Autoreferat

1. Imię i nazwisko:

Irmina Czarna

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe - z podaniem nazwy miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

2006 dyplom magistra matematyki,
Instytut Matematyczny, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski, praca magisterska *Stochastyczne równania różniczkowe w modelowaniu zjawisk finansowych* napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Ewy Damek.

2011 dyplom doktora nauk matematycznych,
Instytut Matematyczny, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski, rozprawa doktorska *Problemy dywidend i ruiny dla jedno i wielowymiarowych procesów Lévy'ego* napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Zbigniewa Palmowskiego.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2011 – 2012	asystent w Instytucie Matematycznym, Uniwersytet Wrocławski
2012 – 2017	adiunkt w Instytucie Matematycznym, Uniwersytet Wrocławski
2017 – obecnie	adiunkt na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej

4. Wskazanie osiągnięcia uzyskanego zgodnie z art. 16. ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

(a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Teoria fluktuacji dla procesów Lévy'ego zależnych od poziomu i zagadnienie paryskiego opóźnienia

(b) Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

[H1] R. Loeffen, I. Czarna, Z. Palmowski, *Parisian ruin probability for spectrally negative Lévy processes*, Bernoulli. 2013, vol. 19, nr 2, s. 599–609.

[H2] I. Czarna, *Parisian ruin probability with a lower ultimate bankrupt barrier*, Scandinavian Actuarial Journal. 2016, vol. 2016, nr 4, s. 319–337.

[H3] M. A. Lkabous, I. Czarna, J-F. Renaud, *Parisian ruin for a refracted Lévy process*, Insurance Mathematics and Economics. 2017, vol. 74, s. 153–163.

[H4] I. Czarna, J.-L. Pérez, T. Rolski, K. Yamazaki, *Fluctuation theory for level-dependent Lévy risk processes*, Stochastic Processes and their Applications. DOI:10.1016/j.spa.2019.03.006

(c) Omówienie celu wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Wstęp

Procesy Lévy'ego mogą być postrzegane jako naturalne uogólnienie spacerów losowych do procesów z ciągłym parametrem czasowym, a tym samym stanowią ważną podklasę procesów Markowa. Najbardziej znanymi przykładami tychże procesów są proces Wienera, złożony proces Poissona czy proces Cauchy'ego. Dodatkowo niektóre rezultaty otrzymane dla procesów Lévy'ego mogą być wykorzystane do stawiania hipotez i sprawdzania własności dla ogólniejszych klas procesów. Oznacza to, że procesy Lévy'ego mogą być traktowane jako swego rodzaju klasa „doświadczalna" dla teorii procesów Fellera czy jeszcze ogólniej dla procesów Markowa. Ponadto procesy Lévy'ego znajdują swoje zastosowanie w modelowaniu m.in. zjawisk fizycznych, ubezpieczeniowych czy ekonomicznych, dzięki czemu literatura poświęcona tymże procesom jest obecnie bardzo bogata [1, 3, 4, 12, 28, 39].

Głównym celem osiągnięcia naukowego było stworzenie ogólnej teorii fluktuacji dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego zależnych od poziomu, które są definiowane jako mocne rozwiązanie pewnego stochastycznego równania różniczkowego oraz są uogólnieniem procesów Lévy'ego do procesów Fellera. Przykładami takich procesów są oczywiście procesy Lévy'ego, tzw. procesy załamane (*refracted Lévy processes*) rozważane w literaturze przez [24, 25, 33, 48] oraz uogólniony proces Ornsteina-Uhlenbecka zabijany w momencie zejścia poniżej pewnego ustalonego poziomu, który (także bez owego zabijania) był wcześniej badany w pracach [27, 40, 46, 47].

Prace [H1]-[H3] badają prawdopodobieństwo ruiny i tożsamości fluktuacyjne dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego i załamanych procesów Lévy'ego, gdzie motywem przewodnim było rozważanie tzw. paryskiego opóźnienia. Paryskie opóźnienie oznacza zadany z góry, deterministyczny czas $d \geq 0$, przez który badany proces musi znajdować się w określonym położeniu: na przykład powyżej/poniżej pewnego poziomu (tak zwanej bariery). Zauważmy, że przypadek $d = 0$ oznacza brak opóźnienia, czyli klasyczną teorię, która w przypadku procesów Lévy'ego jest dobrze znana w literaturze [7, 31, 36]. Jak się okazuje, zagadnienia związane z paryskim opóźnieniem cały czas cieszą się sporą popularnością, a mnogość nowych problemów nie wyczerpała jeszcze tematu paryskiego opóźnienia w teorii ryzyka. Świadczą o tym liczne prace powstałe w ostatnim czasie (zob. [6, 18, 23, 44, 45, 51]).

Przedstawione osiągnięcie naukowe dotyczy ogólnej klasy spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego zależnych od poziomu, które w zależności od rozważanych parametrów mogą być procesami Lévy'ego, załamanymi oraz wielokrotnie załamanymi procesami Lévy'ego. Ich własności zostały zbadane za pomocą technik teorii fluktuacji procesów Lévy'ego, m.in. funkcji skalujących oraz technik związanych z teorią wycieczek dla procesów Lévy'ego. W pracy [H1] został udowodniony wzór na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla dowolnego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego. Kluczowym pomysłem było zastosowanie formuły Kendalla i dzięki temu odwrócenie transformaty Laplace'a związanej z wycieczką poniżej poziomu zero rozważanego procesu. Należy dodać, że otrzymane w pracy wyrażenie na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny jest kompaktowe i nie zależy od rodzaju wahania rozważanego procesu Lévy'ego. To sprawiło, że metody dowodowe zastosowane w pracy [H1] zostały później wykorzystane przez innych autorów do uzyskania rezultatów związanych z paryskim opóźnieniem w różnych modelach (zob. [6, 45, 51]). Te badania stały się motywacją do rozważenia modelu paryskiego opóźnienia z dodatkową barierą na pewnym ustalonym poziomie $-a < 0$ (praca [H2]). Powyższy model jest ciekawy z punktu widzenia zastosowań, ponieważ lepiej modeluje rzeczywistość i w przypadku, gdy wycieczka poniżej zera dla rozważanego procesu jest zbyt głęboka (tzn. większa niż poziom a) to ruina następuje automatycznie. Natomiast z matematycznego punktu widzenia model jest bardziej skomplikowany obliczeniowo i dowodowo. Dodatkowo w pracy [H2] nie tylko wyprowadzono wzór na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny z tzw. dolną barierą na poziomie $-a < 0$, ale także wyznaczono asymptotyki tego prawdopodobieństwa, zarówno lekko- jak i ciężkoogonowe. Praca [H3] uogólnia rezultat otrzymany w [H1] na przypadek tzw. załamanego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego, który jest definiowany jako mocne rozwiązanie pewnego stochastycznego równania różniczkowego. Ponadto w pracy [H3] oprócz prawdopodobieństwa paryskiej ruiny otrzymano formuły na jedno- i dwustronne problemy wyjścia dla tego procesu rozważanego z paryskim opóźnieniem. Techniki dowodowe zastosowane w tej pracy wykorzystują wzór Kendalla, teorię funkcji skalujących oraz wycieczek dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego. Zwieńczeniem tych badań jest praca [H4], w której rozważa się ogólną rodzinę procesów Lévy'ego zależnych od poziomu będących procesami Fellera. W pracy uzyskano formuły na jedno- i dwustronne problemy wyjścia oraz rezolwenty, czyli miary oczekiwanych czasów przebywania procesu w pewnym zbiorze borelowskim. Wyrażenia te zostały przedstawione za pomocą nowych funkcji skalujących, które jak udowodniono spełniają pewne równania całkowe typu Volterry.

Podsumowując, poniżej prezentujemy najważniejsze rezulaty uzyskane w pracach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

- W pracy [H1] badano prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla dowolnego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego. Otrzymano zwarty wzór na owo prawdopodobieństwo, który został wyrażony w języku funkcji skalującej rozważanego procesu oraz za pomocą rozkładu tego procesu w chwili d.

- Praca [H2] dotyczy zagadnienia prawdopodobieństwa ruiny z paryskim opóźnieniem oraz z tzw. dolną barierą. Dla dowolnego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego wyznaczono wzór na powyższe prawdopodobieństwo oraz dodatkowo otrzymano lekko- i ciężkoogonowe asymptotyki dla tego modelu.

- W pracy [H3] znaleziono wzór na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla tzw. załamanego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego. Ponadto otrzymano formuły na jedno- i dwustronne problemy wyjścia dla tego procesu rozważanego z paryskim opóźnieniem.

- Praca [H4] dotyczy teorii fluktuacji dla ogólnej klasy tzw. procesów Lévy'ego zależnych od poziomu. Głównym rezultatem pracy [H4] jest dowód istnienia, charakterystyka i otrzymane formuły na rezolwenty oraz jedno- i dwustronne problemy wyjścia dla tychże procesów. W tej pracy tożsamości fluktuacyjne zostały otrzymane w przypadku, gdy paryskie opóźnienie d wynosi zero.

Zanim przejdziemy do dokładnego opisu powyższych wyników przedstawimy podstawowe definicje, wzory oraz własności trajektorii procesów Lévy'ego, które były wykorzystywane w omawianych pracach. Bardziej kompletne i pełne opracowania można znaleźć w książkach [7, 31].

Procesy Lévy'ego i teoria ryzyka

Niech $X = \{X_t, t \geq 0\}$ będzie procesem Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}$, zdefiniowanym na przestrzeni probabilitycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, \mathbb{P})$, tzn. X jest procesem stochastycznym o stacjonarnych niezależnych przyrostach oraz trajektoriach typu càdlàg. Ponadto będziemy używać następującej notacji: oznaczymy przez $\mathbb{P}_x$ rozkład X, gdy $X_0 = x$, a odpowiadającą wartość oczekiwaną przez $\mathbb{E}_x$. Dodatkowo będziemy pisać $\mathbb{P}$ oraz $\mathbb{E}$, gdy $x = 0$.

Trójka Lévy'ego dla procesu X jest zadana przez (γ, σ, Π), gdzie $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ oraz Π jest miarą określoną na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ spełniającą warunek $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$, zwaną miarą Lévy'ego procesu X.

Procesy te są scharakteryzowane przez formułę Lévy'ego–Chinczyna, gdzie dla $\theta \in \mathbb{R}$

$$\Psi(\theta) = -\log \mathbb{E}[e^{i\theta X_1}] = -i\gamma\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{-i\theta x} - i\theta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(dx)$$

jest wykładnikiem charakterystycznym procesu X. Jeśli dodatkowo założymy, że proces X jest spektralnie jednostronny, na przykład spektralnie ujemny (tzn. miara Π jest skoncentrowana na półprostej ujemnej), to jego wykładnik Laplace'a ψ jest wtedy dobrze określony i zadany w następujący sposób

$$\psi(\theta) = -\Psi(-i\theta) = \log \mathbb{E}[e^{\theta X_1}] = \gamma\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{(-\infty,0)}(e^{\theta x} - 1 - \theta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(dx)$$

dla wszystkich $\theta \geq 0$. Ponadto $\Phi(q) = \sup\{\beta \geq 0 : \psi(\beta) = q\}$ to funkcja prawostronnie odwrotna do ψ.

Ze względu na wahanie trajektorii procesy Lévy'ego możemy podzielić na dwie rozłączne klasy: procesy o wahaniu ograniczonym i nieograniczonym. Procesy spektralnie ujemne o wahaniu ograniczonym, to takie, że $\int_{(-1,0)} x\Pi(dx) < \infty$ oraz $\sigma = 0$. Można je przedstawić w postaci

$$X_t = x + pt - S_t,$$

gdzie proces S_t to czysty subordynator (tj. proces o niemalejących trajektoriach) bez dryfu, natomiast $p = \gamma + \int_{(-1,0)} x\Pi(dx) > 0$. W teorii ryzyka klasycznym przykładem takiego procesu jest proces Craméra–Lundberga, który jest zadany następującym wzorem

$$X_t = x + pt - \sum_{k=1}^{N_t} C_k, \tag{1}$$

gdzie proces $\{N_t\}_{t\geq 0}$ to jednorodny proces Poissona z intensywnością λ, a nieujemne zmienne losowe C_k są i.i.d. oraz są niezależne z procesem N.

Zdefiniujmy teraz za pomocą tzw. transformaty Esshera następującą wykładniczą zamianę miary:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_x^c}{d\mathbb{P}_x}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\{c(X_t - X_0) - \psi(c)t\} \tag{2}$$

dla dowolnego c takiego, że $\mathbb{E}e^{cX_1} < \infty$. Z ogólnej teorii procesów Lévy'ego (zob. [7, 31]) wiadomo, że proces X względem $\mathbb{P}_x^c$ nadal jest spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego z wykładnikiem Laplace'a postaci:

$$\psi_c(\theta) = \psi(\theta + c) - \psi(c) \quad \text{dla } \theta \geq -c.$$

Powyższy fakt odgrywa kluczową rolę w analizie modeli ubezpieczeniowych, które są konstruowane w oparciu o spektralnie ujemne procesy Lévy'ego. Dla przykładu, za pomocą wykładniczej zamiany miary (2) dowodzone są wyrażenia na transformaty Laplace'a związane z pierwszymi czasami wyjścia procesu z pewnego zbioru.

Większość wyników rozprawy dotyczy zagadnień związanych z teorią fluktuacji dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego i spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego zależnych od poziomu. W tej teorii w przypadku procesów Lévy'ego istotną rolę pełnią tak zwane funkcje skalujące.

Definicja **1.** *Dla spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego X oraz $q \geq 0$, funkcję skalującą $W^{(q)} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ określamy następująco: dla wszystkich $x < 0$ mamy $W^{(q)}(x) = 0$ oraz dla wszystkich $x \geq 0$, funkcja $W^{(q)}$ jest ciągła, ściśle rosnąca, a jej transformata Laplace'a wynosi*

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} W^{(q)}(x)dx = (\psi(\theta) - q)^{-1}, \quad \theta > \Phi(q). \tag{3}$$

Tak zdefiniowaną funkcję nazywamy także funkcją skalującą pierwszego rodzaju lub funkcją q-skalującą. Natomiast dla $q = 0$ używamy zapisu $W^{(q)} = W$.

Funkcja skalująca $W^{(q)}$ pojawia się klasycznie jako rozwiązanie tak zwanego dwustronnego problemu wyjścia z odcinka $[0, a]$, który w literaturze ma długą historię (zob. [7, 30, 49]). Niech $\tau_0^- = \inf\{t > 0 : X_t < 0\}$ oraz $\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : X_t > a\}$. Czas zatrzymania τ_0^- w zastosowaniach ubezpieczeniowo-aktuarialnych nazywany jest momentem ruiny. Wtedy dla dowolnego $q \geq 0$ oraz $0 \leq x \leq a$ zachodzi

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbf{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}}\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}.$$

To właśnie prawa strona powyższej tożsamości jest źródłem nazwy *funkcja skalująca* dla $W^{(q)}$. Warto tutaj wspomnieć, że dla wybranych procesów Lévy'ego (jak na przykład ruch Browna z dryfem czy proces Craméra–Lundberga z wykładniczymi skokami) postać funkcji $W^{(q)}$ można wyznaczyć *explicite* (zob. [36, H1]). Kolejną funkcją pojawiającą się w tożsamościach fluktuacyjnych dla procesów Lévy'ego jest tak zwana druga funkcja skalująca $Z^{(q)}$.

Definicja **2.** *Dla dowolnego $q \geq 0$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy*

$$Z^{(q)}(x) = 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)dy.$$

Ponieważ w teorii fluktuacji większość tożsamości wyrażana jest za pomocą tychże funkcji, ich własności były szeroko badane w literaturze (zob. [10, 31, 32, 34, 36]). I tak na przykład rozwiązanie jednostronnego problemu wyjścia z półprostej dodatniej dla spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego dla $q \geq 0$ oraz $x \geq 0$ jest postaci

$$\mathbb{E}_x[e^{-q\tau_0^-}\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}] = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x).$$

Iloraz $\frac{q}{\Phi(q)}$ dąży do $\psi'(0+)$, gdy $q \downarrow 0$, stąd w przypadku gdy $q = 0$ otrzymujemy poniższy wzór na prawdopodobieństwo ruiny

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = \begin{cases} 1 - \psi'(0+)W(x) & \text{dla } \psi'(0+) > 0 \\ 1 & \text{dla } \psi'(0+) \leq 0. \end{cases} \tag{4}$$

W teorii ryzyka podstawową charakterystyką jest właśnie powyższe prawdopodobieństwo ruiny $\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty)$, które jest traktowane jako pewna miara ryzyka i stanowi ważny składnik uwzględniany przy wyliczaniu składki ubezpieczeniowej. Liczba artykułów zajmujących się tą tematyką jest ogromna, wystarczy wspomnieć książki Rolskiego i in. [50] oraz Asmussena [2, 3] i referencje tam zawarte. W artykułach [13] oraz [H1] uogólniono pojęcie ruiny do tzw. paryskiej ruiny, która pojawia się, kiedy proces pozostaje poniżej zera dłużej niż ustalony horyzont czasowy $d > 0$ (zob. Rys. 1). Formalnie definiujemy paryski moment zatrzymania w następujący sposób:

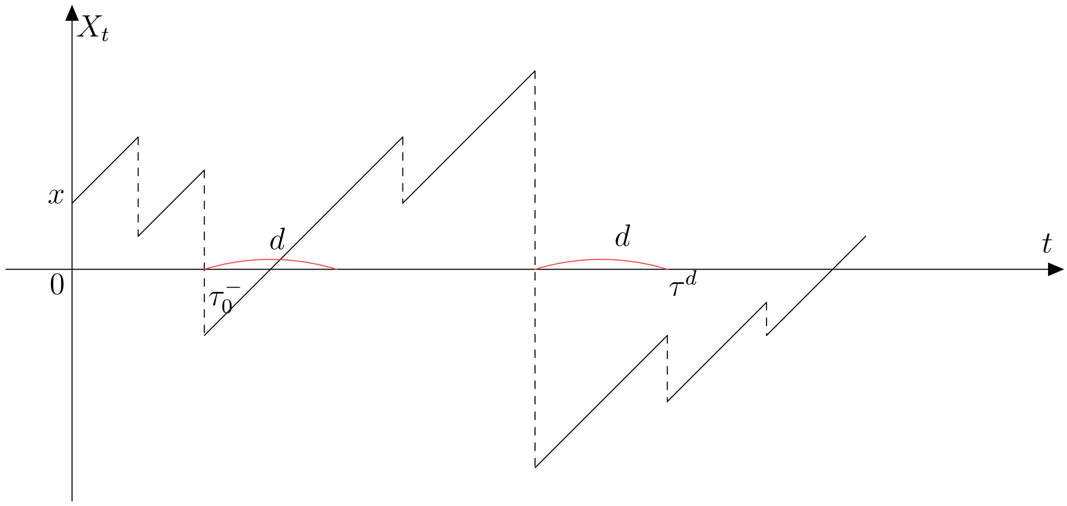
$$\tau^d = \inf\{t > 0 : t - \sup\{s < t : X_s \geq 0\} \geq d, X_t < 0\},$$

zaś prawdopodobieństwo paryskiej ruiny jest wtedy dane przez:

$$\mathbb{P}(\tau^d < \infty | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(\tau^d < \infty).$$

Zauważmy, że przypadek $d = 0$ odpowiada klasycznej ruinie.

Nazwa „paryska ruina” pochodzi od paryskiej opcji, która jest wykonywana, jeśli cena akcji pozostaje powyżej lub poniżej wcześniej określonej kwoty, dłużej niż ustalony horyzont czasowy (zob. [11, 15, 16, 17]). Rozważanie paryskiej ruiny jest jak najbardziej uzasadnione ekonomicznie. Pozwala ono bowiem modelować możliwość przetrwania firmy ubezpieczeniowej pomimo ujemnych rezerw, które dopuszczamy tylko na ustalonym, skończonym horyzoncie czasowym. Dlatego wyżej przedstawiony problem okazał się zarówno ciekawy z punktu widzenia ekonomicznego, jak i matematycznego.



Rys.1. Przykładowa trajektoria procesu X oraz momenty klasycznej i paryskiej ruiny.

Rozwijając dalej tę teorię w pracy [H2], zdefiniowano tzw. paryskie opóźnienie z dolną barierą $-a$ w następujący sposób:

$$\kappa^{d,a} = \min(\tau^d, \tau_{-a}^-),$$

gdzie $\tau_{-a}^- = \inf\{t \geq 0 : X_t < -a\}$. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny jest dane przez:

$$\mathbb{P}(\kappa^{d,a} < \infty | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(\kappa^{d,a} < \infty).$$

Jak się okazuje, tak zdefiniowany moment paryskiej ruiny dodatkowo z dolną barierą w pewnych sytuacjach lepiej modeluje rzeczywistość. Możemy to rozumieć w ten sposób, że paryskie opóźnienie będziemy stosować tylko dla firm, których poziom bankructwa nie jest zbyt duży, tzn. większy od pewnego ustalonego poziomu $-a < 0$. Matematycznie przyjmujemy, że taka ruina zachodzi, kiedy rozważany proces X znajdzie się poniżej zera dłużej niż pewien ustalony horyzont czasowy $d > 0$ lub gdy proces Lévy'ego znajdzie się poniżej tzw. dolnej bariery, która jest na pewnym ustalonym poziomie $-a < 0$.

Ponadto w pracy [H2] w celu uzyskania asymptotyk, gdy $x \to \infty$, dla powyższego prawdopodobieństwa, rozważano proces dualny do procesu X, czyli w tym przypadku $\widehat{X} = -X$, który jest procesem spektralnie dodatnim z miarą Lévy'ego zadaną przez $\Pi_{\widehat{X}}(dy) = \Pi_X(-dy)$.

Wszystkie obiekty charakteryzujące proces $\widehat{X}$ będą oznaczane przy użyciu „daszka” nad istniejącą już notacją dotyczącą procesu X. Dla procesu X zdefiniujmy proces drabinowy $(L^{-1}, H) = \{(L_t^{-1}, H_t)\}_{t\geq 0}$:

$$L_t^{-1} := \begin{cases} \inf\{s > 0 : L_s > t\} & \text{gdy } t < L_\infty \\ \infty & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz

$$H_t := \begin{cases} X_{L_t^{-1}} & \text{gdy } t < L_\infty \\ \infty & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $L = \{L_t\}_{t\geq 0}$ jest tzw. czasem lokalnym w maksiumum (patrz [31, str. 140]). Przypomnijmy, że (L^{-1}, H) jest dwuwymiarowym subordynatorem z wykładnikiem Laplace'a $\kappa(\theta, \beta) = -\log \mathbb{E}\left(e^{-\theta L_1^{-1} - \beta H_1} \mathbf{1}_{\{1 \leq L_\infty\}}\right)$ oraz z miarą Lévy'ego, którą będziemy oznaczać przez Π_H. Dla procesu dualnego $\widehat{X}$ zdefiniujmy malejący proces drabinowy przez $(\widehat{L}^{-1}, \widehat{H}) = \{(\widehat{L}_t^{-1}, \widehat{H}_t)\}_{t\geq 0}$, z wykładnikiem Laplace'a $\widehat{\kappa}(\theta, \beta)$. Dodatkowo zauważmy, że $\widehat{L}_\infty$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\widehat{\kappa}(0, 0)$, gdy $\widehat{\kappa}(0, 0) > 0$ (patrz [31, str. 152]). Ponadto z faktoryzacji Wienera-Hopfa wynika, że:

$$\kappa(\theta, \beta) = \Phi(\theta) + \beta, \qquad \widehat{\kappa}(\theta, \beta) = \frac{\theta - \psi(\beta)}{\Phi(\theta) - \beta};$$

patrz [31, str. 169-170]. Stąd $\widehat{\kappa}(0, 0) = \psi'(0+)$.

Teraz zdefiniujmy miarę potencjału $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U}(dx, ds) = \int_0^\infty \mathbb{P}(L_t^{-1} \in ds, H_t \in dx) dt$$

o nośniku na $[0, \infty)^2$, z transformatą Laplace'a $\int_{[0,\infty)^2} e^{-\theta s - \beta x} \mathcal{U}(dx, ds) = 1/\kappa(\theta, \beta)$, a także miarę odnowy

$$U(dx) = \int_{[0,\infty)} \mathcal{U}(dx, ds) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{H_t \in dx\}} dt\right).$$

Dodatkowo, na przykład z [31] wiadomo, że dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego miara odnowy wynosi $U(dx) = dx$. Natomiast miara odnowy $\widehat{U}(dz)$ dla $(\widehat{L}^{-1}, \widehat{H})$ jest zadana przez:

$$\int_0^\infty e^{-\theta z} \widehat{U}(dz) = \frac{\theta}{\psi(\theta)};$$

patrz [31, str. 195].

Prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego (praca [H1])

Badania dotyczące paryskiej ruiny dla dowolnego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego zaczęły się od pracy [13], gdzie otrzymano dwie osobne formuły na owo prawdopodobieństwo w zależności od wahania trajektorii rozważanego procesu.

Twierdzenie 1 (Theorem 1 w [13]). *Prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego wynosi:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau^d < \infty) &= \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty)\mathbb{P}(\tau^d < \infty) \\ &+ \big(1 - \mathbb{P}(\tau^d < \infty)\big) \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_z^+ > d)\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)\end{aligned} \tag{5}$$

oraz

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\theta s} \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_z^+ > s)\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)\, ds \\ &= \frac{1 - \psi'(0+)W(x)}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{\Phi(\theta)x} \left(Z_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)}(x) + \frac{\theta}{\Phi(-\theta)} W_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)}(x) \right),\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $W_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)} = e^{-\Phi(\theta)x}W(x)$ *oraz* $Z_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)} = 1 - \theta \int_0^x e^{-\Phi(\theta)y}W(y)\, dy$ *to funkcje skalujące zdefiniowane względem miary* $\mathbb{P}^{\Phi(\theta)}$ *zadanej przez* (2).

Aby udowodnić wzór (5) należy zastosować mocną własność Markowa. Wtedy na zdarzeniu $\{\tau^d = \infty\}$ daną trajektorię pocesu X, która schodzi poniżej poziomu zero, rozbijamy na dwie części. Pierwsza z nich zaraz po skoku procesu X startuje z pewnego poziomu $-z < 0$, a następnie powraca do zera w sposób ciągły, ponieważ rozważany proces jest spektralnie ujemny. Dodatkowo jest to przypadek, kiedy powrót procesu X do poziomu zero nastąpił w czasie krótszym niż paryskie opóźnienie d. Druga część trajektorii zaczyna się zaraz po wyżej opisanej wycieczce poniżej poziomu zero, w momencie kiedy proces X startuje z zera. Wtedy prawa strona powyższej równości jest częściowo scharakteryzowana przez obiekty, które są już znane w klasycznej teorii ruiny dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego. Są to wzór na prawdopodobieństwo ruiny oraz transformata Laplace'a rozkładu pierwszego momentu dojścia do pewnego zadanego poziomu. Jedyną wielkością, którą należy jeszcze wyznaczyć jest prawdopodobieństwo paryskiej ruiny $\mathbb{P}(\tau^d < \infty)$, gdy proces startuje z $x = 0$. Owo prawdopodobieństwo zostało scharakteryzowane poniżej w Twierdzeniu 2.

Najpierw, dla $\epsilon > 0$ oznaczmy przez $p^+(s) = \mathbb{P}_\epsilon(\tau_0^- < s)$ prawdopodobieństwo, że wycieczka powyżej poziomu 0 jest krótsza niż s. Niech

$$\begin{aligned}p(s,t) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_{z+\epsilon}^+ \le t)\, \mathbb{P}_\epsilon(\tau_0^- < s, -X_{\tau_0^-} \in dz) \\ &\quad + \mathbb{P}(\tau_\epsilon^+ \le t)\mathbb{P}_\epsilon(\tau_0^- < s, X_{\tau_0^-} = 0)\end{aligned}$$

będzie prawdopodobieństwem, że wycieczka powyżej 0 jest krótsza niż s oraz wycieczka poniżej 0 następująca zaraz po niej, jest przesunięta w dół o $-\epsilon$, i jest krótsza niż t. Zauważmy także, że $p^+(s) = p(s, \infty)$. Wtedy możemy napisać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 (Theorem 2 w [13]). *(i) Jeśli X jest procesem o ograniczonym wahaniu, to*

$$\mathbb{P}(\tau^d < \infty) = \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_z^+ > d)\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)}{1 - \rho + \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_z^+ > d)\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)},$$

gdzie $\rho = \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty)$ *oraz*

$$\int_0^\infty e^{-\theta s} \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_z^+ > s)\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)\, ds = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\Phi(\theta)} - \frac{\psi'(0+)}{\theta} \right).$$

(ii) Jeśli X jest procesem o nieograniczonym wahaniu, to

$$\mathbb{P}(\tau^d < \infty) = \lim_{b\to\infty} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{p^+(b) - p(b,d)}{1 - p(b,d)}. \tag{7}$$

W pracy [H1] poprawiono powyższy rezultat, ponieważ odwrócono transformatę Laplace'a (6), dzięki czemu otrzymano jedną zwartą formułę dla dowolnego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego.

Twierdzenie 3 (Theorem 1 w [H1])**.** *Niech $d > 0$. Załóżmy, że $\mathbb{E}[X_1] = \psi'(0+) > 0$. Wtedy dla $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}_x(\tau^d < \infty) = 1 - \mathbb{E}[X_1] \frac{\int_0^\infty W(x+z) z \mathbb{P}(X_d \in \mathrm{d}z)}{\int_0^\infty z \mathbb{P}(X_d \in \mathrm{d}z)}. \tag{8}$$

Jak widać ze wzoru (8) prawdopodobieństwo paryskiej ruiny zostało wyrażone za pomocą rozkładu procesu X w momencie d oraz w języku funkcji skalującej tego procesu, co dla pewnych klas procesów może być wyliczone *explicite*.

Dowód powyższego twierdzenia jest kilkuetapowy. Po pierwsze kluczowy jest tutaj poniższy lemat, który można udowodnić stosując następujący wzór Kendalla (zob. [7] Corollary VII.3): dla miar $\mathbb{P}(\tau_z^+ \in dr)$ oraz $\mathbb{P}(X_r \in dz)$, na $[0,\infty)^2$ zachodzi

$$r\mathbb{P}(\tau_z^+ \in dr)dz = z\mathbb{P}(X_r \in dz)dr.$$

Lemat 1 (Lemma 2 w [H1])**.** *Dla $\theta > 0$,*

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathrm{e}^{\Phi(\theta) X_{\tau_0^-}}\right] = \frac{\theta}{\Phi(\theta)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\Phi(\theta) y} W'(x+y) \mathrm{d}y,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta r} \int_y^\infty \frac{z}{r} \mathbb{P}(X_r \in \mathrm{d}z) \mathrm{d}r = \frac{1}{\Phi(\theta)} \mathrm{e}^{-\Phi(\theta) y}, \quad y \geq 0,$$

$$\int_0^\infty W(z) \frac{z}{r} \mathbb{P}(X_r \in \mathrm{d}z) = 1.$$

Następnie osobno dowodzony jest wzór dla procesów o ograniczonym wahaniu i dalej dla procesów o nieograniczonym wahaniu. W przypadku procesów o ograniczonym wahaniu dowód jest prostszy i opiera się przede wszystkim o mocną własność Markowa i fakt, że procesy Lévy'ego są jednorodne w przestrzeni. Wtedy najpierw wyprowadzany jest wzór na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny, gdy $x = 0$, a następnie dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Jeśli chodzi o przypadek nieograniczonego wahania, dowód głównego twierdzenia pracy [H1] jest bardziej skomplikowany i wymaga użycia argumentu granicznego. Wynika to z faktu, że w tym przypadku 0 jest regularne dla $(-\infty, 0)$ (tzn. $\mathbb{P}(\tau_0^- = 0) = 1$), co razem z (4) daje, że $W(0) = 0$, a wtedy wzór na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla $x = 0$ wymaga aproksymacji. Dlatego w tym przypadku dla $\epsilon \geq 0$ definiujemy czas zatrzymania τ_ϵ^d jako

$$\tau_\epsilon^d = \inf\{t > d : t - g_t^\epsilon > d, X_{t-d} < 0\}, \quad \text{gdzie } g_t^\epsilon = \sup\{0 \leq s \leq t : X_s \geq \epsilon\}.$$

Zauważmy, że czas zatrzymania τ_ϵ^d to pierwszy taki moment, że zdarzy się wycieczka zaczynająca się, gdy proces X znajdzie się poniżej 0, kończąca się przed momentem, gdy X powróci do poziomu ϵ oraz o długości większej niż d. Następnie, dla tak zdefiniowanego czasu zatrzymania, stosując rozumowanie jak w przypadku ograniczonego wahania dostajemy wzór na prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_\epsilon(\tau_\epsilon^d < \infty)$ (w pracy [H1] wzór (13)). Ostatecznie, biorąc $\epsilon \downarrow 0$ otrzymujemy tezę Twierdzenia 3.

Prawdopodobieństwo paryskiej ruiny z dolną barierą bankructwa (praca [H2])

Kolejne naturalne pytanie w kontekście teorii ruiny dotyczy prawdopodobieństwa paryskiej ruiny z tak zwaną dolną barierą bankructwa, zadaną na pewnym poziomie $-a < 0$. Jak już pisano we wstępie, taki model jest interesujący zarówno w punktu widzenia zastosowań, jak i teorii, ponieważ lepiej modeluje rzeczywistość, a ponadto stanowi bardziej skomplikowane zagadnienie z matematycznego punktu widzenia. Formalnie zdefiniujmy następujący moment zatrzymania:

$$\kappa^{d,a} = \min(\tau^d, \tau_{-a}^-),$$

gdzie $\tau_{-a}^- = \inf\{t \geq 0 : X(t) < -a\}$. Celem pracy [H2] było wyrażenie formuły na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny z dolną barierą $\mathbb{P}_x(\kappa^{d,a} < \infty)$ w języku znanych już obiektów z teorii ruiny dla procesów Lévy'ego, m.in. funkcji skalujących. W pracy [H2] otrzymano następujące formuły na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny z dolną barierą.

Twierdzenie 4 (Theorem 1 w [H2]). *Dla $x > 0$:*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x(\kappa^{d,a} < \infty) \\
&\quad = \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) - \mathbb{P}(\kappa^{d,a} = \infty)\left(\int_0^a \mathbb{P}_{a-z}(\tau_a^+ < \min(d, \tau_0^-))\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz) + \frac{\sigma^2}{2}W'(x)\right),
\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - \psi'(0+)W(x)$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\theta s}\int_0^a \mathbb{P}_{a-z}(\tau_a^+ < \min(s, \tau_0^-))\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)\, ds \\
&\quad = \frac{1}{\theta W^{(\theta)}(a)}\int_0^a W^{(\theta)}(a-z)\int_0^x \widehat{U}(x-dy)\int_0^\infty \Pi_{\widehat{X}}(dz+v+y)dv \\
&\quad = \frac{1}{\theta W^{(\theta)}(a)}\int_0^a W^{(\theta)}(a-z)\int_0^x \Pi_X(-dz-y)\left(W(x)-W(x-y)\right)dy.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 5 (Theorem 2 w [H2]). *(i) Jeśli X jest procesem o ograniczonym wahaniu, to*

$$\mathbb{P}(\kappa^{d,a} < \infty) = \frac{\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) - \int_0^a \mathbb{P}_{a-z}(\tau_a^+ < \min(d, \tau_0^-))\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)}{1 - \int_0^a \mathbb{P}_{a-z}(\tau_a^+ < \min(d, \tau_0^-))\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\theta s}\int_0^a \mathbb{P}_{a-z}(\tau_a^+ < \min(s, \tau_0^-))\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)\, ds \\
&\quad = \frac{1}{p\theta W^{(\theta)}(a)}\int_0^a W^{(\theta)}(a-z)\Pi_X(z,\infty)dz.
\end{aligned}$$

(ii) Jeśli X jest procesem o nieograniczonym wahaniu, to

$$\mathbb{P}(\kappa^{d,a} < \infty) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{p^+(\epsilon) - p(d,\epsilon)}{1 - p(d,\epsilon)},$$

gdzie $p^+(\epsilon) = \mathbb{P}_\epsilon(\tau_0^- < \infty)$ oraz

$$\begin{aligned} p(t,\epsilon) = & \int_0^a \mathbb{P}_{a-z}(\tau_{a+\epsilon}^+ < \min(t, \tau_0^-))\, \mathbb{P}_\epsilon(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz) \\ & + \mathbb{P}_a(\tau_{a+\epsilon}^+ < \min(t, \tau_0^-)) \frac{\sigma^2}{2} W'(\epsilon) \end{aligned}$$

jest prawdopodobieństwem, że po raz pierwszy wystąpi wycieczka zaczynająca się, gdy proces X znajdzie się poniżej zera (lub w zerze), ale powyżej $-a$, kończąca się kiedy proces X powróci do poziomu ϵ, o długości krótszej niż t.

Powyższe dwa twierdzenia dowodzone są przez mocną własność Markowa, własności funkcji skalujących oraz jednorodność w przestrzeni procesów Lévy'ego.

Warto tutaj dodać, że dla procesu Wienera z dryfem $X_t = x + pt + \sigma B_t$ wyznaczono powyższe prawdopodobieństwo *explicite* (w pracy [H2] jest to przykład 6.2). Ponadto, rozważano również procesy Craméra–Lundberga z wykładniczymi skokami (1) oraz Craméra-Lundberga z wykładniczymi skokami dodatkowo zaburzanego ruchem Browna (w pracy [H2] są to przykłady 6.1 oraz 6.3). W tych przypadkach dokonano analizy numerycznej dla prawdopodobieństwa paryskiej ruiny z dolną barierą, stosując metodę *fast Fourier transformation* (FFT) dodatkowo wzbogaconą o tzw. „ϵ-algorytm" do przyspieszenia zbieżności nieskończonego szeregu Fouriera. Szczegółowa analiza wraz z wnioskami jest dostępna w pracy [H2] w rozdziale *Examples*.

Ważną częścią tej pracy są rozdziały dotyczące asymptotyk lekko- oraz ciężkoogonowych. Tutaj interesuje nas zachowanie prawdopodobieństwa paryskiej ruiny z dolną barierą bankructwa w przypadku, gdy kapitał początkowy $X_0 = x$ dąży do nieskończoności. W przypadku asymptotyki lekkoogonowej (w pracy [H2] rozdział 4) zakładamy, że spełniony jest warunek Craméra, tzn. istnieje $\gamma > 0$ taka, że

$$\widehat{\psi}(\gamma) = \psi(-\gamma) = 0 \tag{9}$$

oraz funkcja $\widehat{\psi}(\gamma)$ jest skończona w pobliżu γ. Wtedy $\mathbb{E}e^{-\gamma X_1} < \infty$ i możemy zadać miarę $\mathbb{P}^{-\gamma}$ przez (2) (zob. [8]). Zdefiniujmy następnie $\widehat{U}_\gamma(dx) = \widehat{U}_\gamma^{(0)}(dx) := e^{\gamma x}\widehat{U}(dx)$ oraz

$$\mu = \int_0^\infty x \widehat{U}_\gamma^{(1)}(dx),$$

gdzie $\widehat{U}_\gamma^{(q)}(dx) = \int_0^\infty e^{-(qt+\gamma x)}\mathbb{P}(\widehat{H}_t \in dx)dt$ dla $q \geq 0$. Zauważmy, że w pracy [8] udowodniono, że $\widehat{U}_\gamma$ jest funkcją odnowy dla procesu wysokości drabinowej odpowiadającego mierze $\mathbb{P}^{-\gamma}$. Dodatkowo z pracy [8] wiadomo, że

$$\mu = \frac{\partial \widehat{\kappa}_{-\gamma}(0,\beta)}{\partial \beta}|_{\beta=0} = \frac{\partial \widehat{\kappa}(0,\beta)}{\partial \beta}|_{\beta=-\gamma}.$$

Dzięki powyższemu możemy zaprezentować główny rezultat z rozdziału 4 w pracy [H2], który podaje wykładniczą asymptotykę dla prawdopodobieństwa paryskiej ruiny z dolną barierą.

Twierdzenie 6 (Theorem 3 w [H2]). *Załóżmy, że spełniony jest warunek Craméra (9) oraz, że nośnik miary $\widehat{\Pi}$ nie jest kratowy, gdy $\widehat{\Pi}(\mathbb{R}) < \infty$. Wtedy*

$$\lim_{x\uparrow\infty} e^{\gamma x}\mathbb{P}_x(\kappa^{d,a} < \infty) \;=\; \frac{\widehat{\kappa}(0,0)}{\gamma\mu} - \big(1 - \mathbb{P}(\kappa^{d,a} < \infty)\big)\, f^{(c)}(d,a), \tag{10}$$

gdzie

$$\int_0^\infty e^{-\theta s} f^{(c)}(s,a)\, ds = \frac{1}{\mu\theta W^{(\theta)}(a)} \int_0^a W^{(\theta)}(a-z) \int_0^\infty e^{\gamma y} \int_0^\infty \Pi_{\widehat{X}}(dz + \upsilon + y) d\upsilon dy$$

oraz $\mathbb{P}(\kappa^{d,a} < \infty)$ jest dane w Twierdzeniu 5. Jeśli $\mu = \infty$, to przyjmujemy, że lewa strona równania (10) jest równa 0.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się o „kluczowe twierdzenie odnowy”, które mówi, że na półprostej $(0,\infty)$ miara $\widehat{U}_\gamma(dx)$ zbiega słabo do $\mu^{-1}dx$ (zob. [31, str. 188] oraz [8]). Dodatkowo, aby wyznaczyć asymptotykę dla $e^{\gamma x}\mathbb{P}(\widehat{X}_{\tau_x^+} - x \in dz)$, gdy $x \uparrow \infty$ stosujemy twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.

Rezultaty zawarte w rozdziale 5 pracy [H2] dotyczą asymptotyki prawdopodobieństwa paryskiej ruiny z dolną barierą w przypadku, gdy ogon miary Lévy'ego procesu dualnego $\widehat{X}$ należy do klasy $\mathcal{S}^{(\alpha)}$. Oznacza to, że dopuszczamy skoki procesu $\widehat{X}$ mające tzw. ciężkie ogony. Formalnie klasa rozkładów $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ jest zdefiniowana w następujący sposób (zob. [29]):

Definicja **3.** *(Klasa $\mathcal{L}^{(\alpha)}$) Dla $\alpha \geq 0$ mówimy, że miara G na $[0,\infty)$, która ma ogon $\overline{G} = G([0,\infty))$ należy do klasy $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ jeśli*

(i) $\overline{G}(x) > 0$ *dla* $x \geq 0$,

(ii) $\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G}(u-x)}{\overline{G}(u)} = e^{\alpha x}$ *dla $x \in \mathbb{R}$, oraz miara G nie ma kratowego nośnika ,*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{G}(n-1)}{\overline{G}(n)} = e^{\alpha}$, *gdy G ma nośnik kratowy (z rozpiętością kraty równą 1).*

Definicja **4.** *(Klasa $\mathcal{S}^{(\alpha)}$) Mówimy, że G należy do klasy $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ jeśli*

(i) $G \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$,

(ii) dla pewnego $M_0 < \infty$, mamy, że

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G * G}(u)}{\overline{G}(u)} = 2M_0, \tag{11}$$

gdzie $\overline{G * G}(u) = 1 - G * G(u)$ oraz $*$ oznacza splot.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ takiego, że poniższa całka jest skończona, zdefiniujmy funkcję generującą momenty δ taką, że

$$\delta_a(G) = \int_0^\infty e^{au} G(du), \tag{12}$$

gdzie G jest rozkładem pewnej skończonej miary.

Przypomnijmy, że $\widehat{X} = -X$ jest spektralnie dodatnim procesem Lévy'ego. Będziemy dalej zakładać, że dla $\widehat{X}$ oraz dla pewnego ustalonego $\alpha \geq 0$ mamy

(i)

$$\overline{\Pi}_{\widehat{X}} \in \mathcal{S}^{(\alpha)}, \quad \text{gdy} \quad \alpha > 0 \tag{13}$$

oraz

$$\int_0^x \overline{\Pi}_{\widehat{X}}(y)\, dy \in \mathcal{S}^{(0)} \tag{14}$$

(ii)

$$\widehat{\psi}(\alpha) < 0, \quad \text{gdy} \quad \alpha > 0 \tag{15}$$

(iii)

$$e^{-q}\delta_\alpha(\widehat{H}) < 1, \quad \text{gdzie} \quad q = \lim_{\beta \downarrow 0} \frac{-\widehat{\psi}(-\beta)}{\kappa(0,-\beta)} \tag{16}$$

oraz $\delta_\alpha(\widehat{H})$ oznacza funkcję generującą momenty (12) dla rozkładu $\widehat{H}_1$. Z pierwszego warunku wynika, że $\overline{\Pi}_{\widehat{H}} \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$. Warunek (iii) jest niezbędny, gdy $\alpha > 0$. Natomiast dzięki założeniu na dryf, w przypadku, gdy $\alpha = 0$ warunek (iii) jest automatycznie spełniony. Przykładem procesu, który spełnia warunki (13)-(16) jest proces dualny do procesu Craméra–Lundberga (1) ze skokami o rozkładzie Pareto.

Oznaczmy: $f(x) \sim g(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$. Wtedy główny rezultat rozdziału 5 pracy [H2] jest następujący:

Twierdzenie 7 (Theorem 4 w [H2])**.** *Przy założeniach (13)-(16) asymptotyka dla prawdopodobieństwa paryskiej ruiny z dolną barierą wynosi*

$$\mathbb{P}_x(\kappa^{d,a} < \infty) \sim \mathbb{E}X_1 \left(\frac{\alpha}{\widehat{\psi}(\alpha)}\right)^2 \left(1 - (1 - \mathbb{P}(\kappa^{d,a} < \infty)) f^{(e)}(d,a)\right) \int_x^\infty \overline{\Pi}_{\widehat{X}}(y)\, dy,$$

gdzie

$$\int_0^\infty e^{-\theta s} f^{(e)}(s,a)\, ds = \frac{1}{\theta W^{(\theta)}(a)} \int_0^a W^{(\theta)}(a-z) B(z) dz \tag{17}$$

oraz

$$B(z) = \frac{e^{-\alpha z}}{EX_1}\left(-\widehat{\psi}(\alpha) + \alpha \int_z^\infty e^{\alpha y}\overline{\Pi}_{\widehat{X}}(y)\, dy\right).$$

Dla $\alpha = 0$ wielkość $-\widehat{\psi}(\alpha)/\alpha$ jest rozumiana w sensie granicznym i wynosi $-\widehat{\psi}'(0+) = \mathbb{E}X_1$.

Prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla załamanego procesu Lévy'ego (praca [H3])

Kolejną pracą wchodzącą w skład osiągniecia naukowego jest praca [H3] dotycząca prawdopodobieństwa paryskiej ruiny oraz podająca formuły na tożsamości fluktuacyjne dla tzw. załamanego procesu Lévy'ego rozważanego dodatkowo z paryskim opóźnieniem. Załamany proces Lévy'ego (*refracted Lévy process*) po raz pierwszy został szczegółowo scharakteryzowany w pracy [33], gdzie autorzy udowodnili jego istnienie, znaleźli formuły na jednostronne i dwustronne problemy wyścia i podali formuły na rezolwenty. Formalnie załamany proces Lévy'ego jest zdefiniowany jako jedyne mocne rozwiązanie następującego stochastycznego równania różniczkowego:

$$\mathrm{d}U_t = \mathrm{d}X_t - \delta \mathbf{1}_{\{U_t > b\}}\mathrm{d}t, \quad t \geq 0, \tag{18}$$

gdzie $\delta, b \geq 0$, a X to spektralnie ujemny proces Lévy'ego, który modeluje dynamikę procesu U poniżej poziomu b. Dodatkowo z powyższego równania można łatwo zauważyć, że powyżej poziomu b proces U zachowuje sie jak proces $Y = \{Y_t = X_t - \delta t, t \geq 0\}$. Oczywiście proces Y to również proces Lévy'ego o tej samej mierze Lévy'ego co X, ale ze zmienionym dryfem. Dla procesu Y oznaczmy przez $\mathbb{W}^{(q)}$ jego funkcję skalującą, a przez φ wykładnik Laplace'a. W przypadku, gdy $\delta = 0$ dostajemy w trywialny sposób, że $U = X$, co daje, że wszystkie nieznane wcześniej w literaturze tożsamości fluktuacyjne otrzymane dla procesu U rozważanego do momentu paryskiej ruiny są automatycznie rozwiązane dla dowolnego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego X. Wyniki zaprezentowane w pracy [33] wymagały wprowadzenia nowej funkcji skalującej $w^{(q)}$ związanej z procesem U, zdefiniowanej w następujący sposób

DEFINICJA **5.** *Dla $q \geq 0$ oraz $x, z \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, oznaczmy*

$$w^{(q)}(x;z) := W^{(q)}(x-z) + \delta \mathbf{1}_{\{x>b\}} \int_b^x \mathbb{W}^{(q)}(x-y) W^{(q)\prime}(y-z)dy. \tag{19}$$

Ponadto, gdy $x \leq b$ mamy

$$w^{(q)}(x;z) = W^{(q)}(x-z).$$

Dodatkowo dla $q = 0$, będziemy używać zapisu $w^{(0)}(x;z) = w(x;z)$.

W pracy [H3] przyjęto, że $b = 0$. Z punktu widzenia interpretacji ubezpieczeniowo-ekonomicznej oznacza to, że gdy firma jest dobrej kondycji finansowej, tj. proces U znajduje się powyżej poziomu 0, wtedy część wpływów ze składek (z pewną intensywnością $\delta > 0$) jest przeznaczana na rozwój czy modernizację firmy. Owe wypłaty mogą też być rozumiane jako pewien stały podatek dochodowy, który firma wtedy płaci. Inaczej jest w sytuacji, gdy firma ma kłopoty finansowe, czyli proces U znajduje się poniżej poziomu 0, wtedy powyżej opisane modernizacje nie są realizowane a podatek dochodowy nie jest płacony. W pracy [H3] uzyskano więc następujące rezultaty. Niech

$$\tau_U^d = \inf\{t > 0 \colon t - \sup\{0 \leq s \leq t \colon U_s \geq 0\} > d\}$$

będzie paryskim momentem zatrzymania dla procesu U. Wtedy prawdopodobieństwo paryskiej ruiny jest zadane przez

Twierdzenie 8 (Theorem 2 w [H3])**.** *Dla $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_U^d < \infty\right) = 1 - (\mathbb{E}[X_1] - \delta)_+ \frac{\int_0^\infty w(x;-z) z \mathbb{P}(X_d \in dz)}{\int_0^\infty z \mathbb{P}(X_d \in dz) - \delta d}. \tag{20}$$

Łatwo zauważyć, że gdy $\delta = 0$, to powyższy wzór pokrywa się z rezultatem otrzymanym w Theorem 1 z pracy [H1]. Powyższe twierdzenie dowodzone jest za pomocą formuły Kendalla oraz mocnej własności Markowa, dzięki, której dekompozycja trajektorii procesu U prowadzi do otrzymania tożsamości fluktuacyjnych związanych z pierwszymi momentami dojścia procesów X i Y do zadanych poziomów. Tożsamości te prezentujemy w poniższym lemacie. Warto też wspomnieć, że przypadek, gdy U ma nieograniczone wahanie musi być rozpatrywany osobno. Definiujemy wtedy czas zatrzymania $\tau_U^{d,\epsilon} = \inf\{t > 0\colon t - \sup\{0 \le s \le t\colon U_s \ge \epsilon\} > d\}$, a następnie prawdopodobieństwo paryskiej ruiny jest aproksymowane przez $\mathbb{P}_\epsilon(\tau_U^{d,\epsilon} < \infty)$, gdy $\epsilon \downarrow 0$.

Lemat 2 (Lemma 8 w [H3])**.** *Niech* $\nu_0^- = \inf\{t > 0 : Y_t < 0\}$ *oraz* $\nu_a^+ = \inf\{t > 0 : Y_t > a\}$. *Wtedy dla* $x \in \mathbb{R}$, $a, q \ge 0$, *mamy*

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{Y_{\nu_0^-}}\left(\tau_0^+ \le d\right)\mathbf{1}_{\{\nu_0^- < \infty\}}\right] = \int_0^\infty \left(w(x;-z) - \mathbb{W}(x)\right)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d \in dz) + \delta\mathbb{W}(x),$$

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\nu_0^-}\mathbb{E}_{Y_{\nu_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbf{1}_{\{\tau_0^+ \le d\}}\right]\mathbf{1}_{\{\nu_0^- < \nu_a^+\}}\right]$$
$$= \int_0^\infty e^{-qd}\left(w^{(q)}(x;-z) - \frac{\mathbb{W}^{(q)}(x)}{\mathbb{W}^{(q)}(a)}w^{(q)}(a;-z)\right)\frac{z}{d}\mathbb{P}\left(X_d \in dz\right)$$

oraz

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\nu_0^-}\mathbb{P}_{Y_{\nu_0^-}}(\tau_0^+ \le d)\mathbf{1}_{\{\nu_0^- < \nu_a^+\}}\right]$$
$$= \int_0^\infty \left(\mathcal{W}_{x,\delta}^{(q,-q)}(x+z) - \frac{\mathbb{W}^{(q)}(x)}{\mathbb{W}^{(q)}(a)}\mathcal{W}_{a,\delta}^{(q,-q)}(a+z)\right)\frac{z}{d}\mathbb{P}\left(X_d \in dz\right),$$

gdzie dla dowolnych $x, c \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{W}_{c,\delta}^{(q,-q)}(x) = W(x) + \int_0^c \left(qW(x-y) - \delta W'(x-y)\right)\mathbb{W}^{(q)}(y)\,dy. \tag{21}$$

W technikach dowodowych wykorzystanych w pracy [H3] kluczowy był fakt, że zachowanie procesu U w zależności od jego położenia jest modelowane przez procesy X i Y. Dlatego powyższy lemat został udowodniony przede wszystkim przy użyciu mocnej własności Markowa oraz jednorodności w przestrzeni procesów Lévy'ego X i Y.

Dodatkowo ważnym rezultatem pracy [H3] jest następujące twierdzenie, które podaje formuły na dwustronne i jednostronne problemy wyjścia dla procesu U rozważanego do momentu paryskiej ruiny. Otrzymane rezultaty zostały wyrażone za pomocą wzorów zawierających funkcje skalujące procesów X, Y, U oraz rozkład procesu X w momencie d.

Twierdzenie 9 (Theorem 4 w [H3])**.** *Niech* $\kappa_a^+ = \inf\{t > 0 : U_t > a\}$ *oraz* $d > 0$. *Wtedy paryskie problemy wyjścia dla załamanego procesu Lévy'ego U zadane są w następujący sposób*

(i) Dla $q > 0$, $x \le a$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q(\tau_U^d - d)}\mathbf{1}_{\{\tau_U^d < \kappa_a^+\}}\right]$$
$$= \mathbb{Z}^{(q)}(x) + \int_0^\infty \left(w^{(q)}(x;-z)\,\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_U^d}\mathbf{1}_{\{\kappa_d^U < \kappa_a^+\}}\right] - \mathcal{W}_{x,\delta}^{(q,-q)}(x+z)\right)\frac{z}{d}\mathbb{P}\left(X_d \in dz\right),$$

gdzie

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_U^d}\mathbf{1}_{\left(\tau_U^d<\kappa_a^+\right)}\right] = 1 - \frac{\mathbb{Z}^{(q)}(a) + \int_0^\infty \left(w^{(q)}(a;-z) - \mathcal{W}_{a,\delta}^{(q,-q)}(a+z)\right)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz)}{\int_0^\infty w^{(q)}(a;-z)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz)}$$
$$= \frac{\int_0^\infty \mathcal{W}_{a,\delta}^{(q,-q)}(a+z)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz) - \mathbb{Z}^{(q)}(a)}{\int_0^\infty w^{(q)}(a;-z)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz)}.$$

(ii) Dla $q>0$ *oraz* $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q(\tau_U^d-d)}\mathbf{1}_{\left\{\tau_U^d<\infty\right\}}\right]$$
$$= \mathbb{Z}^{(q)}(x) + \int_0^\infty \left(w^{(q)}(x;-z)\,\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_U^d}\mathbf{1}_{\left\{\tau_U^d<\infty\right\}}\right] - \mathcal{W}_{x,\delta}^{(q,-q)}(x+z)\right)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz),$$

gdzie

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-q(\tau_U^d-d)}\mathbf{1}_{\left\{\tau_U^d<\infty\right\}}\right] = \frac{\int_0^\infty \mathcal{H}_\delta^{(q,-q)}(z)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz) - \frac{q}{\psi(q)} - \delta}{\int_0^\infty \mathcal{H}_\delta^{(q,0)}(z)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz) - \delta e^{qd}}$$

oraz dla $p, p+q\geq 0$

$$\mathcal{H}_\delta^{(p,q)}(x) = e^{\varphi(p)x}\left(1 + (q-\delta\varphi(p))\int_0^x e^{-\varphi(p)y}W^{(p+q)}(y)dy\right).$$

(iii) Dla $q\geq 0$ *oraz* $x\leq a$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\kappa_a^+}\mathbf{1}_{\left\{\kappa_a^+<\tau_U^d\right\}}\right] = \frac{\int_0^\infty w^{(q)}(x;-z)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz)}{\int_0^\infty w^{(q)}(a;-z)\frac{z}{d}\mathbb{P}(X_d\in dz)}.$$

Dowody poszczególnych punktów z powyższego twierdzenia są techniczne oraz dość skomplikowane rachunkowo. Wykorzystują tożsamości zawarte w Lemacie 2 oraz mocną własność Markowa. Przypadek nieograniczonego wahania jest również dowodzony przez aproksymację.

Teoria fluktuacji dla procesów Lévy'ego zależnych od poziomu (praca [H4])

Ostatnia część omawianego cyklu prac poświęcona jest procesom zależnym od dryfu (*level-dependent Lévy processes*). Są to procesy Fellera zdefiniowane jako mocne rozwiązanie następującego stochastycznego równania różniczkowego

$$dU(t) = dX(t) - \phi(U(t))\,dt, \tag{22}$$

gdzie $X(t)$ jest spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego. O funkcji ϕ zakładamy, że jest niemalejąca oraz istnieje $r^*\in\mathbb{R}$ takie, że $\phi(x)=0$ dla każdego $x\leq r^*$. W przypadku, kiedy proces X ma ograniczone wahanie zakładamy dodatkowo, że $\phi(x) < p = \gamma + \int_{(-1,0)} x\Pi(dx) > 0$ dla każdego

$x \in \mathbb{R}$. Jest to techniczne założenie, które zostało wykorzystane przy konstrukcji rozwiązania (22). Ponadto, zakładamy, że funkcja ϕ jest albo lokalnie lipschitzowska albo jest postaci

$$\phi(x) = \phi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \delta_j \mathbf{1}_{\{x \geq b_j\}},$$

gdzie $k \geq 1$, $0 < \delta_1, \ldots, \delta_k$, oraz $-\infty < b_1 < ... < b_k < \infty$. Powyższe założenia w pracy [H4] zostały oznaczone jako warunek **[A]**.

Proces $U = U_k$, gdy $\phi = \phi_k$ nazywamy procesem wielokrotnie załamanym (*multi-refracted process*), jest on naturalnym uogólnieniem przypadku $k = 1$, który był rozważany wcześniej w pracy [33]. Zauważmy, że dla dowolnego $0 \leq j \leq k$ w każdym przedziale $(b_j, b_{j+1}]$ (gdzie $b_0 := -\infty$ oraz $b_{k+1} := \infty$) proces U_k zachowuje się jak proces $X_j := \{X(t) - \sum_{i=1}^{j} \delta_i t : t \geq 0\}$, który jest spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego niebędącym minus subordynatorem, co wynika z założenia, że $\phi_k(x) \leq p$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy teraz wykładnik Laplace'a procesu X_j:

$$\psi_j(\theta) := \psi(\theta) - (\delta_1 + ... + \delta_j)\theta \quad \text{dla} \quad \theta \geq 0.$$

Natomiast

$$\varphi_j(q) = \sup\{\theta \geq 0 \mid \psi_j(\theta) = q\}$$

to funkcja prawostronnie odwrotna do ψ_j.

Praca [H4] składa się z dwóch części. Pierwsza dotyczy procesu wielokrotnie załamanego. Udowodniono, że gdy ϕ jest schodkowa, wtedy istnieje jedyne mocne rozwiązanie równania (22), które posiada mocną własność Markowa.

Twierdzenie 10 (Theorem 1 w [H4])**.** *Niech $k \geq 1$, $\phi(x) = \phi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \delta_j \mathbf{1}_{\{x \geq b_j\}}$, $0 < \delta_1, \ldots, \delta_k$, oraz $-\infty < b_1 < ... < b_k < \infty$. Wtedy istnieje proces U_k będący mocnym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego* (22).

Pierwszym krokiem dowodowym była konstrukcja po trajektoriach rozwiązania równania (22) w przypadku, gdy proces X ma ograniczone wahanie. Polega ona na znalezieniu procesu U_k spełniającego równanie (22) na przedziałach czasowych, w których owy proces znajduje się powyżej bądź poniżej najwyższego poziomu b_k. Dowód jest indukcyjny. Dla $k = 1$ tezę otrzymujemy bezpośrednio z pracy [33]. Następnie zakładamy, że proces U_{k-1} jest dobrze skonstruowany na przedziałach czasowych, w których przebywa pomiędzy poziomami $-\infty < b_1 < ... < b_{k-1} < \infty$ i pokazujemy, że wtedy U_k jest również dobrze określony na wszystkich poziomach $-\infty < b_1 < ... < b_k < \infty$. Powyższa konstrukcja jest poprawna tylko w przypadku założenia o ograniczonym wahaniu procesu X, co wynika z faktu, iż b_k jest nieregularny dla półprostej $(-\infty, b_k)$. Dodatkowo istotny jest tutaj fakt, że proces U_k porusza się w górę tylko w sposób ciągły, a w dół jedynie za pomocą skoków (tutaj właśnie wykorzystujemy założenie, że $\phi_k(x) \leq p = \gamma + \int_{(-1,0)} x\Pi(dx) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$). Przypadek, gdy proces X, a tym samym proces U_k ma nieograniczone wahanie dowodzony jest za pomocą tzw. ciągów aproksymacyjnych X^n oraz U_k^n, gdzie wszystkie procesy X^n, U_k^n mają ograniczone wahanie. Jest to możliwe, ponieważ każdy spektralnie ujemny proces Lévy'ego, który ma nieograniczone wahanie trajektorii można aproksymować ciągiem procesów spektralnie ujemnych o ograniczonym wahaniu (zob. [7, str. 210]). Ponadto w tej części pracy wyznaczono tożsamości fluktuacyjne oraz rezolwenty dla procesu U_k.

Definicja **6.** *Dla dowolnego* $1 \leq k$, $-\infty =: b_0 < b_1 < \cdots < b_k < b_{k+1} := \infty$, *oraz* $y \in \mathbb{R}$, *zdefiniujmy*

$$\Xi_{\phi_k}(y) := 1 - W^{(q)}(0)\phi_k(y).$$

Gdy X *ma nieograniczone wahanie, to* $W^{(q)}(0) = 0$, *przez co* $\Xi_{\phi_k}(y) = 1$ *dla wszystkich* $y \in \mathbb{R}$. *Z drugiej strony, gdy* X *ma ograniczone wahanie oraz* $y \in (b_i, b_{i+1}]$ *dla* $i \leq k-1$, *to*

$$\Xi_{\phi_k}(y) = 1 - W^{(q)}(0)\sum_{j=1}^{i}\delta_j = \prod_{j=1}^{i}\left(1 - \delta_j W_{j-1}^{(q)}(0)\right).$$

Natomiast, gdy $y > b_k$, *otrzymujemy* $\Xi_{\phi_k}(y) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \delta_j W_{j-1}^{(q)}(0)\right)$.

Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $k \geq 1$, zdefiniujmy następujące czasy zatrzymania

$$\kappa_k^{a,-} := \inf\{t > 0 \colon U_k(t) < a\} \quad \text{oraz} \quad \kappa_k^{a,+} := \inf\{t > 0 \colon U_k(t) \geq a\},$$

z konwencją, że $\inf \emptyset = \infty$.

W poniższym twierdzeniu prezentujemy wzory na dwustronne problemy wyjścia dla procesu wielokrotnie załamanego U_k. Prawe strony tychże równości są przedstawione w języku nowych funkcji skalujących zadanych przez pewne rekurencyjne równania całkowe. Równania te można rozwiązać i otrzymać jawny wzór na przedstawione poniżej funkcje (w pracy [H4] jest to Proposition 13).

Twierdzenie 11 (Theorem 5 w [H4])**.** *Ustalmy* $k \geq 1$ *oraz* $q \geq 0$.

(i) Dla $r < b_1 < \cdots < b_k \leq a$ *oraz* $r \leq x \leq a$, *mamy*

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\kappa_k^{a,+}}\mathbf{1}_{\{\kappa_k^{a,+} < \kappa_k^{r,-}\}}\right] = \frac{w_k^{(q)}(x;r)}{w_k^{(q)}(a;r)}, \tag{23}$$

gdzie $w_k^{(q)}$ *jest zadane w sposób rekurencyjny*

$$w_k^{(q)}(x;r) := w_{k-1}^{(q)}(x;r) + \delta_k \int_{b_k}^{x} W_k^{(q)}(x-y) w_{k-1}^{(q)\prime}(y;r)dy, \tag{24}$$

z warunkiem początkowym $w_0^{(q)}(x;r) = W^{(q)}(x-r)$. *Funkcja* $w_k^{(q)}(x;r)$ *jest funkcją skalującą związaną z procesem* U_k.

(ii) Dla $0 < b_1 < \cdots < b_k \leq a$ *oraz* $0 \leq x \leq a$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\kappa_k^{0,-}}\mathbf{1}_{\{\kappa_k^{0,-} < \kappa_k^{a,+}\}}\right] = z_k^{(q)}(x) - \frac{z_k^{(q)}(a)}{w_k^{(q)}(a)} w_k^{(q)}(x), \tag{25}$$

gdzie $z_k^{(q)}$ *jest zadana rekurencyjnie*

$$z_k^{(q)}(x) := z_{k-1}^{(q)}(x) + \delta_k \int_{b_k}^{x} W_k^{(q)}(x-y) z_{k-1}^{(q)\prime}(y)dy,$$

z warunkiem początkowym $z_0^{(q)}(x) = Z^{(q)}(x)$. *Funkcja skalująca* $z_k^{(q)}(x)$ *jest związana z procesem* U_k, Dowód powyższego twierdzenia przebiegał dwuetapowo. Najpierw udowodniono wzór (23) w przypadku, gdy proces X ma ograniczone wahanie. Ten przypadek dowodzi się stosując mocną własność Markowa, a następnie wyznaczając (23), gdy $x = b_k$. Takie rozumowanie jest możliwe jedynie dla przypadku ograniczonego wahania, gdyż wtedy $W^{(q)}(x - b_k) = W^{(q)}(0) > 0$. Dowód dla procesu o nieograniczonym wahaniu jest bardziej skomplikowany i wymaga użycia ciągów aproksymacyjnych. Pozostałe tożsamości fluktuacyjne, które wyznaczono w tym rozdziale dla procesu U_k opisują jednostronne problemy wyjścia oraz rezolwenty. Jednostronne problemy wyjścia oznaczają transformatę Laplace'a pierwszego momentu wyjścia procesu U_k z półprostej $[0, \infty)$ (podpunkt (i) w poniższym wniosku) oraz z półprostej $(-\infty, a)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ (podpunkt (ii) w poniższym wniosku). Tożsamości te zostały wyrażone w języku funkcji skalujących związanych z procesem U_k i zadanych w sposób rekurencyjny.

Wniosek **7** (Corollary 6 w [H4])**.** *Ustalmy $k \geq 1$.*

(i) Dla $x \geq 0$, $b_1 > 0$ oraz $q > 0$, mamy

$$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\kappa_k^{0,-}}\mathbf{1}_{\{\kappa_k^{0,-}<\infty\}}\right] = z_k^{(q)}(x) - \frac{\int_{b_k}^{\infty} e^{-\varphi_k(q)z} z_{k-1}^{(q)\prime}(z)dz}{\int_{b_k}^{\infty} e^{-\varphi_k(q)z} w_{k-1}^{(q)\prime}(z)dz} w_k^{(q)}(x). \tag{26}$$

(ii) Dla $b_1 < \cdots < b_k \leq a$, $x \leq a$ oraz $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\kappa_k^{a,+}}\mathbf{1}_{\{\kappa_k^{a,+}<\infty\}}\right] = \frac{u_k^{(q)}(x)}{u_k^{(q)}(a)}, \tag{27}$$

gdzie $u_k^{(q)}$ jest zadana rekurencyjnie

$$u_k^{(q)}(x) := u_{k-1}^{(q)}(x) + \delta_k \int_{b_k}^{x} W_k^{(q)}(x-y) u_{k-1}^{(q)\prime}(y)dy,$$

z warunkiem początkowym $u_0^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x}$. Funkcja $u_k^{(q)}(x)$ jest funkcją skalującą związaną z procesem U_k

Rezolwenty lub inaczej q-potencjały to miary oczekiwanego czasu przebywania procesu w pewnym zbiorze borelowskim. Mogą być rozpatrywane przez cały okres „życia" procesu, czyli na nieskończonym horyzoncie czasowym, albo do momentu pierwszego przejścia procesu poniżej bądź powyżej pewnego poziomu. Rezolwenty pełnią ważną rolę w teorii fluktuacji i w zastosowaniach, na przykład do wyznaczania pewnych charakterystyk w modelach dywidendowych (zob. np. [14, 35]).

Twierdzenie 12 (Theorem 7 w [H4])**.** *Ustalmy zbiór borelowski $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ oraz $k \geq 1$.*

(i) Dla $r < b_1 < \cdots < b_k \leq a$, $r \leq x \leq a$ oraz $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\kappa_k^{a,+}\wedge\kappa_k^{r,-}} e^{-qt}\mathbf{1}_{\{U_k(t)\in\mathcal{B}\}}dt\right] = \int_{\mathcal{B}\cap(r,a)} \frac{\frac{w_k^{(q)}(x;r)}{w_k^{(q)}(a;r)} w_k^{(q)}(a;y) - w_k^{(q)}(x;y)}{\Xi_{\phi_k}(y)} dy, \tag{28}$$

gdzie funkcja $w_k^{(q)}(x;z)$ została zdefiniowana w Twierdzeniu 11 (i).

(ii) Dla $x \geq 0$, $b_1 > 0$ oraz $q > 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\kappa_k^{0,-}} e^{-qt} \mathbf{1}_{\{U_k(t) \in \mathcal{B}\}} dt \right] = \int_{\mathcal{B} \cap (0,\infty)} \frac{\frac{w_k^{(q)}(x)}{v_k^{(q)}(0)} v_k^{(q)}(y) - w_k^{(q)}(x;y)}{\Xi_{\phi_k}(y)} dy, \tag{29}$$

gdzie $v_k^{(q)}(y) := \delta_k \int_{b_k}^{\infty} e^{-\varphi_k(q)z} w_{k-1}^{(q)\prime}(z;y)dz$, oraz funkcja $w_k^{(q)}(x;z)$ została zdefiniowana w Twierdzeniu 11 (i).

(iii) Dla $x, b_k \leq a$ oraz $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\kappa_k^{a,+}} e^{-qt} \mathbf{1}_{\{U_k(t) \in \mathcal{B}\}} dt \right] = \int_{\mathcal{B} \cap (-\infty,a)} \frac{\frac{u_k^{(q)}(x)}{u_k^{(q)}(a)} w_k^{(q)}(a;y) - w_k^{(q)}(x;y)}{\Xi_{\phi_k}(y)} dy, \tag{30}$$

gdzie funkcje $w_k^{(q)}(x;y)$ oraz $u_k^{(q)}(x)$ zostały zdefiniowane w Twierdzeniu 11 oraz Wniosku 7.

(iv) Dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $q > 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\infty} e^{-qt} \mathbf{1}_{\{U_k(t) \in \mathcal{B}\}} dt \right] = \int_{\mathcal{B}} \frac{\frac{u_k^{(q)}(x) \int_{b_k}^{\infty} e^{-\varphi_k(q)z} w_{k-1}^{(q)\prime}(z;y)dz}{\int_{b_k}^{\infty} e^{-\varphi_k(q)z} u_{k-1}^{(q)\prime}(z)dz} - w_k^{(q)}(x;y)}{\Xi_{\phi_k}(y)} dy. \tag{31}$$

Techniki dowodowe dla powyższych rezultatów są podobne do tych użytych w Twierdzeniu 11. Wniosek 7 otrzymujemy z Twierdzenia 11, licząc odpowiednie granice, gdy $a \to \infty$ we wzorze (25), oraz $r \to -\infty$ w przypadku wzoru (23).

Dodatkowo w tej części pracy scharakteryzowano funkcję skalującą $w_k^{(q)}(x;r)$, zbadano jej zachowanie w zerze oraz w nieskończoności, monotoniczność oraz gładkość (podrozdział 2.3 w [H4]).

Ponadto bardzo ważną obserwacją jest fakt, że funkcje skalujące $w_k^{(q)}(x;r)$, $z_k^{(q)}(x)$ oraz $u_k^{(q)}(x)$ spełniają następujące równania całkowe:

Stwierdzenie 8 (Rozdział 2.4 w [H4])**.** *Niech $\phi_k(x) = \sum_{i=1}^k \delta_i \mathbf{1}_{\{x > b_i\}}$ oraz $q \geq 0$, $k \geq 1$. Wtedy dla $x, r \in \mathbb{R}$, $z < b_1$ funkcje $w_k^{(q)}(x;r)$, $z_k^{(q)}(x)$ oraz $u_k^{(q)}(x)$ są jedynymi rozwiązaniami następujących równań:*

$$w_k^{(q)}(x;r) = W^{(q)}(x-r) + \int_r^x W^{(q)}(x-y)\phi_k(y) w_k^{(q)\prime}(y;r)\, dy,$$

$$z_k^{(q)}(x) = Z^{(q)}(x) + \int_0^x W^{(q)}(x-y)\phi_k(y) z_k^{(q)\prime}(y)dy,$$

$$u_k^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} + \int_0^x W^{(q)}(x-y)\phi_k(y) u_k^{(q)\prime}(y)dy.$$

Powyższe stwierdzenie jest istotne, ponieważ to dzięki tej obserwacji otrzymano analogiczne równania na funkcje skalujące dla ogólniejszej klasy funkcji ϕ (wszystkich spełniających warunek **[A]**).

W drugiej części pracy udowodniono istnienie i jednoznaczność mocnego rozwiązania równania (22) w ogólnym przypadku, a nie tylko dla funkcji schodkowych jak było w pierwszej części pracy. Co więcej przypadek *multi-refracted* posłużył jako aproksymacja dla ogólniejszej klasy funkcji ϕ. Do tego wykorzystano ciąg funkcji $(\phi_n)_{n\geq 1}$ spełniający następujące warunki:

(a) $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ jednostajnie na zbiorach zwartych.

(b) Dla $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \ldots \leq \phi(x).$$

(c) Dla każdego $n \geq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$, mamy $\phi_n(x) = \sum_{j=1}^{m_n} \delta_j^n \mathbf{1}_{\{x > b_j^n\}}$, dla pewnych $m_n \in \mathbb{N}$, $0 < b_1^n < \ldots < b_{m_n}^n$, oraz $\delta_j^n > 0$ dla dowolnego $j = 1, \ldots, m_n$.

Dla każdego $n \geq 1$ rozwiązanie równania (22) z funkcją ϕ_n oznaczamy przez U_n.

Teraz pokażemy, jak skonstruować taki ciąg $(\phi_n)_{n\geq 1}$, który spełnia powyższe warunki. Dla dowolnego $n \geq 1$ wybieramy kratę $\Pi^n = \{b_l^n = l2^{-n} : l = 1, \ldots, m_n = n2^n\}$ i zadajemy $\delta_j^n = \phi(b_j^n) - \phi(b_{j-1}^n)$, gdzie $b_0^n = 0$. Ponadto definiujemy *ciąg aproksymujący* funkcję ϕ w następujący sposób:

$$\phi_n(x) = \sum_{j=1}^{m_n} \delta_j^n \mathbf{1}_{\{x > b_j^n\}} \qquad \text{dla } n \geq 1 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}.$$

Dla każdego $n \geq 1$, z Twierdzenia 1 z pracy [H4] wynika, że istnieje jedyne rozwiązanie U_n równania (22) z funkcją ϕ_n. Dodatkowo, ważną obserwacją jest fakt, że ciąg $(U_n(t))_{n\geq 1}$ jest niemalejący dla każdego $t \geq 0$:

Lemat 3 (Lemma 20 w pracy [H4]). *Przypuśćmy, że dla każdego $n \geq 1$ mamy $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $U_{n+1}(t) \leq U_n(t)$ dla wszystkich $t \geq 0$.*

Następnie, używając powyższego lematu, udowodniono

Stwierdzenie 9 (Proposition 21 w [H4]). *Przypuśćmy, że funkcja ϕ spełnia warunek* **[A]**. *Wtedy istnieje proces U – jedyne mocne rozwiązanie równania (22) z funkcją ϕ. Ponadto, ciąg $(U_n)_{n\geq 1}$ zbiega do U p.n. jednostajnie na zwartych przedziałach czasowych.*

Kolejnym etapem było pokazanie, że funkcja skalująca $w^{(q)}$ związana z ogólnym procesem U spełnia następujące równanie całkowe:

$$w^{(q)}(x; r) = W^{(q)}(x - r) + \int_0^x W^{(q)}(x - y)\phi(y) w^{(q)\prime}(y; r) dy, \tag{32}$$

gdzie $W^{(q)}$ to funkcja skalująca procesu X.

Techniki dowodowe w tej części pracy związane są z ogólną teorią równań całkowych typu Volterry:

$$u(x;r) = g(x) + \int_0^x K(x,y)u(y;r)\,dy, \tag{33}$$

gdzie ciągłość jądra K i funkcji g nie jest wymagana, a prezentowana teoria jest rozumiana w kontekście jąder z przestrzeni L^1, tak jak w pracy [26]. Najpierw ogólnie pokazujemy, że jeśli założymy iż pewna funkcja u jest różniczkowalna prawie wszędzie, to u jest rozwiązaniem równania

$$u(x;r) = W^{(q)}(x-r) + \int_r^x W^{(q)}(x-y)\phi(y)u'(y;r)\,dy$$

wtedy i tylko wtedy, gdy u' jest rozwiązaniem następującego równania Volterry

$$u'(x;r) = \Xi_\phi(x)^{-1}W^{(q)\prime}((x-r)+) + \int_r^x \Xi_\phi(x)^{-1}\phi(y)W^{(q)\prime}(x-y)u'(y;r)\;dy, \tag{34}$$

z warunkiem początkowym $u(r;r) = W^{(q)}(0)$. W pracy [H4] jest to Lemat 22. Następnie stosując iteracje Picarda konstruujemy rozwiązanie równania (34) i znajdujemy majorantę dla szeregu Neumanna, będącego w tym przypadku nieskończoną sumą splotów jąder

$$K(x,y) = \Xi_\phi(x)^{-1}\phi(y)W^{(q)\prime}(x-y).$$

Kolejnym krokiem było pokazanie, że za pomocą funkcji skalujących procesów *multi-refracted* można aproksymować funkcję skalującą dla procesu zależnego od poziomu. Wtedy dla dowolnego $x \geq r$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} w_n^{(q)\prime}(x;r) = w^{(q)\prime}(x;r) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} z_n^{(q)\prime}(x) = z^{(q)\prime}(x).$$

W pracy [H4] jest to Theorem 27.

Dzięki powyższej aproksymacji w ostatnim podrozdziale pracy [H4] otrzymaliśmy tożsamości fluktuacyjne dla ogólnego procesu zależnego od dryfu. Niech $a \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy następujące momenty zatrzymania dla procesu U zależnego od dryfu:

$$\kappa^{a,-} := \inf\{t > 0\colon U(t) < a\} \quad \text{oraz} \quad \kappa^{a,+} := \inf\{t > 0\colon U(t) \geq a\}.$$

W poniższym twierdzeniu prezentujemy wzory na rezolwenty. Zauważmy także, że wzór (36) dla $\phi = \phi_k$ zgadza się z (29), natomiast w ogólnym przypadku funkcji $c^{(q)}(y;r)$ nie znamy w jawnej postaci.

Twierdzenie 13 (Theorem 30 w [H4]). *Ustalmy zbiór borelowski $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy*

(i) Dla $q \geq 0$ oraz $r \leq x \leq a$,

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\kappa^{a,+}\wedge\kappa^{r,-}} e^{-qt}\mathbf{1}_{\{U(t)\in\mathcal{B}\}}\,dt\right] = \int_{\mathcal{B}\cap(r,a)} \Xi_\phi(y)^{-1}\left(\frac{w^{(q)}(x;r)}{w^{(q)}(a;r)}w^{(q)}(a;y) - w^{(q)}(x;y)\right)\,dy. \tag{35}$$

(ii) Dla $q > 0$ oraz $x \geq 0$, istnieje $c^{(q)}(y; r) > 0$ taka, że $w^{(q)}(x; r)c^{(q)}(y; r) - w^{(q)}(x; y) \geq 0$ oraz

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\kappa^{r,-}} e^{-qt} \mathbf{1}_{\{U(t)\in\mathcal{B}\}} dt \right] = \int_{\mathcal{B}\cap(r,\infty)} \Xi_\phi(y)^{-1} \left(c^{(q)}(y; r) w^{(q)}(x; r) - w^{(q)}(x; y) \right) dy. \tag{36}$$

(iii) Dla $q \geq 0$ oraz $x \leq a$,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\kappa^{a,+}} e^{-qt} \mathbf{1}_{\{U(t)\in\mathcal{B}\}} dt \right] = \int_{\mathcal{B}\cap(-\infty,a)} \Xi_\phi(y)^{-1} \left(\frac{u^{(q)}(x)}{u^{(q)}(a)} w^{(q)}(a; y) - w^{(q)}(x; y) \right) dy, \tag{37}$$

gdzie $u^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} + \int_0^x \phi(y) W^{(q)}(x-y) u^{(q)\prime}(y)\, dy$.

Ponadto w pracy [H4] znaleziono rozwiązania dwustronnych problemów wyjścia dla procesu U z dowolną funkcją ϕ spełniającą warunek **[A]**. Prawe strony wzorów zostały wyrażone za pomocą funkcji skalujących spełniających równania całkowe typu Volterry.

Twierdzenie 14 (Theorem 32 w [H4]). *(i) Dla $r \leq x \leq a$ oraz $q \geq 0$,*

$$\mathbb{E}_x \left[\mathrm{e}^{-q\kappa^{a,+}} \mathbf{1}_{\{\kappa^{a,+} < \kappa^{r,-}\}} \right] = \frac{w^{(q)}(x; r)}{w^{(q)}(a; r)}. \tag{38}$$

(ii) Dla $0 \leq x \leq a$ oraz $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[\mathrm{e}^{-q\kappa^{0,-}} \mathbf{1}_{\{\kappa^{0,-} < \kappa^{a,+}\}} \right] = z^{(q)}(x) - \frac{z^{(q)}(a)}{w^{(q)}(a)} w^{(q)}(x), \tag{39}$$

gdzie $z^{(q)}(x) = Z^{(q)}(x) + \int_0^x \phi(y) W^{(q)}(x-y) z^{(q)\prime}(y)\, dy$.

W pracy [H4] wyznaczono także prawdopodobieństwo ruiny dla ogólnego procesu U. Zauważmy na początek, że z Twierdzenia 14 (ii), dla $q = 0$ otrzymujemy

$$\rho(x) := \mathbb{P}_x \left(\kappa^{0,-} < \infty \right) = 1 - \lim_{a\to\infty} \frac{w(x)}{w(a)}.$$

Dzięki czemu można udowodnić następujący lemat.

Lemat 4 (Proposition 34 w [H4]). *Niech $x \geq 0$.*

(i) Jeśli $\mathbb{E}[X(1)] \leq 0$, to $\rho(x) = 1$ dla każdego $x \geq 0$.

(ii) Jeśli $\mathbb{E}[X(1)] > 0$ oraz $\int_0^\infty \phi(x) w'(x)\, dx$ istnieje, to mamy

$$\rho(x) = 1 - A^{-1} w(x),$$

gdzie

$$A = \frac{1 + \int_0^\infty \phi(x) w'(x)\, dx}{\mathbb{E}[X(1)]}$$

oraz ρ spełnia poniższe równanie całkowe:

$$\rho(x) = 1 - A^{-1} W(x) + \int_0^x W(x-y)\phi(y)\rho'(y) dy.$$

Ponadto, jeśli $\int_0^\infty \phi(x) w'(x)\, dx = \infty$ to $A = \infty$ i wtedy $\rho(x) = 1$ dla każdego $x \geq 0$.

Powyżej zostały przedstawione najważniejsze rezultaty otrzymane w pracach [H1]-[H4], które stanowią osiągnięcie naukowe. Podsumowując, główne wyniki prac [H1]-[H3] przedstawiają wzory na tożsamości fluktuacyjne dla procesów Lévy'ego oraz załamanych procesów Lévy'ego rozważanych z tzw. paryskim opóźnieniem, praca [H4] przedstawia dowód istnienia i fluktuacje tzw. procesów zależnych od poziomu, w tym procesów wielokrotnie załamanych.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Poza czterema pracami, stanowiącymi jednotematyczny cykl publikacji, opublikowałam po doktoracie 7 artykułów, przy czym jeden został zaakceptowany i czeka na publikację od sierpnia 2018r., co razem z artykułami przed doktoratem daje łącznie 15 publikacji. Moje prace zostały opublikowane ze współautorami z różnych ośrodków naukowych z całego świata. Liczba cytowań, według bazy Web of Science (na dzień 12.04.2019), jest równa 105 (93 bez autocytowań), zaś h-indeks (indeks Hirscha) jest równy 4. Sumaryczny *impact factor* czasopism dla czterech publikacji wchodzących w skład *osiągnięcia naukowego*, według listy Journal Citation Reports, to 4,959; sumaryczny *impact factor* czasopism dla wszystkich piętnastu publikacji to 13,573, zob. Tablicę 1.

Tablica 1: *Impact factor* czasopism według listy Journal Citation Report zgodnie z rokiem opublikowania (lub z roku podanego w nawiasie w przypadku publikacji z 2019).

praca	czasopismo	data publikacji	*impact factor*
[H1]	Bernoulli	2013	1,296
[H2]	Scandinavian Actuarial Journal	2016	1,347
[H3]	Insurance: Mathematics and Economics	2017	1,265
[H4]	Stochastic Processes and their Applications	2019	1,051 (2018)
[P1]	Journal of Optimization Theory and Applications	2014	1,509
[P2]	Statistics and Probability Letters	2016	0,540
[P3]	Scandinavian Actuarial Journal	2017	1,550
[P4]	Statistics and Probability Letters	2017	0,533
[P5]	Journal of Computational and Applied Mathematics	2017	1,632
[P6]	Probability and Mathematical Statistics	2018*	0,286 (2018)
[P7]	Insurance: Mathematics and Economics.	2018	1,265
[D1]	Stochastic Models	2011	0,667
[D2]	Journal of Applied Probability	2011	0,632
[D3]	Research Papers of Wrocław University of Economics	2011	–
[D4]	Research Papers of Wrocław University of Economics	2011	–
		Suma:	13,573

* - praca [P6] została przyjęta do druku w sierpniu 2018r.

[P1] I. Czarna, Z. Palmowski, *Dividend problem with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process*, Journal of Optimization Theory and Applications. 2014, vol. 161, no. 1, s. 239–256.

[P2] I. Czarna, J-F. Renaud, *A note on Parisian ruin with an ultimate bankruptcy level for Lévy insurance risk processes,* Statistics and Probability Letters. 2016, vol. 113, s. 54–61.

[P3] I. Czarna, Z. Palmowski, P. Świątek, *Discrete time ruin probability with Parisian delay*, Scandinavian Actuarial Journal. 2017, vol. 2017, no. 10, s. 854–869.

[P4] I. Czarna, Z. Palmowski, *Parisian quasi-stationary distributions for asymmetric Lévy processes*, Statistics and Probability Letters. 2017, vol. 127, s. 75–84.

[P5] I. Czarna, Y. Li, Z. Palmowski, C. Zhao, *The joint distribution of the Parisian ruin time and the number of claims until Parisian ruin in the classical risk model*, Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017, vol. 313, s. 499–514.

[P6] I. Czarna, Y. Li, Z. Palmowski, C. Zhao, *Optimal Parisian-type dividend payments penalized by the number of claims for the classical and perturbed classical risk process.*, Probability and Mathematical Statistics. 2019.

[P7] I. Czarna, J.-L. Pérez, K. Yamazaki, *Optimality of multi-refraction dividend strategies in the dual model*, Insurance: Mathematics and Economics. 2018, vol. 83, 148–160.

Mój dorobek naukowy dopełniają jeszcze poniższe cztery publikacje wchodzące w skład doktoratu, które nie będą tutaj omawiane.

[D1] I. Czarna, Z. Palmowski, *Ruin probability with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process*, Journal of Applied Probability. 2011, vol. 48, no. 4, 984–1002.

[D2] I. Czarna, Z. Palmowski, *De Finetti's dividend problem and impulse control for a two-dimensional insurance risk process*, Stochastic Models. 2011, vol. 27, no. 2, s. 220–250.

[D3] I. Czarna, Z. Palmowski, *Porównanie prawdopodobieństw paryskiej i klasycznej ruiny dla procesu ryzyka typu Lévy'ego*, Research Papers of Wrocław University of Economics. 2011, nr 207, s. 9–21.

[D4] I. Czarna, Z. Palmowski, *Problem wyboru optymalnej paryskiej dywidendy dla procesu ryzyka typu Lévy'ego : numeryczna analiza*, Research Papers of Wrocław University of Economics. 2011, nr 207, s. 22–37.

Omówię teraz wyniki uzyskane w pracach [P1]-[P7]. Prace [P1]-[P6] dotyczą tematyki związanej z paryskim opóźnieniem zastosowanym w różnych modelach. Natomiast praca [P7] pokazuje, że proces *multi-refracted* (dla $k = 2$) jest rozwiązaniem problemu optymalnej wypłaty dywidendy przy założeniu, że strategie dywidendowe w tym modelu są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a. Dla większej przejrzystości cały opis podzielony jest na trzy części odnoszące się do głównych zagadnień badawczych, którymi się zajmuję.

5.1 Paryskie dywidendy (Prace [P1], [P6])
Obie prace dotyczą optymalnych wypłat dywidend wyznaczonych do momentu paryskiej ruiny. Dodatkowo w pracy [P6] wypłaty te są dyskontowane przez czynnik $r \in (0,1)$ związany z liczbą skoków, które pojawiły się w złożonym procesie Poissona do momentu paryskiej ruiny $\tau^{\pi,d}$ (tj. $r^{N_{\tau^{\pi,d}}}$). Natomiast w pracy [P1] rozważamy przypadek, gdy $r = 1$. Formalnie, wyniki otrzymane w pracach [P1], [P6] polegają na zmaksymalizowaniu następującego funkcjonału całkowego

$$\sup_{\pi\in\Pi} v^{\pi,d}(x) := \sup_{\pi\in\Pi} \mathbb{E}_x \left[r^{N_{\tau^{\pi,d}}} \int_0^{\tau^{\pi,d}} e^{-qt} dL_t^\pi \right],$$

gdzie $q > 0$ oraz Π to zbiór wszystkich dopuszczalnych strategii takich, że $\pi = \{L_t^\pi : t \geq 0\}$ jest niemalejącym lewostronnie-ciągłym adaptowalnym procesem, który w chwili $t = 0$ startuje z poziomu 0. Tak więc L_t^π reprezentuje skumulowane dywidendy płatne do momentu t. Przez

$$U_t^\pi = X_t - L_t^\pi \tag{40}$$

definiujemy proces kontrolowany przez strategię dywidendową π. W pracy [P1] proces X jest dowolnym spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego, a w pracy [P6] rozważany jest proces Craméra–Lundberga (1) dodatkowo zaburzany procesem Wienera $\{B_t\}_{t\geq 0}$. Dla ustalonego $d \geq 0$ definiujemy wtedy paryski moment zatrzymania dla procesu U^π:

$$\tau^{\pi,d} := \inf\{t > 0 : t - \sup\{s < t : U_s^\pi \geq 0\} > d, U_t^\pi < 0\}.$$

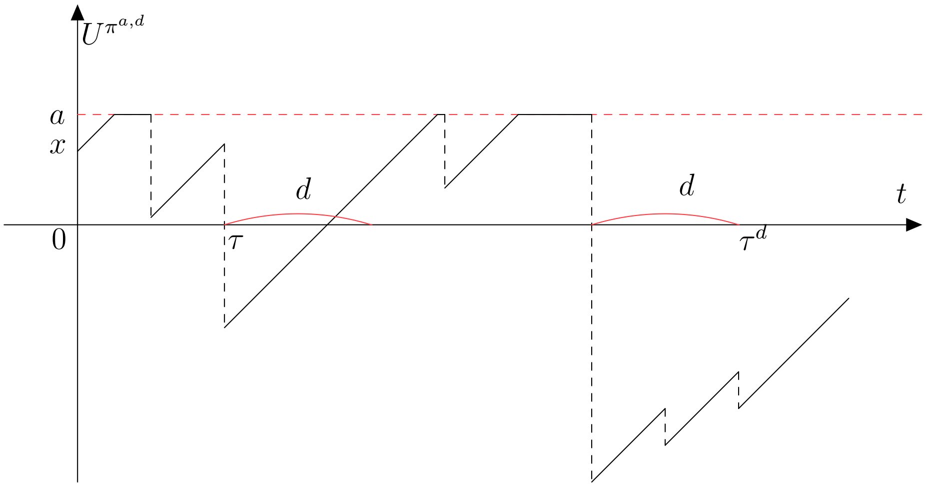
W obu pracach rozpatrujemy strategię barierową $\pi^{a,d}$, dla której wypłata dywidend polega na redukcji procesu $U^{\pi^{a,d}}$ do poziomu a, gdy $U^{\pi^{a,d}}(0) = x > a$, poprzez wypłacanie wielkości $x - a$, a następnie wypłacanie minimalnej kwoty dywidendy tak, aby utrzymać proces ryzyka poniżej poziomu a (zob. Rys. 2). Jak wiadomo z literatury (zob. [5]), dla $0 < x \leq a$ proces ryzyka $U^{\pi^{a,d}}$ względem $\mathbb{P}_x$ odpowiada co do rozkładu procesowi $\{a - Y_t : t \geq 0\}$ względem $\mathbb{P}_x$, gdzie

$$Y_t = \max(a, \overline{X}_t) - X_t$$

jest procesem Lévy'ego X odbitym w supremum: $\overline{X}_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s$. W pracy [P1] rozważamy przypadek, gdy $r = 1$, więc dla dowolnego $x \geq 0$,

$$v^{a,d}(x) := v^{\pi^{a,d}}(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau^{\pi^{a,d}}} e^{-qt} dL_t^{\pi^{a,d}} \right]$$

oraz $L_t^{\pi^{a,d}} = \max(a, \overline{X}_t) - a$.



Rys. 2. Przykładowa trajektoria procesu regulowanego $U^{\pi^{a,d}}$.

Udowodniono, że

$$v^{a,d}(x) = \begin{cases} \frac{V^{(q)}(x)}{V^{(q)\prime}(a)}, & x \leq a, \\ \\ x - a + \frac{V^{(q)}(a)}{V^{(q)\prime}(a)}, & x > a, \end{cases} \tag{41}$$

gdzie $V^{(q)}(x) = \int_0^\infty W^{(q)}(x+z)z\mathbb{P}(X_d \in \mathrm{d}z)$. W szczególności,

$$(v^{a,d})'(a) = 1.$$

Stąd otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 15 (Theorem 4.1 w pracy [P1])**.** *Funkcja wartości $v^{a,d}$ odpowiadająca strategii barierowej $\pi^{a,d}$ jest zadana przez (41). Wtedy ze wzoru (41) wynika, że optymalna bariera a^* spełnia warunek:*

$$a^* = \inf\{a > 0 : V^{(q)\prime}(a) \leq V^{(q)\prime}(y) \quad \textit{dla każdego } y \geq 0\}.$$

W szczególności, jeśli $V^{(q)} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ oraz istnieje jedyne rozwiązanie równania:

$$V^{(q)\prime\prime}(a^*) = 0,$$

to a^* jest optymalną barierą.

Następnie udowodniono, że strategia $\pi^{a^*,d}$ jest optymalna w zbiorze wszystkich dopuszczalnych strategii rozważanych do momentu paryskiej ruiny $\tau^{\pi,d}$ (w pracy [P1] jest to Theorem 5.2). Ten fakt dowodzi się za pomocą *lematu weryfikacyjnego* (zob. [41, 42, 43]), którego założenia wymagają sprawdzenia, że funkcja wartości $v^{a^*,d}$ zadana przez (41) jest q-nadharmoniczna oraz jej pochodna jest większa od jedności, tzn. spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} (\Gamma - q)v^{a^*,d}(x) &\leq 0, \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \\ (v^{a^*,d})'(x) &\geq 1, \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdzie Γ to generator infinitezymalny procesu X. Na koniec udowodniono użyteczny wniosek, który pozwala znaleźć optymalny poziom bariery.

Wniosek **10** (Corollary 5.1 w [P1]). *Niech*

$$V^{(q)\prime}(a) \leq V^{(q)\prime}(b) \qquad \textit{dla każdego } a^* \leq a \leq b.$$

Wtedy strategia barierowa z barierą na poziomie a^* jest optymalna.

W pracy [P6], podobnie jak w [P1], również udowodniono optymalność strategii $\pi^{a^*,d}$. Zasadnicza różnica polega na tym, że w [P6] rozpatrywany jest proces postaci

$$X_t = x + pt - \sum_{i=1}^{N_t} C_i + \sigma B_t,$$

oraz maksymalizujemy następujący funkcjonał, dla $0 < r < 1$ oraz $q > 0$:

$$v^{a,d,r}(x) := v^{\pi^{a,d}}(x) = \mathbb{E}_x\left[r^{N_{\tau^{\pi,d}}} \int_0^{\tau^{\pi^{a,d}}} e^{-qt} dL_t^{\pi^{a,d}}\right]. \tag{42}$$

W tym przypadku również wyprowadzono wzór na funkcję wartości $v^{a,d,r}$:

$$v^{a,d,r}(x) = \begin{cases} h^d(x)v^{a,d}(a) & \text{gdy } x \leq a, \\ x - a + v^{a,d}(a) & \text{gdy } x > a, \end{cases} \tag{43}$$

gdzie $h^d(x) := \mathbb{E}_x\left[r^{N_{\tau_a^+}} e^{-q\tau_a^+}, \tau_a^+ < \tau^d\right]$ to wartość oczekiwana pierwszego momentu dojścia do poziomu a przed paryską ruiną, dyskontowana w czasie i dodatkowo liczbą skoków procesu N. Postać funkcji h^d otrzymano dwiema metodami. Pierwsza z nich wykorzystuje całkowy operator Dicksona-Hippa $(T_\rho f)$, będący pewnym uogólnieniem transformaty Laplace'a (zob. [19]). Wtedy otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 16 (Theorem 3.8 w [P6]). *Niech f będzie gęstością zmiennej losowej C_i dla każdego $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy funkcja h^d jest zadana w następujący sposób:*

1. *Dla $\sigma = d = 0$ oraz $0 \leq x \leq a$,*

$$h^d(x) = h(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\lambda r}{p})^n (T_\rho f)^{*n} * \zeta(x)}{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\lambda r}{p})^n (T_\rho f)^{*n} * \zeta(a)}.$$

2. *Dla $\sigma > 0$, $d = 0$ oraz $0 < x \leq a$,*

$$h^d(x) = h(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2\lambda r}{\sigma^2})^n (\beta * T_\rho f)^{*n} * \zeta * \beta(x)}{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2\lambda r}{\sigma^2})^n (\beta * T_\rho f)^{*n} * \zeta * \beta(a)}.$$

3. *Dla $\sigma = 0$, $d > 0$ oraz $-pd \leq x \leq a$,*

$$h^d(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2\lambda r}{p})^n (T_\rho f)^{*n} * \varphi(x)}{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2\lambda r}{p})^n (T_\rho f)^{*n} * \varphi(a)}.$$

4. Dla $\sigma, d > 0$ oraz $x \leq a$,

$$h^d(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2\lambda r}{\sigma^2})^n(\beta * T_\rho f)^{*n} * \varphi_1(x)}{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2\lambda r}{\sigma^2})^n(\beta * T_\rho f)^{*n} * \varphi_1(a)},$$

gdzie

$$\beta(x) := e^{-\left(\rho+\frac{2p}{\sigma^2}\right)x}, \quad \zeta(x) := e^{\rho x}, \quad \varphi(x) := \zeta(x) - \frac{\lambda r}{p}\zeta * w_d(x),$$

ρ jest jedynym nieujemnym pierwiastkiem fundamentalnego równania Lundberga:

$$\frac{\sigma^2}{2}s^2 + ps - (\lambda + q) + \lambda r \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = 0$$

oraz

$$\varphi_1(x) := \left(\rho + \frac{2p}{\sigma^2}\right)\zeta * \beta(x) + \beta(x) - \frac{2\lambda r}{\sigma^2}\zeta * \beta * w_d(x),$$

$$w_d(x) := \int_0^\infty \int_0^d e^{-qt} \sum_{k=0}^{\infty} r^k v_y(k,t) f(y+x) dt dy.$$

Dla $k \in \mathbb{N}$, $y > 0$, $t \geq 0$

$$v_y(k,t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}(N_{\tau_y^+} = k, \tau_y^+ \leq t | X_0 = 0).$$

Druga metoda oparta jest o teorię fluktuacji dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego i o pewien analogon wykładniczej zamiany miary (2). Zdefiniujmy

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^{\alpha,r}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = r^{N_t} \exp\left(\alpha X_t - \psi_r(\alpha)t\right) = \exp\left(Z_t^\alpha - \psi_r(\alpha)t\right), \tag{44}$$

gdzie $Z_t^\alpha := \alpha X_t + \log(r)N_t = \alpha x + \alpha p t - \sum_{i=1}^{N_t}(\alpha C_i - \log(r)) + \alpha\sigma B_t$. W pracy [P6] udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 17 (Theorem 3.9 w [P6])**.** *Dla $\sigma \geq 0$ oraz $0 \leq x \leq a$, funkcja $h^d(x)$ jest zadana w następujący sposób:*

$$h^d(x) = \mathbb{E}_x\left[r^{N_{\tau_a^+}} e^{-q\tau_a^+}, \tau_a^+ < \tau^d\right] = \frac{\int_0^\infty W_r^{(q)}(x+z)z\mathbb{P}(X_d \in \mathrm{d}z)}{\int_0^\infty W_r^{(q)}(a+z)z\mathbb{P}(X_d \in \mathrm{d}z)}$$

oraz

$$h(x) = h^0(x) = \mathbb{E}_x\left[r^{N_{\tau_a^+}} e^{-q\tau_a^+}, \tau_a^+ < \tau^0\right] = \frac{W_r^{(q)}(x)}{W_r^{(q)}(a)}.$$

Dla funkcji $W_r^{(q)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ zachodzi

$$\int_0^\infty e^{-\theta y} W_r^{(q)}(y) dy = \frac{1}{\psi_r(\theta) - q}, \qquad \theta > \Phi_r(q),$$

gdzie $\psi_r(\theta) := \frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left[e^{\theta X_t + \log(r)N_t}\right] = \frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left[r^{N_t}e^{\theta X_t}\right]$ oraz $\Phi_r(q)$ jest taka, że $\psi_r(\Phi_r(q)) = q$.

Na koniec podobnie jak w pracy [P1] udowodniono optymalność strategii barierowej $\pi^{a^*,d}$ z dodatkowym dyskontowaniem przez liczbę skoków w złożonym procesie Poissona.

5.2 Paryska ruina (Prace [P2]-[P5])

To cykl prac dotyczący paryskiej ruiny w różnych modelach. W pracy [P2] otrzymano tożsamości fluktuacyjne rozważane do momentu paryskiej ruiny z tzw. dolną barierą na poziomie $-a < 0$, takie jak na przykład wyjście z zadanego odcinka czy półprostej. Uzyskane wyniki zostały wyrażone w języku funkcji skalujących i transformat Laplace'a tychże funkcji.

W pracy [P3] rozważano model dyskretny postaci:

$$R_n = u + n - S_n, \tag{45}$$

gdzie $u > 0$ oraz

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} C_i, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zakładamy, że zmienne losowe C_i $(i = 1, 2, \ldots)$ są i.i.d., a dryf procesu wynosi 1. Oznaczmy $\mathbb{P}(C_1 = k) = p_k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Jeśli dodatkowo założymy, że $\mu = \mathbb{E}(C_1) < 1$, to $R_n \to +\infty$ p.n. W powyższym modelu zdefiniowano moment ruiny z paryskim opóźnieniem

$$\tau^d = \inf\{n \in \mathbb{N} : n - \sup\{s < n : R_s > 0\} > d, R_n \leq 0\},$$

gdzie $d \in \{1, 2, \ldots\}$ to z góry ustalony okres czasu. Głównym rezultatem są wyrażenia na prawdopodobieństwa paryskiej ruiny $\mathbb{P}_u(\tau^d < t)$ oraz $\mathbb{P}_u(\tau^d < \infty)$. W pracy [P3] są to następujące twierdzenia.

Twierdzenie 18 (Theorem 1 w [P3])**.** *Dla $u \geq 1$ oraz $t \in \mathbb{N}$, rekurencyjna formuła na prawdopodobieństwo paryskiej ruiny, która nie nastąpi do czasu t, jest następująca.*
Dla $t \leq d + 1$ mamy $\mathbb{P}_u(\tau^d \geq t) = 1$.
Dla $t \geq d + 2$:

$$\mathbb{P}_u(\tau^d \geq t) = \mathbb{P}_u(\tau^0 \geq t - d) + \sum_{s=1}^{t-d-1} \sum_{\omega=1}^{d} \sum_{z=0}^{\omega-1} \mathbb{P}_u(\tau^0 = s, -R_{\tau^0} = z)\mathbb{P}(\tau_{z+1} = \omega)\mathbb{P}_1(\tau^d \geq t - \omega - s),$$

gdzie

$$\mathbb{P}(\tau_x = \omega) = \frac{x}{\omega}\mathbb{P}(R_\omega = x) = \frac{x}{\omega} p^{*\omega}_{\omega - x}$$

oraz $\{p^{*t}_n, n \in \mathbb{N}\}$ oznacza t-krotny splot rozkładu zmiennej losowej C_1.

Prawdopodobieństwa $\mathbb{P}_u(\tau^0 \geq t)$, $\mathbb{P}_u(\tau^0 = s, -R_{\tau^0} = z)$ są dane w poniższych lematach.

Lemat 5 (Lemma 1 w [P3])**.** *Zachodzi $\mathbb{P}_u(\tau^0 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 \geq u + 1)$ oraz dla $t \geq 1$:*

$$\mathbb{P}_u(\tau^0 \geq t + 1) = \sum_{j=0}^{u+t-1} p^{*t}_j - \sum_{j=u+1}^{u+t-1} p^{*(j-u)}_j \left(\sum_{k=j}^{u+t-1} \frac{t + u - k}{t + u - j} p^{*(t+u-j)}_{k-j} \right),$$

Lemat 6 (Lemma 2 w [P3]). *Dla $s \geq 1$ mamy*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_u(\tau^0 = s, -R_{\tau^0} = z) &= \sum_{k=0}^{u+s-2} \mathbb{P}_u(\tau^0 > s-1, S_{s-1} = k) p_{u+s-k+z} \\ &= \sum_{k=0}^{u+s-2} p_k^{*(s-1)} p_{u+s-k+z} - \sum_{k=u+1}^{u+s-2} \sum_{j=u+1}^{k} \frac{s-1+u-k}{s-1+u-j} p_{k-j}^{*(s-1+u-j)} p_j^{*(j-u)} p_{u+s-k+z}.\end{aligned}$$

Dla nieskończonego horyzontu czasowego rezultat jest następujący:

Twierdzenie 19 (Theorem 2 w [P3]). *Dla $u \geq 1$ zachodzi*

$$\mathbb{P}_u(\tau^d < \infty) = (1-\mu) \sum_{j=u+1}^{\infty} p_j^{*(j-u)} - \big(1 - \mathbb{P}_1(\tau^d < \infty)\big) \sum_{z=0}^{d-1} \mathbb{P}_u(\tau^0 < \infty, -R_{\tau^0} = z) \mathbb{P}(\tau_{z+1} \leq d),$$

gdzie

$$\mathbb{P}_u(\tau^0 < \infty) = (1-\mu) \sum_{j=u+1}^{\infty} p_j^{*(j-u)}$$

oraz

$$\mathbb{P}_1(\tau^d < \infty) = \frac{\mathbb{P}_1(\tau^0 < \infty) - \sum_{z=0}^{d-1} \mathbb{P}_1(\tau^0 < \infty, -R_{\tau^0} = z) \mathbb{P}(\tau_{z+1} \leq d)}{1 - \sum_{z=0}^{d-1} \mathbb{P}_1(\tau^0 < \infty, -R_{\tau^0} = z) \mathbb{P}(\tau_{z+1} \leq d)}.$$

Powyższe formuły są rekurencyjne, dzięki czemu dobierając konkretne parametry procesu, można dokonać wnikliwej analizy numerycznej prawdopodobieństwa paryskiej ruiny, tak jak w rozdziale 6 pracy [P3], gdzie rozważano również ciężkoogonowe skoki procesu R. Dodatkowo w pracy [P3] wyznaczono asymptotyki ciężko- i lekkoogonowe dla prawdopodobieństwa paryskiej ruiny w przypadku, gdy $u \to \infty$.

Praca [P4] dotyczy tak zwanego rozkładu quasi-stacjonarnego warunkowanego względem paryskiego momentu zatrzymania. Oznacza to, że głównym celem pracy było wyznaczenie następującej granicy, zwanej także granicą Yagloma:

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathbb{P}_x(X_t \in B | \tau^\theta > t) = \mu_x^\theta(B), \qquad B \in \mathcal{B}([0,\infty)), \tag{46}$$

gdzie τ^θ jest paryskim momentem zatrzymania zdefiniowanym w następujący sposób:

$$\tau^\theta = \inf\{t > 0 : t - \sup\{s < t : X_s \geq 0\} \geq e_\theta, X_t < 0\},$$

gdzie e_θ jest niezależną od X wykładniczą zmienną losową z parametrem θ. Moment ruiny τ^θ następuje, gdy proces X_t jest poniżej poziomu zero przez okres dłuższy niż e_θ. Należy tu zaznaczyć, że w definicji czasu zatrzymania τ^θ mamy doczynienia nie z jedną zmienną losową e_θ, ale z całą rodziną takich zmiennych, gdzie każda jest związana z osobną wycieczką poniżej zera. Taki model paryskiego opóźnienia był już wcześniej rozważany w literaturze przez [6, 38]. W pracy [P4] rozważano dwa przypadki, kiedy proces Lévy'ego X jest spektralnie ujemny (miara Lévy'ego ma nośnik na $(-\infty, 0)$) albo spektralnie dodatni (miara Lévy'ego ma nośnik na $(0, \infty)$). Dla obu przypadków otrzymano asymptotykę (46), gdzie idea dowodowa polegała na znalezieniu podwójnej transformaty Laplace'a dla $\mathbb{P}_x(X_t \in dy, \tau^\theta > t)$ względem czasu i przestrzeni. Następnie dla pewnej określonej postaci miary Lévy'ego przy użyciu twierdzeń tauberowskich oraz tzw. zasady Heaviside'a otrzymano szukaną asymptotykę, gdy $t \to \infty$ (w pracy [P4] są to Twierdzenia 7 i 11).

W pracy [P5] rozważany jest proces Craméra–Lundberga (1), dla którego wyznaczono łączny rozkład czasu oraz liczby skoków do momentu paryskiej ruiny. W pracy badano jest zarówno skończony jak i nieskończony horyzont czasowy. Takie podejście dla momentu klasycznej ruiny było już wcześniej rozpatrywane m.in. w pracach [20, 22, 37, 52]. Formalnie dla paryskiego momentu zatrzymania τ^d zdefiniujmy

$$w_x^d(k,t) := \frac{d}{dt}\psi_x^d(k,t), \quad k \in \mathbb{N}, t \geq d,$$

gdzie

$$\psi_x^d(k,t) = \mathbb{P}(N_{\tau^d} = k, \tau^d \leq t | X(0) = x), \quad k \in \mathbb{N}, t \geq d.$$

Dalej niech $p_x^d(k)$ oznacza prawdopodobieństwo, że było k skoków do momentu paryskiej ruiny rozważanej na nieskończonym horyzoncie czasowym. Wtedy

$$p_x^d(k) \quad = \quad \mathbb{P}(N_{\tau^d} = k, \tau^d \leq \infty | X(0) = x) = \int_d^\infty w_x^d(k,t)dt.$$

Głównym rezultatem pracy [P5] są otrzymane formuły na gęstość $w_x^d(k,t)$ oraz prawdopodobieństwo $p_x^d(k)$ (Twierdzenia 2.3 oraz 2.7 w pracy [P5]). Otrzymane wzory są rekurencyjne. Do ich wyprowadzenia użyto mocnej własności Markowa a także postaci generatora infinitezymalnego procesu Craméra–Lundberga, co doprowadziło do otrzymania pewnego równania różniczkowo-całkowego. Rozwiązanie owego równania skutkowało znalezieniem wzorów na $w_x^d(k,t)$ oraz $p_x^d(k)$. W dalszej części pracy założono rozkład Erlanga dla skoków rozważanego procesu. Wtedy stosując nowy algorytm iteracyjny zaproponowany w [P5], znaleziono numerycznie powyższą gęstość i prawdopodobieństwo dla wybranych parametrów procesu.

5.3 Optymalna dywidenda w modelu wielokrotnie-załamanym (Praca [P7])
Praca [P7] dotyczy wypłat dywidend modelu wielokrotnie załamanym i wykorzystuje formuły fluktuacyjne otrzymane w pracy [H4]. Rozważany proces Lévy'ego $X = \{X_t; t \geq 0\}$ modeluje bogactwo firmy ubezpieczeniowej w przypadku braku dywidend. Dodatkowo zakładamy, że X jest *spektralnie dodatni*, co oznacza, że nie ma skoków w dół oraz zakładamy, że nie jest subordynatorem. Dopuszczalna strategia $\pi := (L^\pi(t), R^\pi(t); t \geq 0)$ to zbiór niemalejących, prawostronnie ciągłych, adaptowalnych procesów takich, że $L^\pi(0-) = R^\pi(0-) = 0$. Dodatkowo zakładamy, że $\delta_i > 0$ dla $i = 1, 2$, oraz L^π, R^π są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a i są postaci $L^\pi(t) = \int_0^t l^\pi(s)ds$, $R^\pi(t) = \int_0^t r^\pi(s)ds$; $t \geq 0$, gdzie l^π, r^π przyjmują wartości w przedziałach $[0, \delta_1]$ oraz $[0, \delta_2]$ odpowiednio, jednostajnie w czasie. Przez $V^\pi = X_t - L^\pi(t) + R^\pi(t)$ oznaczamy proces ryzyka kontrolowany przez strategię dywidendową π. Proces $L^\pi(t)$ modeluje dywidendowe wypłaty, natomiast proces $R^\pi(t)$ odpowiada za tzw. „zastrzyki kapitału", które robione są po to, aby uniknąć

przedwczesnej ruiny. Załóżmy, że $\beta > 1$ to koszt jednostkowy wniesionego kapitału do firmy, $\rho \in \mathbb{R}$ to końcowa wypłata (gdy $\rho \geq 0$) lub kara (gdy $\rho \leq 0$) w momencie ruiny oraz $q > 0$ to czynnik dyskontujący. Zdefiniujmy klasyczny moment ruiny $\tau_0^\pi := \inf\{t > 0 : V^\pi(t) < 0\}$ oraz następujący funkcjonał całkowy

$$v_\pi(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^\pi} e^{-qt} l^\pi(t) dt - \beta \int_0^{\tau_0^\pi} e^{-qt} r^\pi(t) dt + \rho e^{-q\tau_0^\pi} \right], \quad x \geq 0. \tag{47}$$

Celem pracy było znalezienie $v(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x)$, gdzie $\mathcal{A}$ to zbiór wszystkich dopuszczalnych strategii spełniających powyższe założenia. Jak udowodniono w [P7] proces *multi-refracted*, który został wcześniej zdefiniowany i scharakteryzowany w [H4], dla $k = 2$ jest rozwiązaniem powyższego problemu tzn. strategia dywidendowa z nim związana spełnia (47) oraz jest optymalna.

Literatura

[1] D. Applebaum, Lévy processes–from probability to finance and quantum groups. *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(11): 1336–1347, 2004.

[2] S. Asmussen, Ruin Probabilities, World Scientific, Singapore, 2000.

[3] S. Assmusen, Applied Probability and Queues. 2nd ed. Springer, New York, 2003.

[4] S. Asmussen, F. Avram and M.R. Pistorius, Russian and American put options under exponential phase-type Lévy models. Stoch. Proc. Appl., 109, 79–111, 2004.

[5] F. Avram, Z. Palmowski and M.R. Pistorius, On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process. Ann. Appl. Probab., 17, 156–180, 2007.

[6] E.J. Baurdoux, J.C. Pardo, J.L. Pérez, J.-F. Renaud, Gerber-Shiu distribution at Parisian ruin for Lévy insurance risk processes. Journal of Applied Probability, 53(2):572–584, 2014.

[7] J. Bertoin, *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[8] J. Bertoin and R. Doney, Cramér's estimate for Lévy processes. *Stat. Probab. Lett.,* 21(5), 363–365, 1994.

[9] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[10] T. Chan, A.E. Kyprianou, M. Savov, Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes. Probability Theory and Related Fields, 150(3): 691–708, 2011.

[11] M. Chesney, M. Jeanblanc-Picqué, M. Yor, Brownian excursions and Parisian barrier options, Adv. in Appl. Probab., 29, 165–184, 1997.

[12] R. Cont, P. Tankov, Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[13] I. Czarna, Z. Palmowski, Ruin probability with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process, Journal of Applied Probability, Vol. 48, No. 4, 984–1002, 2011.

[14] I. Czarna, J.-L. Pérez, K. Yamazaki, Optimality of multi-refraction dividend strategies in the dual model. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 83, 148–160, 2018.

[15] A. Dassios and S. Wu (2009). Parisian ruin with exponential claims. Department of Statistics, London School of Economics and Political Science, London, UK, see http://www2.lse.ac.uk.

[16] A. Dassios and S. Wu (2009). Ruin probabilities of the Parisian type for small claims. Department of Statistics, London School of Economics and Political Science, London, UK, see http://www2.lse.ac.uk.

[17] A. Dassios and S. Wu, Perturbed Brownian motion and its application to Parisian option pricing. Finance and Stochastics, 14(3), 473–494, 2010.

[18] K. Dębicki, E. Hashorva, L. Ji, Parisian ruin of self-similar Gaussian risk processes, Journal of Applied Probability, volume 52, number 3, 688–702, 2015.

[19] D. C. M. Dickson and C. Hipp, On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics, 29(3):333–344, 2001.

[20] D. C. M. Dickson, The joint distribution of the time to ruin and the number of claims until ruin in the classical risk model. Insurance: Mathematics and Economics, 50(3): 334–337, 2012.

[21] R. A. Doney, *Fluctuation theory for Lévy processes*, volume 1897 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007. Lectures from the 35th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–23, 2005, Edited and with a foreword by Jean Picard.

[22] E. Frostig, S.M. Pitts, and K. Politis, The time to ruin and the number of claims until ruin for phase-type claims. Insurance: Mathematics and Economics, 51(1):19–25, 2012.

[23] E. Frostig, A. Keren-Pinhasik, Parisian Ruin with Erlang Delay and a Lower Bankruptcy Barrier. Methodol. Comput. Appl. Probab., 2019.

[24] H. Gerber and E. Shiu, On optimal dividends: From reflection to refraction. J. Comput. Appl. Math., 186 (2006) 4–22. MR2190037.

[25] H. Gerber and E. Shiu, On optimal dividend strategies in the compound Poisson model. N. Am. Actuar. J., 10 (2006) 76–93. MR2328638.

[26] G. Gripenberg, S. Londen, and O. Staffans, Volterra integral and functional equations, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, 1990.

[27] D.I. Hadjiev, The first passage problem for generalized Ornstein–Uhlenbeck processes with nonpositive jumps, *Séminaire de probabilités* , Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1985.

[28] G. Karch, W. A. Woyczyński, Fractal Hamilton-Jacobi-KPZ equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(5):2423–2442, 2008.

[29] C. Klüppelberg, A.E. Kyprianou and R. Maller, Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. Ann. Appl. Probab., 14(4), 1766–1801, 2004.

[30] V.S. Korolyuk, Boundary problems for a compound Poisson process. Theory Probab. Appl., 19, 1—14, 1974.

[31] A.E. Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[32] A.E. Kyprianou, V. Rivero, Special, conjugate and complete scale functions for spectrally negative Lévy processes. Electron. J. Probab., 57, 1672–1701 (2008)

[33] A.E. Kyprianou, and R. L. Loeffen, Refracted Lévy processes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, vol. 46, no. 1, 24–44, 2010.

[34] A.E. Kyprianou, V. Rivero and R. Song, Convexity and Smoothness of Scale Functions and de Finetti's Control Problem. J. Theor. Probab., 23: 547–564, 2010.

[35] A.E. Kyprianou, R.L. Loeffen and J.-L. Pérez, Optimal control with absolutely continuous strategies for spectrally negative Lévy processes. J. Appl. Probab., vol. 49, no. 1, 150–166, 2012.

[36] A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou, and V. Rivero, The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes, Lévy Matters-Springer Lecture Notes in Mathematics, 2012.

[37] D. Landriault, T. Shi, and G.E. Willmot, Joint densities involving the time to ruin in the Sparre Andersen risk model under exponential assumptions. Insurance: Mathematics and Economics, 49(3):371-379, 2011.

[38] D. Landriault, J.-F. Renaud, and X. Zhou, An insurance risk models with Parisian implementation delays. *Methodol. Comput. Appl. Probab.,* 16(3), 583–607, 2014.

[39] E. H. Lieb, R. Seiringer, *The stability of matter in quantum mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[40] A. Lindner and R.A. Maller, Lévy integrals and the stationarity of generalised Ornstein–Uhlenbeck processes. Stoch. Proc. Appl., 115, 1701–1722, 2005.

[41] P.L. Lions, Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations I, Comm. Partial Differential Equations, 8, pp. 1101–1134, 1983.

[42] P.L. Lions, Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, part 2: Viscosity solutions and uniqueness, Comm. Partial Differential Equations, 11, pp. 1229–1276, 1983.

[43] R.L. Loeffen, On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes. Ann. Appl. Probab., vol. 18, no. 5, 1669–1680, 2008.

[44] R.L. Loeffen, J.-F. Renaud, X. Zhou, Occupation times of intervals until first passage times for spectrally negative Lévy processes. Stochast. Process. Appl., 124(3), 1408–1435, 2014.

[45] R.L. Loeffen, Z. Palmowski, B. Surya, Discounted Penalty Function at Parisian Ruin for Lévy Insurance Risk Process, Insurance: Mathematics and Economics, 83, 190-197, 2018.

[46] A.A. Novikov, Martingales and First-exit times for the Ornstein-Uhlenbeck process with jumps. Theory Probab. Appl., 48, 288–303, 2004.

[47] P. Patie, On a martingale associated to generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and an applica- tion to finance. Stochast. Process. Appl., 115, 593–607, 2005.

[48] J.-F. Renaud, On the time spent in the red by a refracted Lévy risk process. Journal of Applied Probability, 51(4), 2014.

[49] D. Revuz and M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion. Third edition. Springer-Verlag, 1999.

[50] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J.L. Teugles, *Stochastic processes for insurance and finance*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999.

[51] C. Yang, K.P. Sendova and Z. Li, On the Parisian ruin of the dual Lévy risk model. Journal of Applied Probability, 54(4):1193-1212, 2017.

[52] C. Zhao and C. Zhang, Joint density of the number of claims until ruin and the time to ruin in the delayed renewal risk model with Erlang(n) claims. Journal of Computational and Applied Mathematics, 244:102-114, 2013.

Irmina Czarna