of Computational Physics* 225.2 (2007), s. 1533–1552.
- [60] Peter Linz. *Analytical and numerical methods for Volterra equations*. SIAM, 1985.

- [61] Fawang Liu i in. "Numerical simulation for solute transport in fractal porous media". W: *ANZIAM Journal* 45 (2004), s. 461–473.
- [62] Fawang Liu i in. "Time fractional advection-dispersion equation". W: *Journal of Applied Mathematics and Computing* 13.1-2 (2003), s. 233–245.
- [63] Yikan Liu, William Rundell i Masahiro Yamamoto. "Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem". W: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 19.4 (2016), s. 888–906.
- [64] Yuri Luchko. "Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 374.2 (2011), s. 538–548.
- [65] Yuri Luchko i in. "Uniqueness and reconstruction of an unknown semilinear term in a time-fractional reaction–diffusion equation". W: *Inverse Problems* 29.6 (2013), s. 065019.
- [66] Yury Luchko. "Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations". W: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 14.1 (2011), s. 110–124.
- [67] Yury Luchko. "Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 351.1 (2009), s. 218–223.
- [68] Yury Luchko. "Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation". W: *Computers & Mathematics with Applications* 59.5 (2010), s. 1766–1772.
- [69] Stanislav Yu Lukashchuk. "Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations". W: *Nonlinear Dynamics* 80.1-2 (2015), s. 791–802.
- [70] Stanislav Lukashchuk i AV Makunin. "Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term". W: *Applied Mathematics and Computation* 257 (2015), s. 335–343.
- [71] Richard L Magin. *Fractional calculus in bioengineering*. Begell House Redding, 2006.
- [72] Francesco Mainardi. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2010.
- [73] Francesco Mainardi. "The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation". W: *Applied Mathematics Letters* 9.6 (1996), s. 23–28.
- [74] Francesco Mainardi, Yuri Luchko i Gianni Pagnini. "The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation". W: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 4.2 (2001), s. 153–192.
- [75] Francesco Mainardi, Antonio Mura i Gianni Pagnini. "The M-Wright Function in Time-Fractional Diffusion Processes: A Tutorial Survey". W: *International Journal of Differential Equations* 2010 (2010).
- [76] Celso Martinez, Miguel Sanz i Ma Dolores Martinez. "About fractional integrals in the space of locally integrable functions". W: *Journal of mathematical analysis and applications* 167.1 (1992), s. 111–122.
- [77] Mark M Meerschaert i Charles Tadjeran. "Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations". W: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 172.1 (2004), s. 65–77.
- [78] FC Meral, TJ Royston i R Magin. "Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study". W: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15.4 (2010), s. 939–945.

- [79] Ralf Metzler i Joseph Klafter. "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach". W: *Physics reports* 339.1 (2000), s. 1–77.
- [80] Kenneth S Miller. "The Weyl fractional calculus". W: *Fractional calculus and its applications*. Springer, 1975, s. 80–89.
- [81] Kenneth S Miller i Bertram Ross. "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations". W: (1993).
- [82] W Mydlarczyk. "The existence of nontrivial solutions of Volterra equations". W: *Mathematica Scandinavica* (1991), s. 83–88.
- [83] Ralph Nossal. "Stochastic aspects of biological locomotion". W: *Journal of Statistical Physics* 30.2 (1983), s. 391–400.
- [84] Wojciech Okrański. "On a nonlinear ordinary differential equation". W: *Annales Polonici Mathematici*. T. 3. 49. 1989, s. 237–245.
- [85] Wojciech Okrański. "On nontrivial solutions to some nonlinear ordinary differential equations". W: *Journal of mathematical analysis and applications* 190.2 (1995), s. 578–583.
- [86] Olga Arsen'evna Oleinik, Anatolii Sergeevich Kalashnikov i Czou Juj-lin. "The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration". W: *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 22.5 (1958), s. 667–704.
- [87] A Ott i in. "Anomalous diffusion in "living polymers": A genuine Levy flight?" W: *Physical review letters* 65.17 (1990), s. 2201.
- [88] Necati Ozisik. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press, 1994.
- [89] Yakov Pachepsky, Dennis Timlin i Walter Rawls. "Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils". W: *Journal of Hydrology* 272.1 (2003), s. 3–13.
- [90] Gianni Pagnini. "Erdélyi-Kober fractional diffusion". W: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 15.1 (2012), s. 117–127.
- [91] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. T. 198. Academic press, 1998.
- [92] NMM Ramos, Joao MP Delgado i VP De Freitas. "Anomalous diffusion during water absorption in porous building materials—Experimental evidence". W: *Defect and Diffusion Forum*. T. 273. Trans Tech Publ. 2008, s. 156–161.
- [93] Lewis F Richardson. "Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph". W: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 110.756 (1926), s. 709–737.
- [94] William Rundell, Xiang Xu i Lihua Zuo. "The determination of an unknown boundary condition in a fractional diffusion equation". W: *Applicable Analysis* 92.7 (2013), s. 1511–1526.
- [95] Jocelyn Sabatier, Om Parkash Agrawal i José António Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*. T. 4. 9. Springer, 2007.
- [96] Stefan G Samko, Anatoly A Kilbas, Oleg I Marichev i in. "Fractional integrals and derivatives". W: *Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon* 1993 (1993).
- [97] Bader Al-Saqabi i Virginia S Kiryakova. "Explicit solutions of fractional integral and differential equations involving Erdélyi-Kober operators". W: *Applied Mathematics and Computation* 95.1 (1998), s. 1–13.

[98] Stefan Schaufler, WP Schleich i VP Yakovlev. "Scaling and asymptotic laws in subrecoil laser cooling". W: *EPL (Europhysics Letters)* 39.4 (1997), s. 383.

[99] Harvey Scher i Elliott W Montroll. "Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids". W: *Physical Review B* 12.6 (1975), s. 2455.

[100] Ian Naismith Sneddon. "The use in mathematical physics of Erdelyi-Kober operators and of some of their generalizations". W: *Fractional Calculus and its applications*. Springer, 1975, s. 37–79.

[101] Igor M Sokolov i Joseph Klafter. "From diffusion to anomalous diffusion: a century after Einstein's Brownian motion". W: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 15.2 (2005), s. 026103.

[102] HongGuang Sun i in. "A fractal Richards' equation to capture the non-Boltzmann scaling of water transport in unsaturated media". W: *Advances in water resources* 52 (2013), s. 292–295.

[103] SC Taylor i in. "Anomalous water transport properties of Portland and blended cement-based materials". W: *Journal of materials science letters* 18.23 (1999), s. 1925–1927.

[104] Juan Luis Vázquez. "Nonlinear diffusion with fractional Laplacian operators". W: *Nonlinear partial differential equations*. Springer, 2012, s. 271–298.

[105] Juan Luis Vázquez. *The porous medium equation: mathematical theory*. Oxford University Press, 2007.

[106] Eric R Weeks i Harry L Swinney. "Anomalous diffusion resulting from strongly asymmetric random walks". W: *Physical Review E* 57.5 (1998), s. 4915.

[107] Eric R Weeks, JS Urbach i Harry L Swinney. "Anomalous diffusion in asymmetric random walks with a quasi-geostrophic flow example". W: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 97.1 (1996), s. 291–310.

[108] Qianqian Yang, Fawang Liu i I Turner. "Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives". W: *Applied Mathematical Modelling* 34.1 (2010), s. 200–218.

[109] W Young, A Pumir i Y Pomeau. "Anomalous diffusion of tracer in convection rolls". W: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 1.3 (1989), s. 462–469.

[110] Xuemei Zhang i Meiqiang Feng. "Exact number of solutions of a one-dimensional prescribed mean curvature equation with concave–convex nonlinearities". W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 395.1 (2012), s. 393–402.

[111] Ying Zhang i Xiang Xu. "Inverse source problem for a fractional diffusion equation". W: *Inverse problems* 27.3 (2011), s. 035010.

Lukasz Płociniczak
 Katedra Matematyki Stosowanej
 Wydział Matematyki
 Politechnika Wroclawska
 Wybrzeże Wyspiańskiego 27
 50-370 Wrocław

e-mail: lukasz.plociniczak@pwr.edu.pl
 tel: +48 886 757 443

