AUTOREFERAT

1 Imię i nazwisko

Bartosz Frej

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.

2003: doktor nauk matematycznych, tytuł nadany przez Radę Naukową Instytutu Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska

tytuł rozprawy: Operatory Markowa w ujęciu topologicznym
promotor: Tomasz Downarowicz

1998: magister matematyki, studia na kierunku Matematyka, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

- **1998–2003:** asystent, Instytut Matematyki, WPPT, Politechnika Wrocławska

  1998–1999: pełen etat

  1999–2003: 1/4 etatu z powodu odbywania studiów doktoranckich

- **od 2004:** adiunkt, Instytut Matematyki, WPPT, Politechnika Wrocławska; obecnie Wydział Matematyki, Politechnika Wrocławska

  w latach 2010–2014 – starszy specjalista ds. testowania e-zadań (1/5 etatu) w projekcie ze środków UE „Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych *Matematyka Reaktywacja*" w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki – *Wysoka jakość systemu oświaty* (w tym czasie zatrudnienie na stanowisku adiunkta zredukowane do 4/5 etatu)

4 Omówienie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. 2016r. poz.882 ze zm. w Dz.U. z 2016r. poz.1311.)

Tytuł osiągnięcia: Teoria entropii uogólnionych układów dynamicznych zadawanych przez operatory Markowa

[A1] B. Frej, *Maličky-Riečan's entropy as a version of operator entropy.* Fund. Math. 189 (2) (2006), 185–193.

[A2] B. Frej, P. Frej, *An integral formula for entropy of doubly stochastic operators.* Fund. Math. 213 (3) (2011), 271–289.

[A3] B. Frej, P. Frej, *The Shannon-McMillan theorem for doubly stochastic operators.* Nonlinearity 25 (12) (2012), 3453–3467.

[A4] B. Frej, D. Huczek, *Doubly stochastic operators with zero entropy.* Ann. Funct. Anal. 10 (1) 2019, 144–156.

Moje zainteresowania badawcze mają swoje podstawy w teorii ergodycznej i dynamice topologicznej. Szczególne miejsce zajmuje tu teoria entropii, będącej zarówno miarą złożoności układu, jak i niezmiennikiem izomorfizmu układów dynamicznych. Przedmiotem osiągnięcia jest spójna teoria entropii dla operatorów Markowa, uogólniająca klasyczną entropię układu dynamicznego – jedno z najważniejszych pojęć teorii ergodycznej. W szczególności, wychodząc od podstawowych definicji i własności, które były przedmiotem mojego doktoratu, przenoszę na przypadek operatorowy kluczowe twierdzenia dotyczące entropii układu, m.in. twierdzenie Shannona–McMillana w pracy [A3], a twierdzenie Kusznirenki i twierdzenie Rochlina (o typowości zerowej entropii) w pracy [A4]. Szczególną rolę pełni tu pierwsze z tych twierdzeń. Inspiracją dla podjęcia badań było w jego wypadku zasłyszane stwierdzenie (przypisywane B. Weissowi), że poprawna definicja entropii powinna pociągać za sobą twierdzenie typu Shannona–McMillana–Breimana. Za trzy kluczowe twierdzenia teorii entropii układów dynamicznych uważa się właśnie twierdzenie Shannona–McMillana–Breimana, twierdzenie Ornsteina o izomorfizmie oraz zasadę wariacyjną. Żadne z tych twierdzeń nie przenosi się trywialnie na przypadek operatorowy. Przeniesieniem zasady wariacyjnej zajmowałem się w doktoracie (wykazując jedną z nierówności – druga pozostaje do dziś problemem otwartym). Teoria Ornsteina dotyczy wyłącznie przekształceń odwracalnych, więc dla operatorów traci sens. Ponadto, pojęcie układu Bernoulli'ego wymaga ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, co traktowane operatorowo prowadzi do operatora całkowego, który ma zerową entropię. Pozostaje więc twierdzenie Shannona–McMillana–Breimana. Dla układów klasycznych mówi ono, że przy założeniu ergodyczności układu entropię można oszacować badając trajektorię tylko jednego typowego punktu. Dla odpowiednio zdefiniowanej funkcji informacji uzyskiwanej z ustalonego rozbicia przestrzeni otrzymujemy bowiem zbieżność prawie wszędzie (i w normie L^1) średniej informacji liczonej wzdłuż trajektorii punktu do stałej równej entropii układu względem rozbicia. Dzięki temu twierdzeniu w sytuacjach rzeczywistych, gdy teoretyczny układ dynamiczny modeluje fizyczny eksperyment, możemy mieć nadzieję na oszacowanie złożoności układu na bazie skończonego ciągu obserwacji. Dzięki pracom [A2] i [A3] udało się w pełnej ogólności uzyskać odpowiednik twierdzenia Shannona–McMillana dla operatorów podwójnie stochastycznych (tzn. zbieżność w normie L^1). Oczywiście, wymagało to najpierw odpowiedniego uogólnienia pojęcia funkcji informacji. Uogólnienie nasze ma tą własność, że zastosowane do układów klasycznych (czyli operatorów Koopmana dla transformacji) i rodziny funkcji charakterystycznych rozbicia, pokrywa się z klasyczną funkcją informacji Shannona. Nasza entropia operatorowa spełnia więc „kryterium poprawności Weissa", a tym samym rozwiązuje jeden z kluczowych problemów teorii entropii operatorowej. Pozostałe problemy, które zostały tu rozwiązane, również zostały postawione przez wybitnych specjalistów z dziedziny: problem równości z entropią Maličkiego–Riečana przez W. Słomczyńskiego, problem typowości zerowej entropii przez A. Vershika, a problem przeniesienia twierdzenia Kusznirenki przez V. Bergelsona.

Wspomniane powyżej wyniki przedstawiam szczegółowo w poniższym tekście. Najpierw podam podstawowe wiadomości niezbędne do rozumienia zawartości prac wchodzących w skład głównego osiągnięcia. W czterech kolejnych sekcjach omówię wymienione powyżej prace. W dalszej części opiszę pokrótce pozostałe moje prace i główne aktywności w okresie po uzyskaniu stopnia doktora.

4.1 Informacje wstępne

W przypadku klasycznym układ dynamiczny to czwórka (X, Σ, μ, S), gdzie (X, Σ, μ) to przestrzeń probabilistyczna (zazwyczaj przestrzeń Lebesgue'a), a $S : X \to X$ to przekształcenie zachowujące miarę. Naturalnym uogólnieniem takich układów są operatory Markowa, zwane inaczej operatorami podwójnie stochastycznymi. *Operator podwójnie stochastyczny* T to liniowy operator określony na przestrzeni funkcji całkowalnych $L^1(\mu)$, spełniający następujące warunki

1. $Tf \geqslant 0$ dla $f \geqslant 0$,
2. $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ oznacza funkcję tożsamościowo równą 1,
3. $\int Tf\, d\mu = \int f\, d\mu$ dla każdej $f \in L^1(\mu)$.

Każdy układ dynamiczny (X, Σ, μ, S) zadaje operator podwójnie stochastyczny wzorem $Tf = f \circ S$ (operator Koopmana). Nieco ogólniej, operator podwójnie stochastyczny może być zadany wzorem całkowym

$$Tf(x) = \int f(y) P(x, dy) \tag{1}$$

przez prawdopodobieństwo przejścia, a na przestrzeni standardowej każdy operator podwójnie stochastyczny jest tak zadany. Co więcej, wiadomo, że operator określony na $L^p(\mu)$, gdzie $p > 1$, spełniający powyższe warunki dla funkcji $f \in L^p(\mu)$, przedłuża się jednoznacznie do operatora podwójnie stochastycznego na całej przestrzeni $L^1(\mu)$. Operator taki nazwiemy *ergodycznym*, gdy jedynymi funkcjami niezmienniczymi na jego działanie są funkcje stałe. Używane w kontekście operatorowym pojęcie izomorfizmu zawiera się w następującej definicji:

Definicja 4.1 ([EFHN]) *Operator* $T : L^1(\mu) \to L^1(\nu)$ *jest*

1. markowskim zanurzeniem, *gdy jest homomorfizmem kratowym, tzn. dla każdej funkcji* $f \in L^1(\mu)$ *zachodzi* $|Tf| = T|f|$,
2. markowskim izomorfizmem, *gdy jest surjektywnym markowskim zanurzeniem.*

Markowskie zanurzenia to w istocie operatorowe odpowiedniki homomorfizmów algebr miarowych, a markowskie izomorfizmy – odpowiedniki sprzężeń.

Związek z prawdopodobieństwami przejścia pozwala spojrzeć na dynamikę operatorową jako na dynamikę, w której pojawia się dodatkowa losowość – przyszłe stany układu nie są jednoznacznie zdeterminowane; zamiast tego układ może wybierać następny stan zgodnie z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Można w ten sposób modelować systemy, w których ewolucja podlega pewnym losowym perturbacjom. Jednocześnie stanowi to podstawę do uogólniania pojęć znanych z klasycznych układów dynamicznych. Obszerne monografie ukazujące ten sposób traktowania operatorów Markowa to na przykład [EFHN], [F], [LM]. W tej ostatniej można również znaleźć rozdział dotyczący entropii operatora Markowa, jednak nie jest to entropia będąca analogonem najczęściej używanej w układach dynamicznych entropii Kołmogorowa-Sinaja, opartej na entropii Shannona wektora probabilistycznego (lub rozbicia przestrzeni), lecz entropia Boltzmanna.

Próby przeniesienia entropii Kołmogorowa–Sinaja na przypadek operatorów podwójnie stochastycznych były podejmowane przez różnych autorów. Należy tu wymienić propozycje Ghysa, Langevina i Walczaka z pracy [GLW], rozwijaną później przez Kamińskiego i de Sam Lazaro w pracy [KS], oparte na macierzowej entropii von Neumanna definicje Alickiego, Andriesa, Fannesa, Tuylsa [AAFT] i Makarowa [M], kratową definicję entropii Palma [Pa] i entropię Maličkiego–Riečana [MR]. Jak stwierdzono w pracy [DF], większość tych definicji zachowuje następujący schemat:

(1) określa się T-niezmienniczy zbiór $\mathbb{F}$ złożony z wybranych skończonych rodzin $\mathcal{F}$ funkcji mierzalnych;

(2) definiuje się operację *połączenia* rodzin $\sqcup$ taką, że zbiór $\mathbb{F}$ jest zamknięty na działanie $\sqcup$; będziemy zakładać, że działanie to jest łączne i przemienne oraz, że liczność rodziny $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ zależy jedynie od liczności rodzin $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$;

(3) definiuje się entropię „statyczną" $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F})$ rodziny $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$ względem miary μ;

(4) określa się
$$\mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}^n),$$
gdzie $\mathcal{F}^n = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} T^k \mathcal{F}$, a $T^k \mathcal{F} = \{T^k f : f \in \mathcal{F}\}$;

(5) entropię operatora T definiuje się jako
$$\mathrm{h}_\mu(T) = \sup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}).$$

Przykładowo, można uznać, że w klasycznej definicji Kołmogorowa–Sinaja entropii transformacji zachowującej miarę zbiór $\mathbb{F}$ składa się z rodzin funkcji charakterystycznych odpowiadających skończonym rozbiciom przestrzeni na zbiory mierzalne, a połączenie rodzin jest realizowane przez mnożenie przez siebie elementów rodzin (równoważnie, przez operację minimum). W definicji [GLW] przyjmuje się za $\mathbb{F}$ zbiór mierzalnych rozkładów jedności, tzn. rodzin $\mathcal{F} = \{f_i : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ składających się z mierzalnych funkcji nieujemnych, spełniających warunek $\sum_i f_i = 1$. Definicja [AAFT] dotyczy rodzin spełniających $\sum_i f_i^2 = 1$. W obu przypadkach połączenie określa się jako zbiór iloczynów funkcji.

W pracy [DF], która stanowiła podstawę mojego doktoratu, udowodniono, że ten schemat wzbogacony o pewne naturalne wymagania dotyczące funkcji entropii, gwarantuje równość wielkości $\mathrm{h}_\mu(T)$, niezależnie od przyjętej definicji $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F})$. Cykl prac, przedstawiony jako osiągnięcie, stanowi naturalną kontynuację badań z pracy [DF]. Poniżej podaję aksjomaty entropii w brzmieniu zgodnym z [D3] – są one nieco słabsze niż proponowane w [DF] (tzn. dopuszczają większą klasę definicji). Przyjmujemy przy tym, że entropia warunkowa jest określona wzorem
$$\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{G}) = \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}) - \mathrm{H}_\mu(\mathcal{G}).$$

(A) AKSJOMAT MONOTONICZNOŚCI

Dla $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ należących do $\mathbb{F}$ zachodzą nierówności
$$\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{H}) \leqslant \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}|\mathcal{H}) \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{G} \sqcup \mathcal{H}) \leqslant \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{G}),$$
przy czym przyjmujemy konwencję, że $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{H}) = \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F})$, gdy $\mathcal{H}$ jest rodziną pustą.

Z aksjomatu tego wynikają w szczególności nierówności
$$\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}|\mathcal{H}) \leqslant \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{H}) + \mathrm{H}_\mu(\mathcal{G}|\mathcal{H})$$

oraz

$$\mathrm{H}_\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k\,\middle|\,\bigsqcup_{k=1}^{n}\mathcal{G}_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}_k|\mathcal{G}_k)\,.$$

Ponadto, dla każdego $n\geqslant 1$,

$$\mathrm{h}_\mu(T,T^n\mathcal{F})=\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F})\,.$$

Definiujemy L^1-odległość dwóch rodzin $\mathcal{F}=\{f_i:\ 1\leqslant i\leqslant r\}$ i $\mathcal{G}=\{g_i:\ 1\leqslant i\leqslant r'\}$, $r'\leqslant r$ wzorem

$$\mathrm{dist}(\mathcal{F},\mathcal{G})=\min_\pi\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant r}\int|f_i-g_{\pi(i)}|\,d\mu\right\},$$

gdzie π przebiega zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1,2,\dots r\}$, a $\mathcal{G}$ traktujemy jako rodzinę r-elementową przyjmując $g_i\equiv 0$ dla $r'<i\leqslant r$.

(B) AKSJOMAT CIĄGŁOŚCI

Dla dowolnych $r\in\mathbb{N}$ i $\varepsilon>0$ istnieje $\delta_\varepsilon>0$ taka, że jeśli liczności $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ nie przekraczają r oraz $\mathrm{dist}(\mathcal{F},\mathcal{G})<\delta_\varepsilon$, to

$$|\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{H})-\mathrm{H}_\mu(\mathcal{G}|\mathcal{H})|<\varepsilon\qquad\text{oraz}\qquad|\mathrm{H}_\mu(\mathcal{H}|\mathcal{F})-\mathrm{H}_\mu(\mathcal{H}|\mathcal{G})|<\varepsilon.$$

Dla rozbicia skończonego $\mathcal{A}$ przestrzeni X oznaczmy przez $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ rodzinę $\{\mathbb{1}_A:\ A\in\mathcal{A}\}$ funkcji charakterystycznych elementów $\mathcal{A}$.

(C) AKSJOMAT O ROZBICIACH

Dla każdego rozbicia $\mathcal{A}$ rodzina $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ jest elementem $\mathbb{F}$, a entropia H_μ dla takich rodzin jest określona jako entropia Shannona rozbicia $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{H}_\mu(\mathbb{1}_\mathcal{A})=-\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)\log\mu(A).$$

Ponadto, dla rodziny rozbić $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ spełniony jest warunek

$$\mathrm{H}_\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_k}\right)=\mathrm{H}_\mu\left(\bigvee_{k=1}^{n}\mathcal{A}_k\right)$$

(D) AKSJOMAT O OSZACOWANIU

Dla dowolnych $r\in\mathbb{N}$ i $\varepsilon>0$ istnieje $\gamma>0$ taka, że dla każdej rodziny $\mathcal{F}=\{f_i:\ 1\leqslant i\leqslant r\}$ i każdego rozbicia α odcinka $[0,1]$ na skończoną liczbę przedziałów o długości nie przekraczającej γ zachodzi

$$\mathrm{H}_\mu\left(\mathcal{F}|\mathbb{1}_{\bigvee_i f_i^{-1}(\alpha)}\sqcup\overline{\alpha}\right)<\varepsilon,$$

gdzie $\overline{\alpha}$ jest rodziną funkcji zależną tylko od α i spełniającą warunek

$$\lim_n\frac{1}{n}\mathrm{H}_\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}\overline{\alpha}\right)=0$$

(zazwyczaj $\overline{\alpha}$ jest rodziną pustą lub składa się z funkcji stałych).

Twierdzenie 4.2 ([DF]) *Jeśli T jest operatorem podwójnie stochastycznym, to aksjomaty (A)–(D) (razem z krokami konstrukcyjnymi (1)–(5)) jednoznacznie określają wartość entropii $\mathrm{h}_\mu(T)$.*

Aby udowodnić to twierdzenie, w pracy rozwija się teorię asymptotycznej stabilności kratowej operatorów Markowa. Jej punktem wyjścia jest następujący lemat:

Lemat 4.3 ([DF]) *Niech f i g będą funkcjami ograniczonymi. Dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ i $l \geqslant N$ zachodzą nierówności*

$$\int |T^k(T^l f \vee T^l g) - (T^{k+l} f \vee T^{k+l} g)|\, d\mu < \delta$$

i

$$\int |T^k(T^l f \wedge T^l g) - (T^{k+l} f \wedge T^{k+l} g)|\, d\mu < \delta.$$

Wynikają z niego wygodne własności operatorów dotyczące działań ich dalekich iterat na pewnych funkcjach charakterystycznych lub na wielomianach kratowych o ustalonym zbiorze zmiennych.

Poniżej omówię kolejno wyniki prac [A1]–[A4].

4.2 Praca [A1]

Definicja entropii Maličkiego–Riečana z pracy [MR] nie realizuje opisanego powyżej schematu, a jej badaniu poświęcona jest pierwsza z prac cyklu. Motywacją tych studiów było przekonanie, że dowód równości entropii Maličkiego–Riečana i entropii zadanej aksjomatycznie, stanowiłby cenny argument popierający celowość badania entropii operatorowej.

Definicja [MR] jest oparta na pojęciu rozkładu jedności, tzn. skończonej rodziny nieujemnych funkcji mierzalnych sumujących się do jedynki. Przykładowo, jeśli $\mathcal{A}$ jest skończonym rozbiciem przestrzeni X na zbiory mierzalne, to zbiór funkcji charakterystycznych $\mathbb{1}_{\mathcal{A}} = \{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{A}\}$ tworzy rozkład jedności. Zamiast używać operacji połączenia takich rodzin funkcyjnych, Maličky i Riečan wprowadzają relację porządku na zbiorze rozkładów jedności w następujący sposób:

$$\Psi \succeq \Phi, \text{ gdy } \Psi = \textstyle\bigcup_{\varphi \in \Phi} \Psi_\varphi, \text{ gdzie } \Psi_\varphi \text{ są parami rozłączne i } \sum_{\psi \in \Psi_\varphi} \psi = \varphi$$

(aby zapewnić antysymetryczność relacji odrzuca się rozkłady jedności zawierające funkcje tożsamościowo równe zero). Rozróżniamy tu elementy będące jednakowymi funkcjami, tzn. rozkład jedności jest raczej ciągiem skończonym funkcji (ewentualnie multizbiorem) niż zbiorem, przykładowo $\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\}$ zawiera n jednakowych elementów.

Entropia rozkładu jedności jest w [MR] określona wzorem

$$\mathrm{H}^{MR}(\Phi) = -\sum_{\varphi \in \Phi} \int \varphi\, d\mu \cdot \log \int \varphi\, d\mu.$$

Dla n rozkładów $\Phi_1, ..., \Phi_n$ definiuje się

$$\mathrm{H}^{MR}(\Phi_1, ..., \Phi_n) = \inf\{\mathrm{H}^{MR}(\Gamma) : \Gamma \succeq \Phi_1, \Gamma \succeq \Phi_2, ..., \Gamma \succeq \Phi_n\}.$$

Po oznaczeniu $\mathrm{H}^{MR}(\Phi, T\Phi, ..., T^{n-1}\Phi)$ przez $\mathrm{H}^{MR}(\Phi, n)$ otrzymuje się ciąg addytywny i można zdefiniować

$$\mathrm{h}^{MR}(T, \Phi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathrm{H}^{MR}(\Phi, n)\,.$$

Ostatecznie, dla dowolnego zbioru $\mathcal{R}$ rozkładów jedności definiuje się

$$\mathrm{h}^{\mathrm{MR}}_{\mathcal{R}}(T) = \sup_{\Phi\in\mathcal{R}} \mathrm{h}^{MR}(T,\Phi)\,.$$

Głównym wynikiem pierwszej z prac cyklu jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 4.4 ([A1, Theorem 3.7])

$$\mathrm{h}^{\mathrm{MR}}_{\mathcal{R}}(T) = \mathrm{h}_\mu(T)\,,$$

gdzie $\mathcal{R}$ jest zbiorem wszystkich rozkładów jedności na X, a $\mathrm{h}_\mu(T)$ oznacza entropię operatorową zgodną z powyższymi aksjomatami.

Dla dowodu tego twierdzenia wystarczy porównywać entropię $\mathrm{h}^{\mathrm{MR}}_{\mathcal{R}}(T)$ z dowolną jawną wersją entropii operatorowej. W pracy porównuje się ją z entropią zdefiniowaną w [DF] w sposób opisany poniżej.

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w ogólnym schemacie konstrukcji entropii, definicja ta przyjjmuje jako $\mathbb{F}$ zbiór wszystkich funkcji mierzalnych o wartościach w $[0,1]$, a jako połączenia skończonych rodzin używa sumy mnogościowej takich rodzin (czy raczej konkatenacji, gdy rodzinę interpretować jako ciąg skończony). Dla funkcji $f\colon X\to[0,1]$ zdefiniujmy

$$A_f = \{(x,t)\in X\times[0,1] : t\leqslant f(x)\},$$

a przez $\mathcal{A}_f$ oznaczmy rozbicie produktu $X\times[0,1]$ składające się z A_f i jego dopełnienia. Dla rodziny $\mathcal{F}$ funkcji mierzalnych niech $\mathcal{A}_\mathcal{F} = \bigvee_{f\in\mathcal{F}}\mathcal{A}_f$. Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{A}_{\mathcal{F}\sqcup\mathcal{G}} = \mathcal{A}_\mathcal{F}\vee\mathcal{A}_\mathcal{G}$. Niech λ oznacza miarę Lebesgue'a na odcinku jednostkowym. Definiujemy

$$\mathrm{H}^{DF}(\mathcal{F}) = \mathrm{H}_{\mu\times\lambda}(\mathcal{A}_\mathcal{F}) = -\sum_{A\in\mathcal{A}_\mathcal{F}}(\mu\times\lambda)(A)\cdot\log(\mu\times\lambda)(A), \qquad (2)$$

$$\mathrm{h}^{DF}(T,\mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{H}^{DF}(\mathcal{F}^n)\,,$$

$$\mathrm{h}^{DF}(T) = \sup_{\mathcal{F}}\mathrm{h}^{DF}(T,\mathcal{F})\,,$$

gdzie kres górny brany jest po zbiorze wszystkich skończonych rodzin funkcji mierzalnych z X w odcinek $[0,1]$. Mimo że ciąg $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}^n)$ nie jest podaddytywny, granica definiująca $\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F})$ istnieje, lecz dowód tego faktu jest dość żmudny.

Obie definicje bazują na nieco innych narzędziach – entropia Maličkiego–Riečana na rozkładach jedności, a entropia z pracy [DF] na rozbiciach produktu generowanych przez rodziny funkcji. Dlatego pierwszym krokiem dowodu jest opis operacji zamieniających jedne z tych obiektów na drugie. Operacje te zależą od kolejności ponumerowania elementów rodziny funkcji czy rozkładu jedności. Dla rozkładu jedności Φ rodzina $\Sigma(\Phi)$ to rodzina jego sum częściowych, tzn. jeśli $\Phi=\{\varphi_1,\dots,\varphi_r\}$, to $\Sigma(\Phi)=\{\sum_{i=1}^{j}\varphi_i : j=1,\dots,r\}$. Na odwrót, mając rodzinę funkcji $f_1\leqslant f_2\leqslant\dots\leqslant f_r=1$, zwaną *rodziną rosnącą*, uzyskujemy rozkład jedności biorąc różnice $f_{i+1}-f_i$ kolejnych funkcji. Ponadto, każdą rodzinę funkcji $\mathcal{F}$ można sprowadzić do rodziny rosnącej $\Theta(\mathcal{F})$ poprzez wielokrotne stosowanie operacji kratowych, tak że zachodzi równość

$$\mathcal{A}_\mathcal{F} = \mathcal{A}_{\Theta(\mathcal{F})}.$$

Rozkład jedności uzyskany z rodziny $\mathcal{F}$ przez utworzenie rodziny rosnącej $\Theta(\mathcal{F})$, a następnie wzięcie różnic kolejnych elementów będę oznaczać przez $\mathcal{PU}(\mathcal{F})$. Niestety, na ogół

$\Theta(T\mathcal{F}) \neq T(\Theta(\mathcal{F}))$, a co za tym idzie $\mathcal{PU}(T\mathcal{F}) \neq T(\mathcal{PU}(\mathcal{F}))$. Zachodzą natomiast prawidłowości

$$T\Sigma(\Phi) = \Sigma(T\Phi), \qquad \Sigma(\mathcal{PU}(\mathcal{F})) = \Theta(\mathcal{F}), \qquad \mathcal{PU}(\Sigma(\Phi)) = \Phi,$$
$$\mathrm{H}^{MR}(\mathcal{PU}(\mathcal{F})) = \mathrm{H}^{DF}(\Theta(\mathcal{F})) = \mathrm{H}^{DF}(\mathcal{F})$$

Ponadto, jeśli $\mathcal{F} = \{f_0, ..., f_r\}, \mathcal{G} = \{g_0, ..., g_s\}$, gdzie $f_0 = 0 \leqslant f_1 \leqslant ... \leqslant f_r = 1$ i $g_0 = 0 \leqslant g_1 \leqslant ... \leqslant g_s = 1$, to $\mathcal{A}_\mathcal{G} \succcurlyeq \mathcal{A}_\mathcal{F}$ implikuje $\mathcal{PU}(\mathcal{G}) \succeq \mathcal{PU}(\mathcal{F})$.

Dla dowolnego rozkładu jedności Φ oznaczmy przez Φ_Σ^n rodzinę $\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(\Sigma(\Phi))$. Powyższe obserwacje pozwalają stwierdzić, że dla dowolnego rozkładu jedności zachodzi $\mathcal{A}_{\Theta(\Phi_\Sigma^n)} \succcurlyeq \mathcal{A}_{T^k(\Sigma(\Phi))}$, a stąd $\mathcal{PU}(\Phi_\Sigma^n) \succeq T^k\Phi$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $k < n$. To z kolei daje nierówność

$$\mathrm{H}^{MR}(\Phi, n) \leqslant \mathrm{H}^{MR}(\mathcal{PU}(\Phi_\Sigma^n)) = \mathrm{H}^{DF}(\Phi_\Sigma^n),$$

co implikuje, że $\mathrm{h}^{MR}(T) \leqslant \mathrm{h}^{DF}(T)$.

Dowód odwrotnej nierówności jest bardziej wymagający. Celem jest odpowiednie oszacowanie wielkości $\mathrm{h}^{DF}(T, \mathcal{F})$ dla dowolnej rodziny skończonej $\mathcal{F}$. Wiadomo, że dla dowolnej liczby naturalnej l zachodzi $\mathrm{h}^{DF}(T, \mathcal{F}) = \mathrm{h}^{DF}\left(T, T^l\mathcal{F}\right)$. Dzięki wykorzystaniu teorii asymptotycznej stabilności kratowej operatorów podwójnie stochastycznych, zastępuje się rodzinę $\mathcal{F}$ przez jej obraz $T^l\mathcal{F}$, tak by przy ustalonych liczbach $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ zachodziło oszacowanie

$$\mathrm{H}^{DF}\left(T^k\mathcal{F} \,\middle|\, \mathbb{1}_{\bigvee_{f\in T^k\mathcal{F}} f^{-1}(\alpha)} \cup \overline{\alpha}\right) < \epsilon,$$

gdzie $\overline{\alpha}$ jest rodziną funkcji stałych (jak wspomniano w aksjomacie o oszacowaniu), oraz by

$$\mathrm{dist}\left(\mathbb{1}_{\bigvee_{f\in T^k\mathcal{F}} f^{-1}(\alpha)},\ T^k(\mathbb{1}_{\bigvee_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}(\alpha)})\right) < \delta.$$

Jednocześnie, można dobrać liczbę $\delta = \delta(\varepsilon)$ tak, by warunek $\mathrm{dist}(\Phi_i, \Psi_i) < \delta$ dla $i = 1, ..., n$ (przy ustalonych licznościach rozkładów jedności Φ_i i Ψ_i) gwarantował

$$|\mathrm{H}^{MR}(\Phi_1, ..., \Phi_n) - \mathrm{H}^{MR}(\Psi_1, ..., \Psi_n)| < (n+1)\epsilon$$

(patrz lematy 3.3, 3.4 i 3.5 w omawianej pracy). Dzięki temu dostajemy oszacowanie

$$\mathrm{H}^{DF}(\mathcal{F}^n) \leqslant \mathrm{H}^{MR}\left(\mathbb{1}_{\bigvee_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}(\alpha)}, n\right) + \mathrm{H}^{DF}(\overline{\alpha}) + (2n+1)\epsilon.$$

Ostatecznie otrzymuje się $\mathrm{h}^{DF}(T, \mathcal{F}) \leqslant \mathrm{h}^{MR}\left(T, \mathbb{1}_{\bigvee_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}(\alpha)}\right) + 2\epsilon$, co w praktyce kończy dowód.

Omawiana praca zawiera również nieco prostszy dowód równości entropii $\mathrm{h}_{\mathfrak{R}}^{\mathrm{MR}}(T)$ i entropii Kołmogorowa–Sinaja transformacji S, w przypadku, gdy T jest operatorem Koopmana dla S (w pracy [MR] nie wykazywano tej równości). Ponieważ omówiony wynik jest ogólniejszy, nie będę komentował dowodu tego twierdzenia.

Wyniki tej pracy były referowane, między innymi, na konferencji z cyklu Czech–Slovak Workshop on Discrete Dynamical Systems w obecności jednego z autorów pracy [MR] (Petra Maličkiego). Drugi z autorów poprosił o przesłanie kopii mojej pracy.

4.3 Praca [A2]

W klasycznej teorii ergodycznej pojęcie entropii ma następującą znaną interpretację. Przestrzeń X rozumie się jako przestrzeń stanów pewnego układu fizycznego, a r-elementowe rozbicie tej przestrzeni modeluje przeprowadzany na tym układzie eksperyment o r możliwych wynikach. Zakłada się, że aparatura służąca do mierzenia wyników jest niezawodna w tym sensie, że w danym stanie układu będzie zawsze zwracać jednakowy wynik. Operatory podwójnie stochastyczne to narzędzie, którego można użyć, gdy pomiar eksperymentu podlega zaburzeniom. Z każdym stanem można związać rozkład prawdopodobieństwa, według którego zwracane są konkretne wyniki eksperymentu. Otrzymujemy w ten sposób funkcję wektorową przypisującą każdemu punktowi $x \in X$ wektor probabilistyczny lub, inaczej, r elementowy rozkład jedności na X, a po wzięciu sum częściowych tego rozkładu – rodzinę rosnącą. (Ze względu na elegancję zapisu i wygodę stosowania, jeśli to możliwe definicję entropii formułujemy jednak dla dowolnych rodzin funkcji o wartościach w $[0,1]$, a nie tylko dla rodzin rosnących.) Przyjmuje się, że działanie operatora modeluje albo upływ czasu (jak w przypadku klasycznym), albo zmianę ustawień urządzenia przed kolejnym powtórzeniem eksperymentu. Entropię rodziny funkcji $\mathcal{F}$ rozumiemy jako ilość informacji uzyskiwaną z przeprowadzenia eksperymentu. Zgodnie z tą interpretacją spodziewamy się następujących własności:

(i) rodzina funkcji stałych powinna mieć entropię zero, bowiem w takim przypadku eksperyment modelowany przez tę rodzinę zwraca wyniki zgodnie z taką samą regułą w każdym punkcie przestrzeni stanów – nie daje więc żadnych informacji o bieżącym stanie układu,

(ii) dla dowolnej rodzin $\mathcal{F}$ zachodzi $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}|\mathcal{F}) = 0$, bo skopiowanie wyników już przeprowadzonego eksperymentu nie dostarcza nowych informacji.

Celem pracy [A2] było przedstawienie takiej formuły entropii „statycznej" $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F})$, która spełniałaby powyższe postulaty. Ich prawdziwość nie jest zapewniana przez aksjomaty entropii. Co więcej, wymienione wcześniej jawne definicje entropii nie spełniają co najmniej jednego z warunków: definicje oparte na rozkładach jedności, w których operacja połączenia jest realizowana przez mnożenie, znacząco zwiększają liczność połączenia $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{F}$, co skutkuje zwiększeniem entropii $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F} \sqcup \mathcal{F})$, a co za tym idzie entropii warunkowej; definicje z prac [DF] i [MR] przypisują dodatnie wartości entropii rodzinom funkcji stałych.

Przyjmujemy jako zbiór $\mathbb{F}$ ze schematu definicji entropii rodzinę wszystkich skończonych ciągów funkcji mierzalnych $X \to [0,1]$. Połączenie rodzin $\sqcup$ realizujemy przez operację konkatenacji ciągów. Przyjmujemy, że $\mathbb{F}$ zawiera też ciąg pusty $\mathcal{O}$, przy czym $\mathcal{A}_\mathcal{O} = \{X\}$. Rozbicia $\mathcal{A}_f$ i $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ produktu $X \times [0,1]$ są zdefiniowane tak, jak w poprzedniej sekcji. Przez A^t oznaczamy cięcie zbioru $A \subset X \times [0,1]$ w t, tzn. $A^t = \{x \in X : (x,t) \in A\}$, a przez $\mathcal{A}^t_\mathcal{F}$ rozbicia X składające się z odpowiednich cięć A^t, gdzie $A \in \mathcal{A}_\mathcal{F}$. Zachodzą oczywiste prawa $\mathcal{A}_{\mathcal{F}\sqcup\mathcal{G}} = \mathcal{A}_\mathcal{F} \vee \mathcal{A}_\mathcal{G}$ i $(\mathcal{A}_{\mathcal{F}\sqcup\mathcal{G}})^t = (\mathcal{A}_\mathcal{F} \vee \mathcal{A}_\mathcal{G})^t = \mathcal{A}^t_\mathcal{F} \vee \mathcal{A}^t_\mathcal{G}$.

Definicja 4.5 *Entropię rodziny $\mathcal{F}$ definiujemy wzorem*

$$\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}) = \int_0^1 H_\mu(\mathcal{A}^t_\mathcal{F})\, d\lambda(t),$$

gdzie $\mathrm{H}_\mu(\alpha)$ jest entropią Shannona rozbicia α przestrzeni X.

Ideą, która przyświecała tej definicji było potraktowanie produktu $X \times [0,1]$ jako zbioru kopii przestrzeni X i badanie na tych kopiach rozbić, których ewolucją kieruje dynamika indukowana przez zadany operator T.

Jest jasne, że ta definicja spełnia postawione powyżej postulaty. W pracy sprawdza się w serii lematów, że wypełnia ona wymagania aksjomatów entropii. Znaczną część pracy zajmuje weryfikacja istnienia granicy we wzorze

$$\mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}^n)\,.$$

Tak jak w jawnej definicji z pracy [DF], a w odróżnieniu od definicji klasycznej entropii istnienie granicy nie jest automatyczne, bo ciąg $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}^n)$ nie jest podaddytywny; w istocie, brak jest niezmienniczości entropi H_μ na działanie T, tzn. na ogół entropia $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F})$ nie jest równa $\mathrm{H}_\mu(T\mathcal{F})$. W dowodzie istnienia granicy wykorzystuje się twierdzenie Iwanika o całkowej reprezentacji operatorów stochastycznych:

Twierdzenie 4.6 ([I]) *Operator zadany na przestrzeni ograniczonych funkcji mierzalnych na standardowej przestrzeni borelowskiej przez prawdopodobieństwo przejścia wzorem* (1) *ma reprezentację w postaci*

$$Tf(x) = \int_{[0,1]} f(\varphi_\omega(x))d\lambda(\omega),$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$, a $(\omega, x) \mapsto \varphi_\omega(x)$ jest przekształceniem mierzalnym $[0,1]\times X \to X$.

Przekształcenie z powyższego twierdzenia pozwala określić transformację mierzalną $\phi : [0,1]\times X \to [0,1]\times X$ wzorem $\phi(\omega,x) = (\omega, \varphi_\omega(x))$. Niestety, to przekształcenie nie zachowuje miary produktowej $\lambda\times\mu$. Jako że iteraty T^k też są generowane przez prawdopodobieństwa przejścia, możemy podobnie uzyskać dla T^k odpowiadające im przekształcenia ϕ_k. Oznaczamy przez Φ_k operator punktowo generowany przez ϕ_k (tzn. $\Phi_k f = f\circ\phi_k$). Dla funkcji $f : X \to [0,1]$ niech $\bar{f} : X\times[0,1] \to [0,1]$ będzie dana wzorem $\bar{f}(\omega,x) = f(x)$ i niech $\overline{\mathcal{F}}$ oznacza rodzinę $\{\bar{f} : f \in \mathcal{F}\}$. Kluczową rolę w dowodzie istnienia granicy pełni następujący lemat.

Lemat 4.7 ([A2, Lemma 3.2]) *Dla dowolnej rosnącej rodziny funkcji $\mathcal{G}$ zachodzi równość*

$$\mathrm{H}_{\mu\times\lambda}\left(\Phi_k\bar{\mathcal{G}}\right) = \mathrm{H}_\mu(\mathcal{G})\,.$$

Ponieważ każdą rodzinę funkcji można przekształcić do rodziny rosnącej przy pomocy operacji Θ wspomnianej w opisie poprzedniej pracy, a ponadto dla każdej $\delta > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ gdzie $l \geqslant N$ zachodzi $\left\|\overline{T^{k+l}f} - \Phi_k\overline{T^l f}\right\|_1$, uzyskujemy asymptotyczną niezmienniczość entropii statycznej:

Lemat 4.8 ([A2, Lemma 3.3]) *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że dla dowolnych k, $m \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$|\mathrm{H}_\mu\left(T^{k+N}\mathcal{F}^m\right) - \mathrm{H}_\mu\left(T^N\mathcal{F}^m\right)| < m\varepsilon.$$

Ostatecznie pozwala nam to uzasadnić asymptotyczną podaddytywność:

Lemat 4.9 ([A2, Lemma 3.4]) *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $N \in \mathbb{N}$ i $c > 0$, takie że dla $k \in \mathbb{N}$ i $m \geqslant N$ zachodzi*

$$\mathrm{H}_\mu\left(\mathcal{F}^{k+m}\right) \leqslant \mathrm{H}_\mu\left(\mathcal{F}^k\right) + \mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}^m) + c + m\varepsilon.$$

Teraz istnienie granicy w kroku czwartym definicji entropii uzasadnia się podobnie jak w klasycznym przypadku, przy pełnej podaddytywności entropii ([A2, Theorem 3.5]).

Nowa definicja entropii pozwoliła udowodnić wzór na entropię produktu – klasyczne twierdzenie, którego prawdziwość w przypadku operatorowym nie była dotąd znana. Jeśli T jest operatorem podwójnie stochastycznym na $L^1(X,\mu)$, a S takim operatorem na $L^1(Y,\nu)$, to produkt $T \times S$ tych operatorów definiuje się przyjmując dla funkcji postaci $f(x) \cdot g(y)$, gdzie $f \in L^1(X,\mu)$, $g \in L^1(Y,\nu)$, równość

$$(T \times S)(fg)(x,y) = Tf(x) \cdot Sg(y),$$

a następnie przedłużając liniowo na zbiór kombinacji liniowych takich funkcji. Ten zbiór jest gęsty w $L^1(\mu \times \nu)$, więc operator przedłuża się jednoznacznie do operatora ciągłego (i podwójnie stochastycznego) na całym $L^1(\mu \times \nu)$. Alternatywnie, jeśli operatory T i S są zadane wzorem (1) odpowiednio przez prawdopodobieństwa przejścia P_T i P_S, to produkt $T \times S$ jest zadany tym samym wzorem przez produkt tych prawdopodobieństw.

Twierdzenie 4.10 ([A2, Theorem 4.5])

$$\mathrm{h}_{\mu\times\nu}(T \times S) = \mathrm{h}_\mu(T) + \mathrm{h}_\nu(S)$$

Dowód zawiera pewną ilość nieprzyjemnych „technikaliów", opartych na aksjomacie o oszacowaniu (aksjomat (D)) oraz lematach o asymptotycznej stabilności kratowej operatorów podwójnie stochastycznych z pracy [DF]. Centralną ideą jest jednak wykorzystanie prostej obserwacji, że dla rozbić α przestrzeni X i β przestrzeni Y zachodzi równość

$$\mathrm{H}_\mu(\mathbb{1}_{\alpha\times Y} \sqcup \mathbb{1}_{X\times\beta}) = \mathrm{H}_\mu(\mathbb{1}_{\alpha\times\beta}) = \mathrm{H}_\mu(\mathbb{1}_\alpha) + \mathrm{H}_\mu(\mathbb{1}_\beta)\,,$$

gdzie rozbicia $\alpha \times Y$, $X \times \beta$ produktu $X \times Y$ są zdefiniowane jako

$$\alpha \times Y = \{A \times Y : A \in \alpha\}, \qquad X \times \beta = \{X \times B : B \in \beta\}.$$

Bez wnikania w szczegóły techniczne, szkic dowodu prezentuje się następująco. Aby uzyskać oszacowanie entropii produktu z góry przez sumę entropii operatorów, ustala się dowolną rodzinę $\mathcal{E}$ funkcji mierzalnych $X \times Y \to [0,1]$ i przybliża ją rodziną funkcji postaci $\sum f_i g_i$, gdzie f_i są funkcjami na X, a g_i funkcjami na Y. Następnie dobiera się $L \in \mathbb{N}$ i rozbicia α_n przestrzeni X i β_n przestrzeni Y ($n \in \mathbb{N}$) tak, by

1. funkcje postaci $T^L f_i$ były dobrze przybliżane przez funkcje proste będące kombinacjami funkcji charakterystycznych elementów rozbicia α_L, a funkcje $S^L g_i$ przez funkcje będące kombinacjami funkcji charakterystycznych elementów rozbicia β_L,

2. dla $n \in \mathbb{N}$ odległości $\mathrm{dist}(T^n \mathbb{1}_{\alpha_L}, \mathbb{1}_{\alpha_{L+n}})$ i $\mathrm{dist}(S^n \mathbb{1}_{\beta_L}, \mathbb{1}_{\beta_{L+n}})$ były małe.

Oblicza się, że wtedy funkcje postaci $(T \times S)^{L+n}(\sum_i f_i g_i)$ są dobrze przybliżane przez funkcje proste będące kombinacjami indykatorów rozbicia $\alpha_{L+n} \times \beta_{L+n}$. Dzięki temu otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{\mu\times\nu}\Big(\mathcal{E}^{L+N}\Big) &\leqslant \mathrm{H}_{\mu\times\nu}\Big(\mathbb{1}_{\bigvee_{n<N}\alpha_{L+n}\times\bigvee_{n<N}\beta_{L+n}}\Big) + \varepsilon O(N) \\
&= \mathrm{H}_\mu\Big(\mathbb{1}_{\bigvee_{n<N}\alpha_{L+n}}\Big) + \mathrm{H}_\nu\Big(\mathbb{1}_{\bigvee_{n<N}\beta_{L+n}}\Big) + \varepsilon O(N) \\
&\leqslant \mathrm{H}_\mu\Big((\mathbb{1}_{\alpha_L})^N\Big) + \mathrm{H}_\nu\Big((\mathbb{1}_{\beta_L})^N\Big) + \varepsilon O(N),
\end{aligned}$$

co daje

$$h_{\mu\times\nu}(T\times S,\mathcal{E})\leqslant h_\mu(T,\mathbb{1}_{\alpha_L})+h_\nu(S,\mathbb{1}_{\beta_L})+\varepsilon\leqslant h_\mu(T)+h_\nu(S)+\varepsilon.$$

Podobnie na odwrót, startując z rodzin funkcji $\mathcal{F}$ na X i $\mathcal{G}$ na Y, dobiera się rozbicia tych przestrzeni o podobnych własnościach jak w części pierwszej i szacuje entropie rodzin $\mathcal{F}^n$ i $\mathcal{G}^n$ (dla dużych n) przez entropie rodzin indykatorów tych rozbić, co pozwala łatwo przejść do entropii rodziny indykatorów odpowiedniego rozbicia produktu.

Rezultat ten został później udowodniony inną techniką przez T. Austina w pracy [Au]. Wykorzystano tam równość entropii operatorowej z entropią tak zwanego *backward tail boundary*, pewnego układu dynamicznego generowanego przez operator.

Praca nasza zawiera też wynik dotyczący ciągłości nowej definicji entropii jako funkcji miary:

Twierdzenie 4.11 ([A2, Theorem 5.1]) *Jeśli X jest zwartą przestrzenią metryczną, a $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji ciągłych, to odwzorowanie przypisujące mierze probabilistycznej μ entropię $H_\mu(\mathcal{F})$ jest ciągłe, gdy w przestrzeni wszystkich miar probabilistycznych na X przyjmiemy *-słabą topologię.*

4.4 Praca [A3]

Praca ta jest naturalną kontynuacją pracy poprzedniej oraz pracy [Fr], jako że wykorzystuje tę samą jawną definicję entropii operatorowej. Badanie tego pojęcia jest tu jednak bardziej szczegółowe, gdyż wprowadza się dodatkową definicję *entropii na poziomie t*. Dla większej przejrzystości zapisu, oznaczmy $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_{T^i\mathcal{F}}$.

Definicja 4.12 ([A3, Definition 1.1])

1. Entropią rodziny $\mathcal{F}$ na poziomie $t\in[0,1]$ *nazywamy liczbę*

$$H_\mu(\mathcal{F},t)=H_\mu\left(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^t\right).$$

2. Entropią operatora T względem rodziny funkcji $\mathcal{F}$ na poziomie $t\in[0,1]$ *nazywamy liczbę*

$$h_\mu(T,\mathcal{F},t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}_i^t\right).$$

Istnienie granicy z punktu drugiego zostało udowodnione w pracy [Fr].

W klasycznej teorii układów dynamicznych, mając ustalone przekształcenie S zachowujące miarę μ i rozbicie $\alpha=\{A_1,...,A_r\}$ przestrzeni X, możemy każdemu punktowi $x\in X$ przypisać jego α-nazwę, czyli ciąg $(i_n)_{n=0}^\infty$ taki, że $S^nx\in A_{i_n}$. Znajomość n pierwszych wyrazów tego ciągu jest tożsama z wiedzą, do którego elementu rozbicia $\bigvee_{i=0}^{n-1}S^{-i}\alpha$ należy x. Zgodnie z twierdzeniem Shannona–McMillana–Breimana pozwala to zlokalizować prawie każdy punkt w przestrzeni z dokładnością do zbioru o mierze bliskiej $e^{-nh_\mu(S)}$. W przypadku dynamiki zadanej przez operator T indukowany przez prawdopodobieństwo przejścia rozważanie ewolucji rozbić nie jest możliwe, jednak rodzina obrazów funkcji charakterystycznych $\{T^n\mathbb{1}_A : A\in\alpha\}$ jest dla każdego n rozkładem jedności. Wartości funkcji $T^n\mathbb{1}_A(x)$ mogą być interpretowane jako prawdopodobieństwo, że w chwili n trajektoria, której punktem startowym był x, należy do zbioru A. Rozważanie nierówności $T^n\mathbb{1}_A(x)\geqslant t$ to szukanie odpowiedzi na pytanie, do których elementów rozbicia α punkt

x wpadnie po n krokach z prawdopodobieństwem co najmniej t. Przyjmując t bliskie 1, uwzględniamy w przewidywaniu przyszłych stanów tylko te najbardziej prawdopodobne. Dla t bliskich 0 odrzucamy w przewidywaniach tylko stany najmniej prawdopodobne. W interpretacji podanej w opisie poprzedniej pracy, gdy operator T ma modelować pomiar eksperymentu obarczony niepewnością, parametr t zyskuje charakter czułości, sterując popełnianiem błędów znanych w teorii testowania hipotez jako błędy pierwszego i drugiego rodzaju – dla t bliskich 0 minimalizujemy ryzyko odrzucenia stanu układu, który jest stanem faktycznym, zaś dla t bliskich 1 ryzyko zaakceptowania nieprawidłowego stanu.

W teorii ergodycznej definiuje się funkcję informacji rozbicia α przestrzeni X jako

$$I_\alpha(x) = -\sum_{A\in\alpha} \log\mu(A)\cdot \mathbb{1}_A(x).$$

W przypadku operatorowym, mnogość definicji entropii „statycznej" $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F})$ powoduje, że definicję funkcji informacji trzeba dostosowywać do wyboru tejże entropii. Dla entropii zdefiniowanej w poprzedniej sekcji proponujemy w pracy wzór

$$\mathbb{I}_\mathcal{F}(x) = \int_0^1 I_{\mathcal{A}^t_\mathcal{F}}(x)\lambda(dt).$$

Jest to średnia informacja uzyskiwana dla rozbić $\mathcal{A}^t_\mathcal{F}$, co współgra z interpretacją produktu $X\times[0,1]$ jako zbioru kopii przestrzeni fazowej X. Zauważmy, że dla rodzin $\mathcal{F} = \mathbb{1}_\alpha$, gdzie α jest rozbiciem X, zachodzi $I_{\mathcal{A}^t_\mathcal{F}}(x) = I_\alpha(x)$ dla każdego x i $t\neq 0$, a stąd też $\mathbb{I}_\mathcal{F} = I_\alpha$. Nasza definicja jest więc, jak już wspomniano, uogólnieniem definicji klasycznej. Ponadto, dla operatora T punktowo generowanego przez transformację S, mamy $\mathbb{I}_{TF} = I_{\mathcal{A}^t_{T\mathcal{F}}}(x) = I_\alpha(Sx)$, zatem wyniki uzyskane dla przypadku operatorowego pokrywają odpowiednie wyniki znane w klasycznej teorii ergodycznej.

Z twierdzenia Fubiniego łatwo wynika podstawowa pożądana własność funkcji informacji:

$$\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}) = \int_X \mathbb{I}_\mathcal{F}\,d\mu.$$

Ponadto, dla rodziny $\mathcal{F}$ złożonej z funkcji stałych funkcja informacji jest stale równa zero. Natomiast nie zachodzi równość między funkcjami $\mathbb{I}_{T\mathcal{F}}$ a $T\mathbb{I}_\mathcal{F}$ – choćby dla przypadku operatora $Tf = \int f d\mu$ pierwsza z tych funkcji jest stale równa zero, a druga będzie dodatnią funkcją stałą.

Twierdzenie 4.13 ([A3, Main theorem A]) *Niech $(X,\mathcal{B},\mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\mathcal{F}$ rodziną funkcji mierzalnych $X\longrightarrow[0,1]$. Niech T będzie ergodycznym operatorem podwójnie stochastycznym na $L^1(\mu)$.*

Wtedy dla prawie każdego $t\in[0,1]$ ciąg $\frac{1}{n}I_{\bigvee_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}^t_i}$ zbiega do entropii $\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F},t)$ w normie L^1.

Twierdzenie 4.14 ([A3, Main theorem B]) *Przy założeniach jak w powyższym twierdzeniu ciąg $\frac{1}{n}\mathbb{I}_{\mathcal{F}^n}$ zbiega do $\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F})$ w normie L^1.*

Główne rozważania prowadzone są dla operatorów zadanych przez prawdopodobieństwa przejścia, a następnie z pomocą takich operatorów uzyskuje się prawdziwość twierdzenia dla dowolnych T. Załóżmy więc, że T jest zadany wzorem (1). Istotną rolę w dowodzie tych twierdzeń odgrywa przestrzeń trajektorii operatora T zdefiniowana i badana w [Fr]. Jest to przestrzeń $X^{\mathbb{N}}$ z σ-ciałem produktowym, na której miara probabilistyczna ν zadana jest przez warunek

$$\nu\left(A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n \times X^{\mathbb{N}}\right) = \int\limits_{A_0}\int\limits_{A_1}\ldots\int\limits_{A_n} P(x_{n-1}, dx_n)\ldots P(x_0, dx_1)\mu(dx_0)$$

dla wszystkich zbiorów mierzalnych $A_0, ..., A_n \subset X$. Istnienie tej miary wynika z twierdzenia Ionescu-Tulcei [IT]. Na $X^{\mathbb{N}}$ działa przekształcenie σ określone wzorem

$$(\sigma x)_n = x_{n+1} \qquad \text{dla } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lemat 4.15 ([Fr]) *Dla prawie wszystkich $t \in [0,1]$ zachodzi*

$$\mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}, t) = \lim_{l\to\infty} \mathrm{h}_\nu\left(\sigma, \mathcal{A}_l^t \times X^{\mathbb{N}}\right).$$

W niniejszej pracy pokazujemy następujący związek:

Twierdzenie 4.16 ([A3, Theorem 3.3]) *Jeśli T jest ergodycznym operatorem podwójnie stochastycznym zadanym na $L^1(\mu)$ przez prawdopodobieństwo przejścia P, to układ $(X^{\mathbb{N}}, \nu, \sigma)$ jest ergodyczny.*

Dowód polega na sprawdzeniu jednej z równoważnych definicji ergodyczności przekształcenia, warunku $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \nu(A \cap \sigma^{-k}(B)) = \nu(A)\nu(B)$ dla dowolnych A i B, z wykorzystaniem twierdzenia ergodycznego Chacona–Ornsteina [CO].

Pierwszym krokiem dowodu twierdzenia 4.13 jest następujące twierdzenie dotyczące rozmiarów elementów rozbicia $\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_{l_0+i}^t$.

Twierdzenie 4.17 ([A3, Theorem 4.1]) *Dla każdej rodziny $\mathcal{F}$ i dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją: $l_0 \in \mathbb{N}$ i zbiór $\tau \subset [0,1]$ o mierze Lebesgue'a $\lambda(\tau) < \epsilon$, takie że dla wszystkich $t \in [0,1] \setminus \tau$ istnieje indeks $n_t \in \mathbb{N}$, dla którego nierówność*

$$\mu(A) \leqslant 2^{-n(\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F},t)-\varepsilon)}$$

zachodzi dla wszystkich $n \geqslant n_t$ i wszystkich $A \in \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_{l_0+i}^t$ za wyjątkiem pewnej liczby zbiorów o łącznej mierze nie większej niż ε.

Minimalne n_t z treści twierdzenia nie może być dowolnie duże na dużym zbiorze liczb t, co pozwala uniezależnić wybór n_t od t i uzyskać:

Twierdzenie 4.18 ([A3, Theorem 4.2]) *Dla każdej rodziny $\mathcal{F}$ i dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją: $l_0 \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ i zbiór $\tau \subset [0,1]$ o mierze $\lambda(\tau) < \epsilon$, takie że dla wszystkich $t \in [0,1] \setminus \tau$ i $n \geqslant N$ nierówność*

$$\mu(A) \leqslant 2^{-n(\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F},t)-\varepsilon)}$$

zachodzi dla wszystkich $A \in \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_{l_0+i}^t$ za wyjątkiem pewnej liczby zbiorów o łącznej mierze nie większej niż ε.

Nierówność z powyższego twierdzenia można przepisać w postaci

$$\frac{1}{n} I_{\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_{l_0+i}^t}(x) \geqslant \mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}, t) - \epsilon,$$

gdzie x należy do dopełnienia pewnego zbioru o mierze μ nie większej niż ε.

Dla prawie wszystkich $t \in [0,1]$ zachodzi też równość

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{n} I_{\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_{l_0+i}^t}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{H}_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_i^t \right) = \mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}, t)$$

Teraz twierdzenie 4.13 dla operatorów zadanych przez prawdopodobieństwa przejścia uzyskuje się, po pewnych rachunkach, przez analogię do następującego prostego wynikania:

jeśli dla pewnej stałej h zachodzi $f \geqslant h - \varepsilon$ i $\int f d\mu = h$, to $\int |f - h| \leqslant 2\varepsilon$.

Twierdzenie 4.14 wynika z twierdzenia 4.13 i udowodnionej w [Fr] równości

$$\mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}) = \int_0^1 \mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}, t)\, \lambda(dt)$$

przez scałkowanie po zmiennej t (względem miary Lebesgue'a na odcinku).

Pozostaje więc wyjaśnić ideę dowodu twierdzenia 4.17. Ze względu na lemat 4.15 planujemy przenieść rozumowanie do przestrzeni trajektorii, zastępując wielkość $\mathrm{h}_\mu(T, \mathcal{F}, t)$ przez $h_\nu(\sigma, \mathcal{A}_l^t \times X^{\mathbb{N}})$ dla dużego l. Inny rezultat z pracy [Fr] mówi, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{F}$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją $l_0 \in \mathbb{N}$ i zbiór mierzalny $\tau \subset [0,1]$ o mierze Lebesgue'a nie większej niż ε, dla których

$$\operatorname{dist}(T^n \mathbb{1}_{\mathcal{A}_l^t}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{l+n}^t}) < \varepsilon$$

jeśli tylko $l \geqslant l_0$, $n \in \mathbb{N}$ i $t \in [0,1] \setminus \tau$. Dalej zakładamy, że parametr t brany jest spoza zbioru τ. Przy ustalonym i pozwala to określić przyporządkowanie między zbiorami $A \in \mathcal{A}_{l+i}^t$ a zbiorami $B = \pi(A) \in \mathcal{A}_l^t$, dla których odległość $\|\mathbb{1}_A - T^i \mathbb{1}_B\|_1$ jest mała. Przechodząc do przestrzeni trajektorii otrzymujemy wtedy, że dla par (A, B) odpowiadających sobie zbiorów miara $\nu\big((A \times X^{\mathbb{N}}) \triangle (X^i \times B \times X^{\mathbb{N}})\big)$ też jest mała. Oczywiście, miara $\nu(A \times X^{\mathbb{N}})$ jest dla każdego mierzalnego zbioru $A \subset X$ równa $\mu(A)$.

Niech $A = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i \in \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_{l_0+i}^t$. Z każdym takim zbiorem możemy, poprzez powyższe przyporządkowanie, związać cylinder $B_0 \times B_1 \times ... \times B_{n-1} \times X^{\mathbb{N}}$. Zbiór $A \times X^{\mathbb{N}}$ może kroić się niepusto także z innymi cylindrami $C_0 \times C_1 \times ... \times C^{n-1} \times X^{\mathbb{N}}$. Można jednak policzyć, że za wyjątkiem małego podzbioru przestrzeni X warunek

$$x \in (A \times X^{\mathbb{N}}) \cap (C_0 \times C_1 \times ... \times C_{n-1} \times X^{\mathbb{N}})$$

pociąga $C_i = B_i$ dla wszystkich $i = 0, ..., n-1$ za wyjątkiem małej ich części. Ponadto, jako że na przestrzeni trajektorii rozważamy przekształcenie punktowe, a nie operator, możemy wykorzystać wniosek z klasycznego twierdzenia Shannona–McMillana–Breimana, tak zwaną zasadę ekwipartycji (patrz np. [P]), która w naszym przypadku mówi, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ zachodzi dla dostatecznie dużych n oszacowanie

$$2^{-n\left(\mathrm{h}_\nu\left(\sigma, \mathcal{A}_{l_0}^t \times X^{\mathbb{N}}\right) + \delta\right)} \leqslant \nu(C) \leqslant 2^{-n\left(\mathrm{h}_\nu\left(\sigma, \mathcal{A}_{l_0}^t \times X^{\mathbb{N}}\right) - \delta\right)}, \tag{3}$$

gdzie C jest dowolnym elementem rozbicia $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{A}_{l_0}^t \times X^{\mathbb{N}})$, spoza zbioru będącego sumą elementów tego rozbicia o łącznej mierze mniejszej niż δ. Dowodzimy, że, za wyjątkiem zbiorów A o małej łącznej mierze μ, część każdego zbioru $A \times X^{\mathbb{N}}$ o mierze przekraczającej $\frac{1}{2}\mu(A)$ jest pokryta przez cylindry spełniające warunek (3) i różniące się od $B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_{n-1} \times X^{\mathbb{N}}$ na niewielkiej liczbie współrzędnych. Po oszacowaniu z góry liczby takich cylindrów otrzymujemy tezę twierdzenia.

W ogólnym przypadku, dla T niekoniecznie generowanego przez prawdopodobieństwo przejścia, przy ustalonej rodzinie funkcji $\mathcal{F}$ rozważamy zespoloną podalgebrę $\mathcal{L}$ w $L^\infty(\mu)$, generowaną przez wszystkie funkcje postaci $T^n f$, gdzie $f \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, oraz przez wielomiany kratowe nad zmiennymi postaci $T^n f$. Przez wielomiany kratowe rozumiemy wyrażenia postaci $w_1 \vee w_2 \vee \ldots \vee w_k$, gdzie $w_i = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{l_i}$, a $\vee$ i $\wedge$ są operacjami kratowymi, w tym wypadku maksimum i minimum funkcji. Zgodnie z twierdzeniem Gelfanda istnieje izomorfizm między $\mathcal{L}$ a algebrą wszystkich ciągłych funkcji (zespolonych) na pewnej zwartej przestrzeni Hausdorffa Δ. Izomorfizm ten zachowuje sprzężenie, zatem przekształca funkcje rzeczywiste na funkcje rzeczywiste oraz funkcje dodatnie na dodatnie. W szczególności rodzina $\mathcal{F}$ jest transformowana na pewną rodzinę $\widehat{\mathcal{F}}$ funkcji $\Delta \to [0,1]$. Pozwala on też przenieść miarę μ na borelowską miarę probabilistyczną $\hat{\mu}$ na Δ oraz określić operator Markowa $\widehat{T}$ na przestrzeni funkcji ciągłych $C(\Delta)$ wzorem $\widehat{T}\hat{f} = \widehat{Tf}$, $f \in \mathcal{L}$. Wiadomo, że taki operator jest zawsze zadany przez prawdopodobieństwo przejścia, więc zachodzi dla niego twierdzenie 4.13, a stąd wynika też prawdziwość tego twierdzenia dla T.

Twierdzenie 4.13 pociąga też regułę ekwipartycji w następującym brzmieniu ([A3, Remark 4.6]):

> dla każdej rodziny $\mathcal{F}$ i dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją: $l_0 \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ i zbiór $\tau \subset [0,1]$ o mierze Lebesgue'a $\lambda(\tau) < \epsilon$, takie że dla wszystkich $t \in [0,1] \setminus \tau$ i $n \geqslant N$ zachodzi nierówność
>
> $$2^{-n(\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F},t)+\varepsilon)} \leqslant \mu(A) \leqslant 2^{-n(\mathrm{h}_\mu(T,\mathcal{F},t)-\varepsilon)}$$
>
> dla wszystkich $A \in \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_{l_0+i}^t$ za wyjątkiem pewnej liczby zbiorów o łącznej mierze nie większej niż ε.

Praca kończy się dyskusją na temat możliwych definicji funkcji informacji dla entropii z prac [DF] i [GLW], ze wskazaniem ich głównych zalet i wad. Definicja $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}^{DF}$ proponowana dla [DF]-entropii pozwala uzyskać wygodną asymptotyczną własność

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{I}_{T^{l+n}\mathcal{F}}^{DF} - T^n \mathbb{I}_{T^l\mathcal{F}}^{DF}\|_1 = 0.$$

Niestety, dla rodzin funkcji stałych może być ściśle dodatnia. Definicja funkcji informacji $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}^{GLW}$ dla [GLW]-entropii nie ma podobnej asymptotycznej własności, ale zeruje się dla funkcji stałych – ma więc własności bliższe głównej definicji rozważanej w pracy.

4.5 Praca [A4]

Ostatnia praca zawiera przeniesienie na przypadek operatorowy trzech słynnych klasycznych twierdzeń dotyczących zerowej entropii. Podzielić ją można na dwie części, odmienne pod względem używanych technik. Pierwsza z nich dotyczy typowości zerowej entropii.

W zbiorze wszystkich automorfizmów ustalonej przestrzeni probabilistycznej (X, μ) wprowadza się topologię, zwaną słabą topologią, żądając, by ciąg automorfizmów S_n zbiegał do S, gdy dla każdego zbioru mierzalnego A zachodzi $\lim_{n\to\infty} \mu(S_n^{-1}A \triangle S^{-1}A) = 0$. Twierdzenie Rochlina z pracy [R] mówi, że automorfizmy mające entropię zero tworzą zbiór rezydualny w słabej topologii. Dla działań grup typowość zerowej entropii Rochlina została wykazana przez Rudolpha w przypadku działań grup ze średnią (patrz *subclaim* na stronie 288 pracy [FW]) i przez L. Bowena dla działań dowolnych grup przeliczalnych (patrz [B]). W wersji topologicznej Glasner i Weiss udowodnili w [GW], że w zbiorze homeomorfizmów zwartej przestrzeni metrycznej, wyposażonym w topologię jednostajnej zbieżności, zbiór homeomorfizmów o zerowej entropii topologicznej jest typu G_δ, a jeśli rozważamy zbiór Cantora, to jest on także gęsty.

A. Vershik w pracy [V] rozważa typowe własności operatorów podwójnie stochastycznych, zwanych przez niego także polimorfizmami, i stawia pytanie o generyczność entropii zero. W tym kontekście pyta, między innymi, o entropię z pracy [DF], co było bezpośrednią motywacją do badań z bieżącej pracy. Odpowiadając na pytanie Vershika, dowodzimy w niej następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.19 ([A4, Theorem 3.5]) *Zbiór wszystkich operatorów podwójnie stochastycznych o zerowej entropii jest rezydualny w sensie mocnej topologii operatorowej i topologii normowej w zbiorze wszystkich operatorów podwójnie stochastycznych na $L^1(\mu)$.*

Gęstość operatorów o entropii zero uzyskuje się dzięki obecności w tej klasie operatorów postaci $(1-\frac{1}{n})T + \frac{1}{n}S$, gdzie $Sf = \int f d\mu$, a T jest dowolnym operatorem podwójnie stochastycznym. Aby sprawdzić, że zbiór operatorów o entropii zero jest typu G_δ, dowodzimy, że dla dowolnych liczb $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ oraz rodziny funkcji mierzalnych $\mathcal{F}$ zbiór

$$U(\varepsilon, n, \mathcal{F}) = \left\{T : T \text{ jest podwójnie stochastyczny i } \frac{1}{n}\,\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}^n) < \varepsilon\right\}$$

jest otwarty w obu rozważanych topologiach. Następnie pokazujemy, że zbiór operatorów o entropii zero można zapisać jako przeliczalny przekrój zbiorów typu $U(\varepsilon, n, \mathcal{F})$, ograniczając się do ε wymiernych i $\mathcal{F}$ złożonych z funkcji wybranych wyłącznie z pewnego gęstego podzbioru $L^1(\mu)$.

Druga część pracy poświęcona jest uogólnieniu twierdzenia Kusznirenki (patrz [K]) oraz twierdzenia Halmosa–von Neumanna (patrz [HvN]). W oryginalnych sformułowaniach oba te twierdzenia dotyczą układów o dyskretnym spektrum, tzn. takich, dla których generowany przez układ operator Koopmana ma liniowo gęsty w L^2 zbiór wektorów własnych. *Entropią ciągową przekształcenia S zachowującego miarę względem rozbicia ξ wzdłuż ciągu $A = (i_n)_{n\in\mathbb{N}}$* liczb naturalnych nazywamy wielkość

$$\mathrm{h}_A(S,\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{H}_\mu\left(\bigvee_{k=1}^{n} S^{-i_k}\xi\right).$$

Entropia ciągowa przekształcenia S wzdłuż ciągu A to

$$\mathrm{h}_A(S) = \sup_\xi \mathrm{h}_A(S,\xi),$$

gdzie kres górny przebiega wszystkie skończone rozbicia mierzalne przestrzeni X. Klasyczne twierdzenie Kusznirenki mówi, że S ma dyskretne spektrum wtedy i tylko wtedy, gdy entropia ciągowa $\mathrm{h}_A(S)$ jest równa zero wzdłuż każdego ciągu A.

Łatwo jest przenieść definicję entropii ciągowej na operatory Markowa, posługując się na przykład definicją z pracy [DF]. Dla ciągu $A = (i_n)$ kładziemy

$$\mathrm{h}_A(T,\mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{H}_\mu\left(\bigvee_{k=1}^{n} T^{-i_k}\mathcal{F}\right),$$

gdzie $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}) = \mathrm{H}^{DF}(\mathcal{F})$ jest taka jak w (2), a następnie bierzemy kres górny po wszystkich rodzinach $\mathcal{F}$. Niemniej równoważność z twierdzenia Kusznirenki nie jest wtedy prawdziwa.

Głównym narzędziem używanym w tej części pracy jest rozkład Jacobsa–de Leeuwa–Glicksberga. W przypadku operatora Markowa jest to rozkład dziedziny tego operatora na sumę prostą dwóch podprzestrzeni niezmienniczych: część odwracalną E_{rev} (*reversible part*), która jest rozpinana przez wektory własne odpowiadające wartościom własnym o module 1, i część niemal słabo stabilną E_{aws} (*almost weakly stable*), która jest scharakteryzowana przez następującą własność:

> dla każdej funkcji $f \in E_{\mathrm{aws}}$ albo orbita $\{T^n f : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest warunkowo zwarta w topologii normowej, albo $\inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n f|| = 0$.

Uzyskuje się dzięki temu rozkładowi analogon twierdzenia Kusznirenki w następującym brzmieniu:

Twierdzenie 4.20 ([A4, Theorem 5.4]) *Następujące warunki są równoważne dla operatora podwójnie stochastycznego na $L^p(\mu)$:*

1. *T ma zerową entropię ciągową dla każdego ciągu,*
2. *$L^p(\mu) = V \oplus W$, gdzie T obcięty do V ma spektrum dyskretne, a $\lim_{n\to\infty} \|T^n f\|_p = 0$ dla każdej $f \in W$,*
3. *jeśli $E_{\mathrm{rev}} \oplus E_{\mathrm{aws}}$ jest rozkładem Jacobsa–de Leeuwa–Glicksberga przestrzeni $L^p(\mu)$ względem T, to $\lim_{n\to\infty} \|T^n f\|_p = 0$ dla każdej $f \in E_{\mathrm{aws}}$.*

Dla $p = 2$ uzyskano też w pracy sformułowanie w terminach rozkładu Nagy-Foiaşa operatora na część unitarną i całkowicie nieunitarną (konstrukcję tego rozkładu można znaleźć w [NF]).

W dowodzie twierdzenia uzasadnia się, że operator ma zerową entropię ciągową dla każdego ciągu wtedy i tylko wtedy, gdy orbita każdej funkcji $f \in L^p(\mu)$ jest warunkowo zwarta ([A4, Corollary 5.8]). Ta część dowodu przebiega podobnie, jak w oryginalnej pracy Kusznirenki, wydaje się jednak być bardziej naturalna w przypadku operatorowym. Dla operatora o zerowej entropii ciągowej otrzymujemy wtedy, zgodnie z powyższą charakteryzacją, iż wszystkie orbity funkcji z części niemal słabo stabilnej zbiegają do zera (nie ma bowiem orbit o niezwartym domknięciu). Zatem warunek drugi twierdzenia wynika z pierwszego. Aby udowodnić przeciwną implikację, można pokazać, że orbity funkcji z części odwracalnej są warunkowo zwarte. Jako że orbity na części niemal słabo stabilnej też są z założenia warunkowo zwarte (bo zbiegają do zera), otrzymujemy warunkową zwartość wszystkich orbit, czyli zerową entropię ciągową. Warunek trzeci stanowi tylko przeformułowanie warunku drugiego.

Zgodnie z twierdzeniem 5.12 z pracy [A4], przykładem klasy operatorów o zerowej entropii ciągowej są operatory quasi-zwarte, czyli takie operatory liniowe na $L^2(\mu)$, dla których istnieją domknięte podprzestrzenie niezmiennicze F i H oraz liczba $r < 1$, dla których

1. $L^2(\mu) = F \oplus H$,
2. $\dim(F) < \infty$ i wszystkie wartości własne obcięcia $T|_F$ mają moduł większy od r,
3. promień spektralny obcięcia $T|_H$ jest mniejszy od r.

Podobnie można uzasadnić, że jeśli w rozkładzie Nagy–Foiaşa część unitarna operatora T ma dyskretne spektrum, a część całkowicie nieunitarna ma promień spektralny mniejszy od 1, to T ma zerową entropię ciągową ([A4, Remark 5.13]). Jednakże promień spektralny równy 1 poza częścią unitarną nie wyklucza zerowej entropii ciągowej – przykład 5.14 z pracy to konstrukcja operatora całkowicie nieunitarnego, o zerowej entropii ciągowej, mającego promień spektralny równy jeden na dopełnieniu ortogonalnym stałych.

Twierdzenie Halmosa–von Neumanna udowodnione w 1942 roku w pracy [HvN] mówi, że ergodyczny układ dynamiczny o spektrum dyskretnym jest izomorficzny z układem Kroneckera, tj. obrotem na zwartej grupie abelowej. Jako że w przypadku operatorowym bardziej naturalnym warunkiem wydaje się zerowa entropia ciągowa, można spodziewać się, że analogon twierdzenia Halmosa–von Neumanna powinien dotyczyć raczej reprezentacji operatorów spełniających ten ostatni warunek. Istotnie, zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.21 ([A4, Theorem 6.3]) *Niech T będzie ergodycznym operatorem podwójnie stochastycznym na $L^1(X, \Sigma, \mu)$. Niech $\Sigma_{\mathrm{rev}} = \{A \in \Sigma : \mathbb{1}_A \in E_{\mathrm{rev}}\}$. Operator T ma zerową entropię ciągową wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą jednocześnie następujące warunki:*

1. *operator T obcięty do $E_{\mathrm{rev}} = L^1(X, \Sigma_{\mathrm{rev}}, \mu)$ jest markowsko izomorficzny z obrotem R na zwartej grupie abelowej G (z miarą Haara λ),*

2. *dla każdej $f \in L^1(\mu)$ zachodzi zbieżność*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f - T^n E(f|\Sigma_{\mathrm{rev}})\|_1 = 0.$$

Ponadto, jeśli X jest przestrzenią Lebesgue'a, a P_T prawdopodobieństwem przejścia zadającym T, to istnieje zachowujące miarę przekształcenie $\pi : X \to G$, takie że dla każdej funkcji $g \in L^1(G, \lambda)$ zachodzi $T(g \circ \pi) = g \circ R \circ \pi$ (tzn. izomorfizm markowski staje się punktowym izomorfizmem układów dynamicznych) oraz $P_T(x, \pi^{-1}R\pi(x)) = 1$.

Po opublikowaniu wstępnej wersji pracy w serwisie arxiv.org zostałem zaproszony do wygłoszenia na jej temat referatu na konferencji z cyklu *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory* w Wuppertal. Oprócz tego, praca była referowana na kilku konferencjach międzynarodowych, jak i na lokalnym seminarium.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo–badawczych.

Poniżej omawiam wyłącznie wyniki i prace z okresu po uzyskaniu stopnia doktora. Prace wymienione są w porządku chronologicznym, jedynie ostatnia z opisywanych opublikowanych już prac stanowi odstępstwo od tej reguły, jako praca w języku polskim i mająca charakter popularyzatorski.

5.1 B. Frej, A. Kwaśnicka. *Minimal models for Z^d-actions.* Colloq. Math. 2008, vol. 110, nr 2, 461–476.

Praca ma swoją genezę w znanym twierdzeniu Jewetta–Kriegera, udowodnionym w [J] dla układów słabo mieszających i uogólnionym w [Kr] na wszystkie układy ergodyczne. Mówi ono, że dla każdego układu ergodycznego można znaleźć miarowo izomorficzny z nim topologiczny układ dynamiczny ściśle ergodyczny, tj. o jedynej mierze niezmienniczej i minimalny. W szczególności, każdy topologiczny układ dynamiczny z dowolną ergodyczną miarą niezmienniczą można zamodelować w izomorficznym układzie minimalnym. Wiadomo, że w ogólnym przypadku zbiór miar niezmienniczych topologicznego układu dynamicznego jest zwartym wypukłym podzbiorem zbioru wszystkich miar probabilistycznych na X, mającym strukturę sympleksu Choqueta (patrz [Ph]). Naturalne pytanie o możliwość modelowania układów topologicznych w układach minimalnych przy zachowaniu całego sympleksu miar niezmienniczych było rozważane w pracach [D1] i [KO]. Niniejsza praca rozszerza te wyniki na przypadek działania grupy $\mathbb{Z}^d$ w następujący sposób. Niech X będzie zwartą zerowymiarową przestrzenią metryzowalną, a $T = \{T_1, \dots, T_d\}$ zbiorem komutujących homeomorfizmów $X \to X$. Parę (X, T) nazywamy *d-wymiarowym topologicznym układem dynamicznym* lub *$\mathbb{Z}^d$-działaniem.* Mówimy, że układ (X, T) jest *aperiodyczny*, gdy $T_1^{n_1} ... T_d^{n_d}(x) = x$ wyłącznie dla $n_1 = ... = n_d = 0$. Układ (X, T) jest *minimalny*, jeśli X nie ma właściwych niepustych podzbiorów domkniętych i niezmienniczych (tzn. podzbiorów F takich, że $T_iF = F$ dla $i = 1, ..., d$). Zbiór wszystkich borelowskich probabilistycznych miar T-niezmienniczych na X oznaczamy przez $P_T(X)$.

Definicja 5.1 *Dwa d-wymiarowe topologiczne układy dynamiczne (X, T) i (Y, S) są borelowsko* izomorficzne jeśli istnieją podzbiory $X_0 \subset X$ i $Y_0 \subset Y$, które mają miarę pełną dla każdej miary niezmienniczej odpowiednio na X i Y, oraz borelowska bijekcja $\Phi : X_0 \to Y_0$ zachowująca działanie ($\Phi(T_ix) = S_i\Phi(x)$ dla $i = 1, ..., d$), dla której odwzorowanie sprzężone $\Phi^* : \mathcal{P}_T(X) \to \mathcal{P}_S(Y)$ zdefiniowane wzorem $\Phi^*(\mu) = \mu \circ \Phi^{-1}$ jest afinicznym homeomorfizmem względem topologii *-słabych w $P_T(X)$ i $P_S(Y)$.*

Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie:

Twierdzenie 5.2 *Jeśli X jest zwartą i metryzowalną przestrzenią zerowymiarową, to każdy aperiodyczny układ d-wymiarowy jest borelowsko* izomorficzny z pewnym układem minimalnym.*

Konstruowany w dowodzie układ jest w istocie układem symbolicznym, ale nad nieprzeliczalnym alfabetem. Główna myśl konstrukcji jest podobna jak w [D1], a opiera się na zastąpieniu wyjściowego układu przez układ symboliczny, w którym punkty są reprezentowane przez d-wymiarowe nieskończone tablice. Następnie modyfikuje się każdy punkt układu tak, by każdy blok z „gęstego" podzbioru rodziny wszystkich bloków występujących w tej reprezentacji pojawiał się syndetycznie, co gwarantuje minimalność. Konstrukcja wymaga lematu o markerach w wersji dla $\mathbb{Z}^d$-działań (dowód znajduje się w omawianej pracy), który pozwala skonstruować ciąg kodów blokowych zbieżny jednostajnie do szukanego izomorfizmu. Jednak główne trudności, nowe w porównaniu z przypadkiem jednowymiarowym, polegają na utracie liniowego następstwa elementów w orbicie punktu, a co za tym idzie zamiany ciągów (używanych w symbolicznej reprezentacji jednowymiarowego układu) na wielowymiarowe tablice nieskończone. Kwestia konstrukcji ciągu zagnieżdżonych podziałów takich tablic staje się istotnie trudniejsza. W pracy wykorzystuje się w tym celu nowy sposób konstrukcji takich podziałów oparty na porządku maksymoleksykograficznym. Wymaga to jednak dodatkowego oszacowania ilości punktów, dla których podziały na bloki zachowują się źle. Takie złe zachowanie nazywamy w pracy istnieniem „wiecznych brzegów".

Po latach odnoszę wrażenie, że choćby ze względu na duży poziom komplikacji konstrukcji, praca mogła ukazać się w czasopiśmie o wyższej renomie. Nie stało się tak przez małe doświadczenie publikacyjne autorów. Jej naturalna kontynuacja (patrz sekcja 5.4) ukazała się w czasopiśmie *Groups, Geometry, and Dynamics.*

5.2 T. Downarowicz, B. Frej, P.-P. Romagnoli. *Shearer's inequality and infimum rule for Shannon entropy and topological entropy.* Contemp. Math., ISSN 0271-4132; vol. 669 (2016), 63–75

Artykuł zaplanowany jako przeglądowy, obracający się wokół własności podaddytywności klasycznej entropii Shannona, który zawiera jednak pewne elementy nowe. Zgodnie z tytułem, duży nacisk położony jest na rzadko spotykaną w klasycznych monografiach z teorii ergodycznej nierówność Shearera. W sformułowaniu nierówności Shearera potrzebne jest pojęcie *k-pokrycia* zbioru skończonego F, tzn. rodziny $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ zbiorów skończonych (z możliwymi powtórzeniami tego samego zbioru), takiej że każdy element F należy do K_i co najmniej dla k indeksów $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Powiemy, że nieujemna funkcja H o argumentach będących zbiorami skończonymi spełnia nierówność Shearera, gdy dla dowolnego F i dowolnego jego k-pokrycia $\mathcal{K}$ zachodzi

$$H(F) \leqslant \frac{1}{k} \sum_{K \in \mathcal{K}} H(K).$$

Przez grupę ze średnią (*amenable group*) rozumiemy grupę G, dla której istnieje ciąg (F_n) podzbiorów G spełniający dla każdego $g \in G$ warunek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} = 0,$$

gdzie $gF = \{gf : f \in F\}$, a $|\cdot|$ oznacza liczność zbioru. Ciąg taki nazywamy ciągiem Følnera. Działanie grupy G na przestrzeni X jest zadane przez homomorfizm grupowy określony na G, o wartościach w grupie wszystkich automorfizmów lub wszystkich homeomorfizmów przestrzeni X na siebie, w zależności od tego czy rozważamy sytuację miarową czy topologiczną.

Niech G będzie grupą ze średnią, a (F_n) ustalonym ciągiem Følnera. Oznaczmy przez $\mathcal{F}(G)$ rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów G.

Definicja 5.3 *Nieujemna funkcja H określona na $\mathcal{F}(G)$ spełnia* zasadę minimum, *gdy*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} H(F_n) = \inf_{F \in \mathcal{F}(G)} \frac{1}{|F|} H(F).$$

Mówimy, że H jest *G-niezmiennicza*, gdy dla każdego $g \in G$ zachodzi $H(Fg) = H(F)$. Ważność nierówności Shearera podkreśla następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.4 *Jeśli nieujemna i G-niezmiennicza funkcja H na $\mathcal{F}(G)$ spełnia nierówność Shearera, to spełnia też zasadę minimum.*

Funkcja $H(F) = \mathrm{H}_\mu\left(\alpha^F\right)$, gdzie α jest skończonym rozbiciem przestrzeni probabilistycznej (X, μ), $\alpha^F = \bigvee_{g \in F} g\alpha$, a $\mathrm{H}_\mu(\alpha)$ oznacza entropię Shannona rozbicia α, spełnia nierówność Shearera. Zatem powyższe twierdzenie oznacza w szczególności, że w przypadku grup ze średnią w klasycznej definicji entropii dla działania takich grup, można uniezależnić się od wyboru ciągu Følnera i rozważać zamiast granicy wzdłuż ciągu Følnera kres dolny po wszystkich podzbiorach skończonych. Co więcej, w ogóle ciąg Følnera nie jest potrzebny do określenia entropii. Dlatego też wzór

$$\mathrm{h}_\mu^*(G, \alpha) = \inf_{F \in \mathcal{F}(G)} \frac{1}{|F|} \mathrm{H}_\mu\left(\alpha^F\right)$$

można wykorzystać w definicji entropii w bardziej ogólnych grupach. Przyjmując

$$\mathrm{h}_\mu^*(G) = \sup_\alpha \mathrm{h}_\mu^*(G, \alpha),$$

gdzie kres górny przebiega wszystkie rozbicia skończone, otrzymujemy pojęcie znane obecnie w literaturze pod nazwą *naive entropy*. Było ono intensywnie badane m.in. w pracach Burtona, L. Bowena i Sewarda. Oprócz niewątpliwej prostoty, ma tę zaletę, że w odróżnieniu od entropii soficznej, nie może wzrosnąć dla faktora. Niestety, jak pokazano w [L], dla grup innych niż grupy ze średnią (*non-amenable*) entropia naiwna przyjmuje tylko dwie wartości: 0 lub ∞. Jedno z pytań postawionych w naszej pracy, o relacje między entropią $\mathrm{h}_\mu^{**}(G) = \inf\{\mathrm{h}_\mu^*(G, \alpha) : \alpha \text{ jest generatorem}\}$ a entropią Rochlina $\mathrm{h}_\mu^{***}(G) = \inf\{\mathrm{H}_\mu^*(\alpha) : \alpha \text{ jest generatorem}\}$ zostało rozwiązane (także dla entropii warunkowych) przez Sewarda w pracy [S], który pokazał, że dla działań wolnych zachodzi $\mathrm{h}_\mu^{***}(G) \leqslant \mathrm{h}_\mu^{**}(G)$, co w połączeniu z wcześniejszym wynikiem tego samego autora daje równość tych wielkości.

Wyniki nowe pojawiają się w naszej pracy głównie w rozdziale szóstym, dotyczącym entropii topologicznej. W pracy podano przykłady, że entropia topologiczna, mimo podaddytywności, nie spełnia ani nierówności Shearera, ani zasady minimum – w tym wypadku w przykładzie użyto działania skończonej grupy $\mathbb{Z}_3$. Udało się jednak sformułować pewne wyniki pozytywne.

Twierdzenie 5.5 *Jeśli pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ składa się ze zbiorów parami rozłącznych, to odpowiadająca mu funkcja $\mathrm{H}_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \mathrm{H}_{\mathrm{top}}\left(\mathcal{U}^{\mathcal{F}}\right)$ określona na $\mathcal{F}(G)$ spełnia nierówność Shearera.*

Elementy układu symbolicznego $X = \Lambda^G$ z działaniem grupy G, gdzie Λ jest skończonym alfabetem, będziemy oznaczać przez $(x_g)_{g \in G}$, gdzie $x_g \in \Lambda$ dla każdego $g \in G$. Działanie w takim układzie jest zadane wzorem $(gx)_h = x_{hg}$. Rolę pokryć w takim układzie mogą pełnić rozbicia na cylindry. W szczególności, przez P_Λ oznaczamy tzw. *time-zero partition*: $P_\Lambda = \{[a] : a \in \Lambda\}$, gdzie $[a] = \{(x_g)_{g \in G} : x_e = a\}$.

Wniosek 5.6 *Jeśli (X, G) jest układem symbolicznym, a $\mathcal{U} = P_\Lambda$, to zachodzi zasada infimum dla $\mathrm{H}_{\mathrm{top}}$, tzn.*

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(G) = \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(G, \mathcal{U}) = \inf_{F \in \mathcal{F}(G)} \frac{1}{|F|} \mathrm{H}_{\mathrm{top}}\left(\mathcal{U}^F\right).$$

Mimo braku nierówności Shearera, wykorzystując zasadę wariacyjną, można udowodnić następujący fakt.

Twierdzenie 5.7 *Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a G przeliczalną grupą ze średnią działającą na X za pomocą homeomorfizmów. Niech*

$$\mathrm{h_{top}}^*(G, \mathcal{U}) = \inf_F \frac{1}{|F|} \mathrm{H_{top}} \left(\mathcal{U}^F\right)$$
$$\mathrm{h_{top}}^*(G) = \sup_{\mathcal{U}} \mathrm{h_{top}}^*(G, \mathcal{U})$$

Wtedy

$$\mathrm{h_{top}}^*(G) = \mathrm{h_{top}}(G)$$

Jednocześnie pytanie o zasadę infimum dla entropii topologicznej w przypadku nieskończonych grup ze średnią, czyli o równość $\mathrm{h_{top}}^*(G, \mathcal{U}) = \mathrm{h_{top}}(G, \mathcal{U})$ pozostaje otwarte.

5.3 B. Frej, A. Kwaśnicka. *A map maintaining the orbits of a given Z^d-action.* Colloq. Math. 2016, vol. 143, nr 1, s. 1-15.

Praca dotyczy pojęcia orbitalnej równoważności topologicznych układów dynamicznych. W [GMPS1] pokazano, że każde minimalne działanie grupy $\mathbb{Z}^2$ na przestrzeni Cantora, tzn. zwartej zerowymiarowej przestrzeni metryzowalnej, nie mającej punktów izolowanych, jest orbitalnie równoważne z pewnym działaniem grupy $\mathbb{Z}$. Następnie Ci sami autorzy uogólnili ten wynik w pracy [GMPS2] na przypadek $\mathbb{Z}^d$–działania dla dowolnego d. W okresie pomiędzy ogłoszeniem tych wyników, podjęliśmy próbę samodzielnego dowodu tego faktu, z pominięciem skomplikowanej maszynerii używanej przez Giordano, Matui, Putnama i Skaua. Celem było wskazanie wprost odpowiedniego przekształcenia zachowującego orbity, a bezpośrednią inspiracją była praca Forresta [F], wykorzystująca jako główne narzędzie diagramy Brattelego–Vershika. Nasze podejście zakończyło się tylko częściowym sukcesem. Używając podobnych narzędzi jak w pracy 5.1 (lemat o markerach, podział na bloki oparty na porządku maksymoleksykograficznym) udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.8 *Niech $T_1, ..., T_d$ będą homeomorfizmami na przestrzeni Cantora X. Dla minimalnego wolnego $\mathbb{Z}^d$-działania $T = \{T_1, ..., T_d\}$, i każdego $x_0 \in X$ istnieje ciągła iniekcja $F\colon X \setminus \{x_0\} \to X$ taka, że dla x z rezydualnego podzbioru X zachodzi*

$$\mathcal{O}_T(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F^n\{x\}$$

gdzie $\mathcal{O}_T(x)$ oznacza d-wymiarową orbitę x.

Ponadto, dla pozostałych x zachodzi

$$\mathcal{O}_T(x) = \bigcup_{j=1}^{J} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F^n\{x_j\}$$

dla pewnego skończonego zbioru $\{x_1, ..., x_J\}$.

Po pojawieniu się pracy [GMPS2] porzuciliśmy dalsze badania w tym kierunku.

5.4 B. Frej, D. Huczek. *Minimal models for actions of amenable groups.* Groups Geom. Dyn. 2017, vol. 11, nr 2, s. 567-583.

Jest to kontynuacja badań z pracy opisanej w sekcji 5.1. Jako naturalne uogólnienie przypadku $\mathbb{Z}^d$ działań, rozważamy działania przeliczalnych grup ze średnią – niezwykle szybko rozwijający się dział układów dynamicznych (patrz np. [KL]). Utożsamiamy działającą grupę z odpowiednią grupą homeomorfizmów i piszemy gx dla oznaczenia obrazu x przez homeomorfizm wyznaczony przez g. Mówimy, że działanie grupy G jest *wolne*, gdy warunek $gx = x$, gdzie $g \in G$, $x \in X$, implikuje, że g jest elementem neutralnym. Działanie grupy G nazywamy *minimalnym*, gdy dla każdego $x \in X$ domknięcie orbity $\{gx : g \in G\}$ jest równe całej przestrzeni X lub, równoważnie, gdy X nie ma właściwych podzbiorów domkniętych i niezmienniczych (tzn. takich, że $gF = F$ dla wszystkich g).

Pojęcie borelowskiego* izomorfizmu (por. def. 5.1) przenosi się w naturalny sposób na działanie grup. Wtedy główne twierdzenie z pracy ma następujące brzmienie:

Twierdzenie 5.9 *Jeśli X jest zwartą metryzowalną przestrzenią zerowymiarową a G jest grupą ze średnią G działającą w sposób wolny na X, to układ (X, G) jest borelowsko* izomorficzny z pewnym minimalnym układem dynamicznym (Y, G).*

Naiwnie rzecz ujmując, w porównaniu z działaniem $\mathbb{Z}^d$ trudność polega na tym, że tracimy możliwość wykorzystania pojęcia kształtu podzbioru G. Formalnie, zachodzi potrzeba wykorzystania głęboko nietrywialnych twierdzeń o pokafelkowaniach grup z prac [DH] i [DHZ], zastępujących podziały na bloki wynikające z algorytmu opartego na porządku maksymoleksykograficznym. Zachowując główna myśl z [D1] i pracy 5.1 polegającą na konstrukcji ciągu kodów blokowych modyfikujących trajektorie, czy raczej symboliczne reprezentacje punktów z oryginalnej przestrzeni, przeprowadzamy rozumowania natury ilościowej, wykorzystując w szacowaniach pojęcie gęstości Banacha. Dzięki twierdzeniu ergodycznemu Lindenstraussa (patrz [L]), rachunki te przekładają się na miary zbiorów.

5.5 B. Frej, D. Huczek. *Faces of simplices of invariant measures for actions of amenable groups.* Monatsh. Math. 2018, vol. 185, nr 1, s. 61-80.

Wykorzystując podobne narzędzia jak w pracy poprzedniej, zajmujemy się tu zagadnieniem reprezentowania ścian sympleksu miar niezmienniczych pewnego układu dynamicznego z działaniem grupy ze średnią jako pełnych sympleksów miar niezmienniczych. Dla klasycznych układów dynamicznych problem ten był rozważany w pracy [D2].

Niech K będzie dowolnym metryzowalnym sympleksem Choqueta. Wprowadza się następujące definicje.

Definicja 5.10

1. Obsadą (ang. assignment) *sympleksu K nazywamy fukcję Φ określoną na K, taką że dla każdego $p \in K$ wartość $\Phi(p)$ jest układem dynamicznym $(X_p, \Sigma_p, \mu_p, G_p)$, gdzie (X_p, Σ_p, μ_p) jest standardową przestrzenią probabilistyczną, a G_p działa na X przez automorfizmy miarowe.*

2. *Dwie obsady: Φ na K i Φ' na K' są* równoważne, *gdy istnieje afiniczny homeomorfizm $\pi : K \longrightarrow K'$, taki że dla wszystkich $p \in K$ układy $\Phi(p)$ i $\Phi'(\pi(p))$ są izomorficzne.*

3. *Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym z działaniem grupy. Niech $\mathcal{B}_X$ będzie σ-ciałem borelowskim w X, a $P_G(X)$ będzie sympleksem Choqueta wszystkich G-niezmienniczych miar na X (z topologią *-słabą).*
   Obsadę określoną na $P_G(X)$ wzorem $\Phi(\mu) = (X, \mathcal{B}_X, \mu, G)$ nazywamy naturalną obsadą *na (X, G).*

4. Ścianą sympleksu *S nazywamy zwarty wypukły podzbiór S, który jest sympleksem i którego punktu ekstremalne są też ekstremalne w S.*

5. *Jeśli K jest ścianą sympleksu $P_G(X)$, to* obsadą tożsamościową *na K nazywamy obcięcie naturalnej obsady na (X, G) do K.*

Głównym wynikiem bieżącej pracy jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.11 *Niech X będzie przestrzenią Cantora. Niech G będzie przeliczalną grupą ze średnią działającą na X w sposób wolny. Niech K będzie ścianą sympleksu $P_G(X)$ wszystkich G-niezmienniczych probabilistycznych miar borelowskich na X. Wtedy istnieje przestrzeń Cantora Y z wolnym działanem grupy G, taka że naturalna obsada na (Y, G) jest równoważna z obsadą tożsamościową na K.*

W połączeniu z wynikami poprzedniej pracy otrzymujemy:

Twierdzenie 5.12 *Niech X będzie przestrzenią Cantora z wolnym działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G i niech K będzie ścianą sympleksu $P_G(X)$. Wtedy istnieje przestrzeń Cantora Y, taka że układ (Y, G) jest minimalny i naturalna obsada na (Y, G) jest równoważna z obsadą tożsamościową na K.*

Głównym narzędziem w dowodzie wersji twierdzenia dla klasycznych układów dynamicznych w [D2] były miary blokowe (tzn. miary niesione przez orbity okresowe w układzie symbolicznym), którymi aproksymowano dowolne miary ergodyczne. Aby móc podobną strategię stosować w przypadku działania grup, w omawianej pracy stworzono analogony takich miar, co stanowi wartość samą w sobie.

5.6 B. Frej, D. Huczek, *A comment on ergodic theorem for amenable groups*, przyjęta do druku w Canad. Math. Bull., doi:10.4153/S0008439519000110, arXiv:1901.01324 [math.DS]

Praca zawiera dowód takiej wersji twierdzenia ergodycznego dla działań przeliczalnych grup ze średnią, w której ustalony ciąg Følnera nie jest temperowany. Zamiast tego zakłada się, że funkcja f, której średnie ergodyczne liczymy, spełnia następujący warunek typu mieszania:

Definicja 5.13 *Funkcja f jest* ε-niezależna od pod-σ-ciała Σ_0, *jeśli dla każdego zbioru $B \in \Sigma_0$ miary dodatniej zachodzi*

$$\left| \int_B f d\mu_B - \int f d\mu \right| < \varepsilon,$$

gdzie μ_B jest miarą warunkową na B.

Twierdzenie 5.14 *Niech $G = \{g_1, g_2, ...\}$ będzie przeliczalną grupą ze średnią działającą na przestrzeni probabilistycznej (X, μ). Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Følnera w G, takim że dla każdej $\alpha \in [0, 1)$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{|F_n|}$ jest zbieżny. Niech $f \in L^\infty(\mu)$ spełnia następujący warunek: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $K \subset G$, taki że f jest ε-niezależna od $\sigma(\{f \circ g : g \notin K\})$.*

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g\in F_n} f(gx) = \int f d\mu \qquad \mu\text{-p.w.}$$

W dowodzie wykorzystuje się nierówność koncentracyjną Azumy–Hoeffdinga.

Praca była już referowana na konferencji międzynarodowej oraz na zaproszenie na seminarium z układów dynamicznych odbywającym się na krakowskiej AGH.

5.7 B. Frej, D. Huczek, *Extensions of full shifts with group actions.* przyjęta do druku w Colloq. Math., doi: 10.4064/cm7843-3-2019, arXiv:1901.01145 [math.DS]

Ta praca została zainspirowana wykładami Aimee Johnson wygłoszonymi na wrocławskiej edycji warsztatów Wandering Seminar, dotyczącymi faktoryzowania wielowymiarowych układów symbolicznych o dostatecznie dużej entropii na pełen układ symboliczny (patrz [JM] i [De]). Podajemy w niej następujący warunek wystarczający na to, by układ symboliczny z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią był rozszerzeniem pełnego shiftu (grupowego).

Definicja 5.15 *Układ symboliczny (X, G) jest* silnie nieprzywiedlny, *gdy istnieje skończony zbiór D taki że dla dowolnych zbiorów skończonych T_1 i T_2 w G, spełniających $T_2 \cap DT_1 = \emptyset$, oraz dowolnych bloków A i B, o dziedzinach T_1 i T_2, istnieje $x \in X$, dla którego $x(T_1) = A$ i $x(T_2) = B$.*

Twierdzenie 5.16 *Jeśli układ symboliczny (X, G) jest silnie nieprzywiedlny i ma entropię topologiczną większą niż $\log k$, to istnieje rozszerzenie symboliczne $(\tilde{X}, G)$ układu (X, G), o tej samej entropii, takie że $(\tilde{X}, G)$ faktoryzuje się na pełen układ symboliczny o k symbolach.*

5.8 B. Frej, *Exploding Markov operators*, w recenzji

Jest to kontynuacja badań dotyczących dynamiki operatorowej. Praca ta zawiera bazującą na pojęciu dezintegracji miary konstrukcję operatorów podwójnie stochastycznych, pochodzących od transformacji punktowych w inny sposób niż operatory Koopmana. Niech (X, Σ, μ) będzie standardową przestrzenią probabilistyczną, a $T : X \to X$ zachowującą miarę surjekcją. Dla ciągu malejącego (a_n), sumującego się do jedynki, definiujemy miarę m na $\mathbb{N}$ kładąc $m(\{k\}) = a_k$. Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ niech ξ_k będzie rozbiciem X na zbiory $T^{-k}\{T^k x\}$, $x \in X$, i niech $\xi_k(x)$ oznacza element rozbicia ξ_k zawierający x. Niech $\{\mu_C : C \in \xi_k\}$ będzie dezintegracją miary μ względem X/ξ_k. Ponadto zdefiniujmy ciąg (b_k) wzorem $b_k = \frac{a_k - a_{k+1}}{a_1}$. Niech $A|_k$ oznacza cięcie $\{x \in X : (x, k) \in A\}$. Wtedy definiujemy operator podwójnie stochastyczny na $L^1(X \times \mathbb{N}, \mu \times m)$ kładąc

$$\Upsilon_T f(y) = \int f(u) P_T(y, du),$$

gdzie P_T jest prawdopodobieństwem przejścia określonym jako

$$\begin{aligned} P_T\big((x,1),A\big) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mu_{\xi_k(x)}(T^{-1}A|_k) \\ P_T\big((x,k),A\big) &= \delta_{(Tx,k-1)}(A) \qquad \text{dla } k \geqslant 2. \end{aligned}$$

W pracy dowodzi się, że operator taki dziedziczy pewne cechy transformacji, od której pochodzi: jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy transformacja jest ergodyczna, a także ma dodatnią entropię, gdy transformacja T ma dodatnią entropię. Pomimo dodatniości entropii, może jednak nie mieć żadnych faktorów punktowych.

5.9 B. Frej, *I jeszcze jeden, i jeszcze raz.* Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie 41 (VII 2008)

Ta krótka praca to pokłosie zaproszenia na konferencję z cyklu *Szkoła Matematyki Poglądowej* i zainteresowania zjawiskiem powracania dla operatorów Markowa. Praca zawiera wykład na temat związków twierdzenia van der Waerdena o monochromatycznych postępach arytmetycznych z twierdzeniem Birkhoffa o wielopowracaniu w topologicznych układach dynamicznych z komutującymi homeomorfizmami. Przedstawiony jest w niej błyskotliwy dowód twierdzenia Birkhoffa pochodzący z pracy [BPT]. Niestety, próba przełożenia tego dowodu na język dynamiki zadanej przez prawdopodobieństwa przejścia nie przyniosła spodziewanych rezultatów. Praca nie zawiera wyników nowych.

5.10 Matematyka Reaktywacja

W latach 2010–2014 zostałem zaproszony do uczestnictwa w projekcie stworzenia interaktywnego komputerowego kursu z matematyki, znanego szerzej pod nazwą Matematyka Reaktywacja, skierowanego do uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Projekt ten finansowany był ze środków Unii Europejskiej w ramach priorytetu III Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki – *Wysoka jakość systemu oświaty*, a kierował nim docent Jędrzej Wierzejewski, jeden z prekursorów e-learningu w Polsce. Celem było stworzenie atrakcyjnej platformy e-learningowej, która zachęcałaby uczniów do samodzielnej pracy nad matematyką, a nauczycielom dała wygodne narzędzie dydaktyczne. Powstały zarówno zasoby wiedzy, jak i pokaźny zbiór zadań interaktywnych (tzw. e-zadań), pozwalający uczniom samodzielnie ćwiczyć materiał poznawany na lekcji. Prócz tego, platforma pozwalała na przeprowadzanie sprawdzianów z wykorzystaniem terminala komputerowego. Moja rola polegała na aktywnym uczestnictwie w tworzeniu zasobów, głównie e-zadań, począwszy od etapu powstania prototypów zadań. Każde e-zadanie należało zweryfikować pod kątem poprawności sformułowania treści i działania, a także zaproponować odpowiednie modyfikacje i ulepszenia. Zdobyte doświadczenia wykorzystywałem również w roli koordynatora ds. e-learningu w Instytucie Matematyki.

Program był wprowadzany w kilku wrocławskich szkołach.

Literatura

[A1] B. Frej, *Maličky-Riečan's entropy as a version of operator entropy.* Fund. Math. 189 (2) (2006), 185–193.

[A2] B. Frej, P. Frej, *An integral formula for entropy of doubly stochastic operators.* Fund. Math. 213 (3) (2011), 271–289.

[A3] B. Frej, P. Frej, *The Shannon-McMillan theorem for doubly stochastic operators.* Nonlinearity 25 (12) (2012), 3453–3467.

[A4] B. Frej, D. Huczek, *Doubly stochastic operators with zero entropy.* Ann. Funct. Anal. 10 (1) 2019, 144–156.

[AAFT] R. Alicki, J. Andries, M. Fannes and P. Tuyls, *An algebraic approach to the Kolmogorov-Sinai entropy*, Rev. Math. Phys., 8 (1996), 167–184.

[Au] T. Austin, *Entropy of probability kernels from the backward tail boundary.* Studia Math. 227 (2015), 249–257.

[BPT] A. Błaszczyk, S. Plewik and S. Turek, *Topological multidimensional van der Waerden theorem.* Comment. Math. Univ. Carolinae 30 (1989), 783–787.

[B] L. Bowen, *Zero entropy is generic.* Entropy 18(6), 220 (2016).

[CO] R.V. Chacon and D.S. Ornstein, *A general ergodic theorem.* Illinois J. Math. 4 (1960), no. 2, 153–160.

[De] A. Desai, *A class of $\mathbb{Z}^d$ shifts of finite type which factors onto lower entropy full shifts*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 27, no. 8 (2009), 2613-2621.

[D1] T. Downarowicz, *Minimal models for noninvertible and not uniquely ergodic systems.* Israel J. Math. 156 (2006), 93–110.

[D2] T. Downarowicz, *Faces of simplexes of invariant measures.* Israel J. Math. 165 (2008), 189–210.

[D3] T. Downarowicz, *Entropy in Dynamical Systems*, Cambridge University Press 2011.

[DF] T. Downarowicz and B. Frej, *Measure-theoretic and topological entropy of operators on function spaces.* Ergodic Theory Dynam.Systems 25 (2005), no. 2, 455–481.

[DH] T. Downarowicz and D. Huczek, *Dynamical quasitilings of amenable groups.* arXiv:1705.07365 [math.DS].

[DHZ] T. Downarowicz, D. Huczek and G. Zhang, *Tilings of amenable groups.* J. Reine. Angew. Math. (2016) doi:10.1515/crelle-2016-0025.

[EFHN] T. Eisner, B. Farkas, M. Haasse and R. Nagel, *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory.* Graduate Texts in Mathematics, Springer 2015.

[E] R. Ellis, *Locally compact transformation groups.* Duke Math. J. 24 (1957), 119–125.

[F] S. Foguel, *The Ergodic Theory of Markov Processes.* Van Nostrand 1969.

[FW] M. Foreman and B. Weiss, *An anti-classification theorem for ergodic measure preserving transformations.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 6(3) (2004), 277–292.

[Fo] A. Forrest, *A Bratteli diagram for commuting homeomorphisms of the Cantor set*, Internat. J. Math. 11 (2000), 177–200.

[Fr] P. Frej, *Entropy of a doubly stochastic Markov operator and of its shift on the space of trajectories.* Coll. Math. 126(2) (2012), 205–216

[GLW] E. Ghys, R. Langevin and P.G. Walczak, *Entropie mesurée et partitions de l'unité.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 303 (1986), 251–254

[GMPS1] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau *Orbit equivalence for Cantor minimal $\mathbb{Z}^2$-systems*, J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), 863–892.

[GMPS2] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau *Orbit equivalence for Cantor minimal $\mathbb{Z}^d$-systems*, Invent. Math. 179 (2010), 119–158.

[GW] E. Glasner and B. Weiss, *The topological Rohlin property and topological entropy.* Amer. J. Math., 123 (6) (2001), 1055–1070.

[HvN] P.R. Halmos and J. von Neumann, *Operator methods in classical mechanics,II*, Ann. of Math. 43 (2) (1942), 332–350.

[IT] C.T. Ionescu Tulcea, *Mesures dans les espaces produits.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. 7 (1949), 208–211.

[I] A. Iwanik, *Integral representations of stochastic kernels*, in: Aspects of Positivity in Functional Analysis (Tübingen, 1985), Elsevier Sci. Publ. (North-Holland), 1986, 223–230.

[J] R. Jewett, *The prevalence of uniquely ergodic systems.* J. Math. Mech. 19 (1969/1970), 717–729.

[JM] A. Johnson and K. Madden, *Factoring higher-dimensional shifts of finite type onto the full shift*, Ergodic Theory Dynam. Systems 25 (2005), 811–822.

[KS] B. Kamiński and J. de Sam Lazaro, *A note on the entropy of a doubly stochastic operator*, Colloq. Math. 84/85 (2000), 1, 245–254.

[KL] D. Kerr and H. Li, *Ergodic Theory: Independence and Dichotomies.* Springer-Verlag, NewYork 2016.

[KO] I. Kornfeld and N. Ormes,*Topological realizations of families of ergodic automorphisms, multitowers and orbit equivalence.* Israel J. Math. 155 (2006), 335–357.

[Kr] W. Krieger, *On unique ergodicity*, Proc. of the 6th Berkeley symposium on Math., Stat. and Probability, vol. II, University of California Press, 1972, 327-346.

[K] A.G. Kushnirenko, *On metric invariants of entropy type.* Uspekhi Mat. Nauk, 1967, 22, 5(137), p.57–66 (In Russian); Translation: Russian Math. Surveys, 22 (5), 53–61, 1967.

[LM] A. Lasota and M. Mackey, *Chaos, fractals and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics.* Springer-Verlag, New York 1994.

[L] E. Lindenstrauss, *Pointwise theorems for amenable groups.* Electronic Research Announcements of AMS, vol. 5 (1999), 82–90.

[M] I.I. Makarov, *Dynamical entropy for Markov operators*, J.Dyn.Control Syst. 6 (2000), No. 1, 1–11.

[MR] P. Maličky and B. Riečan, *On the entropy of dynamical systems*, Proceedings of the conference on ergodic theory and related topics II (Georgenthal, 1986), Teubner-Texte Math., 94, Teubner, Leipzig, 1987, pp.135–138.

[NF] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North-Holland, Budapest 1970.

[Pa] G. Palm, *Entropie und Erzeuger in dynamischen Verbänden.* Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verw. Gebiete 36 (1976), 27–45.

[P] K. Petersen, *Ergodic Theory.* Cambridge University Press, Cambridge 1983.

[Ph] R.R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem.* Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey 1966.

[R] V.A. Rohlin, *Entropy of metric automorphism.* Dokl. Akad. Nauk. 124 (1959), 980–983.

[S] B. Seward, *Weak containment and Rokhlin entropy.* arXiv:1602.06680 [math.DS]

[V] A. Vershik, *What does a typical Markov operator look like*, St. Petersburg Math. J., 17 (5) (2006), 763–772.