

AUTOREFERAT

1 Imię i nazwisko

Ilona Iglewska-Nowak

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- 2002 magister matematyki,
Instytut Matematyki, Uniwersytet Poczdamski (Niemcy),
praca magisterska *Wavelet correlation dimension and its applications*,
promotor: prof. dr Matthias Holschneider
- 2007 doktor nauk przyrodniczych,
Instytut Matematyki, Uniwersytet Poczdamski (Niemcy),
praca doktorska *Poisson wavelet frames on the sphere*,
promotor: prof. dr Matthias Holschneider
- 2008 doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki (nostryfikacja),
Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- II 2002 – VII 2007 asystent w Katedrze Matematyki Stosowanej,
Instytut Matematyki, Uniwersytet Poczdamski (Niemcy)
- X 2007 – IX 2008 adiunkt w Katedrze Metod Ilościowych,
Zachodniopomorska Szkoła Biznesu w Szczecinie
- X 2008 – obecnie adiunkt w Studium Matematyki,
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
(do grudnia 2008 r. Politechnika Szczecińska)

4 Wskazanie osiągnięć uzyskanych zgodnie z art. 16 ust. 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (DzU nr 65, poz. 595 ze zm.)

(a) Tytuł cyklu publikacji, stanowiącego podstawę do ubiegania się
o nadanie stopnia doktora habilitowanego

*Teoria ciągłych transformat falkowych na sferach n -wymiarowych
i dyskretnych ramek falkowych dla $\mathcal{L}^2(S^n)$*

(b) Lista publikacji składających się na powyższy cykl

[H1] I. Iglewska-Nowak, *Continuous wavelet transforms on n -dimensional spheres*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 39 (2015), no. 2, 248–276.

[H2] I. Iglewska-Nowak, *Poisson wavelets on n -dimensional spheres*, J. Fourier Anal. Appl. 21 (2015), no. 1, 206–227.

[H3] I. Iglewska-Nowak, *Semi-continuous and discrete wavelet frames on n -dimensional spheres*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 40 (2016), no. 3, 529–552.

[H4] I. Iglewska-Nowak, *Directional wavelets on n -dimensional spheres*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 44 (2018), no. 2, 201–229.

[H5] I. Iglewska-Nowak, *Frames of directional wavelets on n -dimensional spheres*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 43 (2017), no. 1, 148–161.

(c) Omówienie wyżej wymienionych artykułów i uzyskanych wyników
oraz ich ewentualnego wykorzystania

4.1 Trochę historii

W ostatnich dekadach widoczny jest istotny wzrost zainteresowania analizą danych na sferach wielowymiarowych. Zagadnienia statystyczne, cyfrowe rozpoznawanie obrazu, obrazowanie medyczne, chemia kwantowa czy krystalografia to tylko niektóre z dziedzin, w których znajduje ona zastosowanie.

Największy problem przy zdefiniowaniu ciągłej transformaty falkowej stanowi brak naturalnego operatora dylatacji na sferze. Obecnie najczęściej stosowane są dwa istotnie różne sposoby na pokonanie tej przeszkody.

4.1.1 Falki oparte na teorii grup

Prawdopodobnie najbardziej popularnym jest ten bazujący na teorii grup, wprowadzony przez Antoine'a i Vandergheynsta w artykule [4] (patrz również [5] dla przypadku dwuwymiarowego). Dylatacja (z parametrem $\rho \in \mathbb{R}_+$) jest realizowana w przestrzeni stycznej do sfery, na którą falki są rzutowane za pomocą projekcji stereograficznej. Odwrotna projekcja stereograficzna przekształca poddane dylatacji funkcje na przestrzeni euklidesowej na falki sferyczne dla skali ρ . Sama konstrukcja jest dość skomplikowana obliczeniowo, ale falki mają sporo pożądanych właściwości (badanych przeważnie w przypadku dwuwymiarowym). Są to: istnienie szybkich algorytmów bazujących na FFT i transformaty kierunkowej [2, 49, 64, 50] oraz dyskretne ramek (*frames*) falkowych, których konstrukcja oparta jest na równokątnym próbkowaniu względem każdej zmiennej sferycznej [10, 1, 51]. Nieco inne podejście do problemu zostało zaprezentowane w pracy [63], gdzie falki bazujące na teorii grup zostały na nowo zdefiniowane w bardziej bezpośredni sposób. W artykule tym udowodniono również, że odwrotna projekcja stereograficzna falek euklidesowych daje falki sferyczne.

4.1.2 Falki indeksowane parametrem skali

Na innej koncepcji oparty jest szereg definicji, w których falę sferyczną stanowi rodzina funkcji indeksowana parametrem skali $\rho \in \mathbb{R}_+$, a dylatacja polega na wyborze wartości tego parametru. Poniżej omówione są najważniejsze z nich.

Najstarsza, bazująca na teorii całek osobliwych i identyczności aproksymowanych [6], opracowana została przez Freedena, Windheusera i in. dla sfer dwuwymiarowych w latach dziewięćdziesiątych XX w. [25, 28, 27, 26, 24]. Na początku XXI w. została uogólniona przez Bernstein i in. do trzech [7, 8] i n [20, 19] wymiarów. Przykładem są falki dyfuzyjne z rozprawy doktorskiej Eberta [19]. Identyczności aproksymowane generują falki obrotowo symetryczne (najważniejszymi przykładami są falki Gaussa-Weierstrassa oraz Abela-Poissona), jednak począwszy od 2009 r. wprowadzono również pojęcie falek niezonalnych [20, 9].

Innym przykładem jest definicja falek używana przez Holschneidera i jego współpracowników [39, 40, 15] – transformata falkowa oraz odwrotna wyrażają się tymi samymi wzorami co w pracach Freedena i in. oraz Bernstein i in., również dylatacja jest oparta na wyborze parametru. Najważniejsza różnica związana jest z dowodzeniem zbieżności: w poprzednim sposobie falki wyprowadzone są z identyczności aproksymowanych i w tym przypadku transformata falkowa i odwrotna są zbieżne dla każdego sygnału całkowalnego w kwadracie. Tutaj natomiast sytuacja jest odwrotna: jeśli analiza i synteza falkowa za pomocą rodziny funkcji są zbieżne dla każdej funkcji całkowalnej w kwadracie, rodzinę taką nazywamy falą. Przykładem jest falka Poissona wprowadzona w artykule [40], patrz też [41]. Według mojej wiedzy jest to jedyna rodzina falek zaimplementowana i zastosowana w obliczeniach [40, 38].

W 2006 r. zaprezentowano kolejny rodzaj falek indeksowanych parametrem skali. *Needlets*, wprowadzone przez Narcowitcha i in. w artykule [53] (patrz również [52]), mają doskonałą lokalizację punktową i własności aproksymacyjne oraz stanowią ścisłą ramkę na sferze. Istotną różnicą w stosunku do wcześniejszych konstrukcji jest to, że *needlets* mają zwarte spektrum.

Konstrukcja podobna do *needlets* została zaproponowana przez Gellera i Mayeli w artykułach [32, 33] (różnice omówione są w Rozdziale 1.1 artykułu [32]). Falki są jądrami operatora $f(t\Delta^*)$, gdzie $0 \neq f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$, $f(0) \neq 0$, a Δ^* oznacza powierzchniowy operator Laplace'a-Beltramiego. W przypadku sfery prowadzi to do falek zonalnych postaci

$$K_\rho(\hat{e}, y) = \frac{1}{\Sigma_n} \sum_{l=0}^{\infty} f(\rho^{2l}(l+2\lambda)) \frac{\lambda+l}{\lambda} C_l^\lambda(y) \quad (1)$$

(oznaczenia – patrz Rozdział 4.3). Jako przykład autorzy badają falkę daną funkcją $f(s) = se^{-s}$. Warto zauważyć, że jest to dokładnie liniowa falka Gaussa-Weierstrassa według teorii Freedena-Windheusera. Transformatę falkową nazywamy liniową, jeżeli przy rekonstrukcji nie używa się falki. W przeciwnym wypadku mamy do czynienia z transformata falkową dwuliniową (tak jak w artykule [32], patrz [32, Twierdzenie 5.4]). Nie można zatem identyfikować tych dwu konstrukcji. W artykule [48] wprowadzona jest nazwa *Mexican needlets* dla jąder danych wzorem (1), gdzie $f(s) = s^r e^{-s}$, $r \in \mathbb{N}$. Dwuliniowa falka Gaussa-Weierstrassa może być traktowana jako *Mexican needlet* rzędu $\frac{1}{2}$, gdyby rozszerzyć tę teorię do funkcji o wykładnikach wymiernych. Ze względu na doskonałe własności lokalizacyjne, jądra (1) dają ramkę prawie ścisłą. Nie jest ono ścisłe ze względu na nieograniczoność spektrum. Własności statystyczne oraz zastosowania *Mexican needlets* opisane są w artykułach [46, 48], natomiast badanie przestrzeni Besova za ich pomocą – w artykułach [31, 35].

Uogólnieniem tego pojęcia są *needlet-type spin wavelets* służące do badania cięć wiązek liniowych zamiast funkcji skalarnych [30]. Również w tym przypadku istnieją ramki prawie ścisłe [34]. Ich własności statystyczne zbadane są m.in. w artykule [29].

4.2 Podsumowanie wyników

W artykułach [H1–H5] rozwinęłam teorię falek wywiedzionych z identyczności aproksymowanych. Bazuje ona na definicji podanej w artykule [20], najbardziej ogólnej dotychczas, mianowicie dotyczącej sfer wielowymiarowych i falek, które niekoniecznie są osiowo symetryczne (zonalne). W [H1] udowodniłam kilka ważnych własności falek i transformaty falkowej takich jak istnienie granicy euklidesowej (której znaczenie podkreślane jest szczególnie w artykułach Holschneidera i jego współpracowników) oraz fakt, że transformata falkowa jest izometrią. Zainspirowana pracami Freedena i in. rozwinęłam teorię niezonalnych *liniowych* falek na sferach n -wymiarowych. Teoria przedstawiona w [H1] uogólnia

kilka znanych koncepcji. W Rozdziale 5 [H1] wykazałam, że falki Holschneidera, *Mexican needlets* i dyfuzyjne falki Eberta są szczególnymi przypadkami falek wywiedzionych z identyczności aproksymowanych. Istotnie różną jest jedynie teoria autorstwa Antoine’a i Vanderghейnsta.

Ciekawym przypadkiem szczególnym są falki Poissona. Zdefiniowane zostały w artykule [15] jako pewne pochodne jądra Poissona na sferze. Choć stosunkowo często stosowane, zdawały się nie mieć solidnej podstawy teoretycznej. Definicja falek sferycznych wprowadzona przez Holschneidera w artykule [39] była dość szeroko krytykowana za doraźny wybór parametru skali, patrz np. [3, 5, 4, 14, 23, 49]. Innym jej słabym punktem jest brak niezależności definicji: w przypadku falek obrotowo symetrycznych wyraźnie jest powiedziane, że wzór transformaty odwrotnej jest prawidłowy, jeśli całka jest zbieżna, patrz [40, Rozdział 2.2.2]. W artykule [H2] wykazałam, że rodzina falek Poissona, uogólniona do funkcji na sferze n -wymiarowej, spełnia bardziej restrykcyjne warunki definicji z [20] lub [H1] zarówno dla falek dwuliniowych, jak i liniowych. Dowód tego stwierdzenia wymagał dogłębnej analizy własności falek Poissona, w szczególności oszacowania lokalizacji, które uzyskałam w wyniku badania zachowania pewnych funkcji niewymiernych pod wpływem różniczkowania. Wprowadziłam również jawne wzory na

- rozszerzenie harmoniczne falek Poissona do funkcji na $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{r\hat{e}\}$, gdzie $r\hat{e}$ oznacza lokalizację źródła pola opisanego przez odpowiednie jądro Poissona zarówno jako szereg nieskończony funkcji wymiernych zmiennych $e^{-\rho}$ oraz $\cos \vartheta$, jak i sumy skończonej funkcji wymiernych zmiennych $e^{-\rho}$ i $\cos \chi$, gdzie χ jest pewnym kątem opisującym położenie punktu względem źródła pola,
- falki Poissona jako funkcje współrzędnych sferycznych,
- ich granicę euklidesową.

Ponadto udowodniłam, że granica euklidesowa falek Poissona maleje wielomianowo w nieskończoności.

Dla efektywnego wykorzystania ciągłej transformaty falkowej niezbędny jest algorytm dyskretyzacji. Dla falek zdefiniowanych w artykule [5] skonstruowano ramki, patrz [1, 10]. Trudno jednak uogólnić je na sfery wielowymiarowe, gdyż dyskretyzacja przebiega na siatkach równokątnych, co powoduje koncentrację próbek przy biegunach.

W artykule [H3] wykazałam, że pod pewnymi warunkami n -wymiarowe falki sferyczne wywiedzione z identyczności aproksymowanych tworzą ramki półciągłe. Ponadto dla siatek dostatecznie gęstych falki Poissona na sferach n -wymiarowych stanowią ramki dyskretne. Jest to uogólnienie wyników uzyskanych w artykule [45] dla sfer dwuwymiarowych.

Konstrukcja ramek półciągłych jest podobna do opisanej w artykułach [1, 10] dla sfery dwuwymiarowej. W następnym kroku wykonuje się dyskretyzację parametru sferycznego, tak że próbki rozłożone są mniej więcej równomiernie na sferze. Następnie dodawane jest

zakłócenie w taki sposób, że gęstość powstającej w jego wyniku siatki jest mierzona jednocześnie względem parametru skali i położenia. Jeśli gęstość ta jest wystarczająco duża, dyskretny zbiór falek stanowi ramkę dla $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$. Warunkiem istnienia takich dyskretnych ramek są pewne ograniczenia jądra reprodukującego i jego gradientu. Bazując na oszacowaniach z [H2], udowodniłam, że są one spełnione przez faleki Poissona.

Artykuł [H4] zawiera definicję kierunkowych, tzn. niezonalnych, falek Poissona na sferach n -wymiarowych. W przeciwieństwie do falek badanych w artykułach [H1–H3] faleki kierunkowe nie są osiowo symetryczne. W związku z tym lepiej od dotychczas opisanych nadają się do badania sygnałów charakteryzujących się detalami zorientowanymi, takich jak np. mapa konturowa Ziemi. Kierunkowe faleki Poissona są pochodnymi kierunkowymi jądra Poissona i stanowią uogólnienie dwuwymiarowych falek używanych przez Hayna i Holschneidera w artykule [38] do przypadku wielowymiarowego. Pewne ich kombinacje liniowe spełniają warunki definicji falek podanej przez Eberta i in. w artykule [20], będącej zmodyfikowaną wersją definicji z [H1]. Według mojej wiedzy była to pierwsza próba zdefiniowania konkretnej rodziny falek wywiedzionej z identyczności aproksymowanych, która to rodzina nie byłaby osiowo symetryczna. Jest to podejście alternatywne do sferycznych *curvelets* oraz *ridgelets* wprowadzonych w artykułach [58, 59]. Jego zaletą jest to, że nie wymaga podziału sfery, kłopotliwego w przypadku n -wymiarowym.

W artykule [H4] zbadalam niektóre własności kierunkowych falek Poissona, m.in. wyprowadziłam wzory rekurencyjne na ich współczynniki Fouriera, jawne przedstawienia niektórych falek jako funkcji współrzędnych sferycznych oraz jawny wzór na granice euklidesowe.

Celem moich badań było skonstruowanie w pełni dyskretnych ramek falek niezonalnych. Udało się to kosztem osłabienia warunków definicji falki użytej w [H1]. W artykule [H5] wprowadziłam ciągłą transformatę falkową na sferze n -wymiarowej, odwracalną wyłącznie za pomocą metod znanych z teorii ramek. Bazując na tej definicji, skonstruowałam obszerną klasę falek zawierającą zarówno funkcje zonalne, jak i niezonalne i zawierającą wszystkie dotychczas opisane rodziny falek (wywiedzionych z identyczności aproksymowanych). Ponadto wykazałam, że istnieją ich dyskretne ramki. Wszystkie znane mi dotychczas ramki na sferach wielowymiarowych konstruowane są na bazie falek osiowo symetrycznych. Moje badania stanowią pierwszą próbę dyskretyzacji transformaty falkowej kierunkowej.

4.3 Wiadomości wstępne

4.3.1 Funkcje na sferze

\mathcal{S}^n oznacza n -wymiarową sferę jednostkową w $n+1$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^{n+1} z obrotowo niezmienniczą miarą $d\sigma$ unormowaną tak, że

$$\Sigma_n = \int_{\mathcal{S}^n} d\sigma = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

Element powierzchni $d\sigma$ dany jest wzorem

$$d\sigma = \sin^{n-1} \vartheta_1 \sin^{n-2} \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-1} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{n-1} d\varphi,$$

gdzie $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}, \varphi) \in [0, \pi]^{n-1} \times [0, 2\pi)$ to współrzędne sferyczne:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \vartheta_1, \\ x_2 &= \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \\ x_3 &= \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3, \\ &\dots \\ x_{n-1} &= \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \cos \vartheta_{n-1}, \\ x_n &= \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \sin \vartheta_{n-1} \cos \varphi, \\ x_{n+1} &= \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \sin \vartheta_{n-1} \sin \varphi. \end{aligned}$$

$\langle x, y \rangle$ lub $x \cdot y$ oznacza iloczyn skalarny wektorów o początku w O i końcu na sferze. Dopóki jest to jednoznaczne, wektory takie są identyfikowane z punktami na sferze.

Norma w $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ dana jest wzorem

$$\|f\|_2 = \left[\frac{1}{\Sigma_n} \int_{\mathcal{S}^n} |f(x)|^2 d\sigma(x) \right]^{1/2},$$

natomiast iloczyn skalarny funkcji $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ jest zdefiniowany jako

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)} = \frac{1}{\Sigma_n} \int_{\mathcal{S}^n} \overline{f(x)} g(x) d\sigma(x),$$

tak że $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$. Funkcję nazywamy zonalną, jeśli jej wartość zależy wyłącznie od $\vartheta = \vartheta_1 = \langle \hat{e}, x \rangle$, gdzie \hat{e} oznacza biegun północny sfery:

$$\hat{e} = (1, 0, 0, \dots, 0).$$

Funkcja taka jest niezmiennicza względem obrotu wokół osi przechodzącej przez O i \hat{e} . Dopóki nie jest to źródłem nieporozumień, używam oznaczenia

$$f(x) = f(\cos \vartheta_1).$$

Wielomiany Gegenbauera C_l^λ rzędu $\lambda \in \mathbb{R}$ i stopnia $l \in \mathbb{N}_0$ zdefiniowane są poprzez funkcję generującą:

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l^\lambda(t) r^l = \frac{1}{(1 - 2tr + r^2)^\lambda}, \quad t \in [-1, 1].$$

Zbiór wielomianów Gegenbauera $\{C_l^\lambda\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ stanowi zupełny system ortogonalny na $[-1, 1]$ z wagą $(1 - t^2)^{\lambda-1/2}$. Jest on zatem bazą ortogonalną funkcji zonalnych na $2\lambda + 1$ -wymiarowej sferze. Liczby n i λ , spełniające zależność

$$n = 2\lambda + 1,$$

używane będą zamiennie.

Niech Q_l oznacza wielomian na \mathbb{R}^{n+1} , jednorodny stopnia l , tzn. taki, że $Q_l(az) = a^l Q_l(z)$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$ oraz $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, i harmoniczny w \mathbb{R}^{n+1} , tzn. spełniający warunek $\nabla^2 Q_l(z) = 0$. Wówczas $Y_l(x) = Q_l(x)$, $x \in \mathcal{S}^n$, nazywana jest harmoniką hipersferyczną stopnia l . Zbiór harmonik hipersferycznych stopnia l oznaczany jest $\mathcal{H}_l(\mathcal{S}^n)$. Liczbę liniowo niezależnych harmonik hipersferycznych stopnia l oznacza się przez $N = N(n, l)$. Harmoniki hipersferyczne różnych stopni są do siebie prostopadłe. Twierdzenie o sumie harmonik hipersferycznych mówi, że

$$C_l^\lambda(x \cdot y) = \frac{\lambda}{\lambda + l} \sum_{\kappa=1}^N \overline{Y_l^\kappa(x)} Y_l^\kappa(y) \quad (2)$$

dla każdego ortonormalnego zbioru $\{Y_l^\kappa\}_{\kappa=1,2,\dots,N(n,l)}$ harmonik hipersferycznych stopnia l na \mathcal{S}^n . Baza ortonormalna przestrzeni $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n) = \bigoplus_{l=0}^\infty \mathcal{H}_l$, której używałam w moich pracach, składa się z harmonik hipersferycznych danych wzorami

$$Y_l^k(x) = A_l^k \prod_{\tau=1}^{n-1} C_{k_{\tau-1}-k_\tau}^{\frac{n-\tau}{2}+k_\tau}(\cos \vartheta_\tau) \sin^{k_\tau} \vartheta_\tau \cdot e^{\pm i k_{n-1} \varphi}, \quad (3)$$

gdzie $l = k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-1} \geq 0$, k jest ciągiem $(k_1, \dots, \pm k_{n-1})$ liczb całkowitych, natomiast A_l^k są pewnymi stałymi, patrz [62, Rozdział IX.3.6, wzory (4) i (5)]. Zbiór ciągów nierosnących k w $\mathbb{N}_0^{n-1} \times \mathbb{Z}$, których elementy są ograniczone liczbą l , oznaczamy przez $\mathcal{M}_{n-1}(l)$.

Każda funkcja f z przestrzeni $\mathcal{L}^1(\mathcal{S}^n)$ może być rozwinięta w szereg harmonik hipersferycznych zwany szeregiem Laplace'a:

$$S(f; x) \sim \sum_{l=0}^\infty Y_l(f; x).$$

Dla funkcji zonalnych zachodzi

$$Y_l(f; t) = \widehat{f}(l) C_l^\lambda(t), \quad t = \cos \vartheta,$$

gdzie

$$\widehat{f}(l) = c(l, \lambda) \int_{-1}^1 f(t) C_l^\lambda(t) (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt$$

są współczynnikami Gegenbauera, natomiast $c(l, \lambda)$ jest stałą zależną wyłącznie od l i λ , patrz [6, str. 207]. Szereg

$$\sum_{l=0}^\infty \widehat{f}(l) C_l^\lambda(t) \quad (4)$$

nazywany jest szeregiem Gegenbauera funkcji f . Dla $f, h \in \mathcal{L}^1(\mathcal{S}^n)$, gdzie h jest funkcją zonalną, spłot $f * h$ określony jest jako

$$(f * h)(x) = \frac{1}{\Sigma_n} \int_{\mathcal{S}^n} f(y) h(x \cdot y) d\sigma(y).$$

Każda funkcja $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ ma jednoznaczne rozwinięcie w zbieżny względem normy szereg

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{M}_{n-1}(l)} a_l^k Y_l^k(x), \quad x \in \mathcal{S}^n, \quad (5)$$

gdzie

$$a_l^k = a_l^k(f) = \frac{1}{\Sigma_n} \int_{\mathcal{S}^n} \overline{Y_l^k(x)} f(x) d\sigma(x) = \langle Y_l^k, f \rangle.$$

Dowód tego stwierdzenia znajduje się w monografii [62]. a_l^k są nazywane współczynnikami Fouriera funkcji f . Splot z funkcją zonalną może być zatem przedstawiony jako

$$f * g = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{M}_{(n-1)l}} \frac{\lambda}{\lambda + l} a_l^k(f) \widehat{g}(l) Y_l^k.$$

Dla funkcji zonalnych zachodzi następująca zależność:

$$\widehat{f}(l) = A_l^0 \cdot a_l^0(f) \quad (6)$$

pomiędzy ich współczynnikami Fouriera i Gegenbauera.

Zbiór obrotów przestrzeni \mathbb{R}^{n+1} oznaczamy przez $SO(n+1)$. Jest on izomorficzny ze zbiorem macierzy kwadratowych stopnia $n+1$ o wyznaczniku równym 1. Sfera n -wymiarowa może być identyfikowana z klasą lewych warstw $SO(n+1)$ modulo $SO(n)$,

$$\mathcal{S}^n = SO(n+1)/SO(n),$$

patrz [62, Rozdział I.2].

Iloczyn zonalny dowolnych funkcji $f, h \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ jest zdefiniowany jako

$$(f \hat{*} g)(x \cdot y) = \int_{SO(n+1)} f(\Upsilon^{-1}x) g(\Upsilon^{-1}y) d\nu(\Upsilon), \quad x, y \in \mathcal{S}^n,$$

i przedstawia się za pomocą szeregu

$$(f \hat{*} g)(x \cdot y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{M}_{n-1}(l)} \frac{a_l^k(f) a_l^k(g)}{N(n, l)} \frac{\lambda + l}{\lambda} C_l^\lambda(x \cdot y). \quad (7)$$

4.3.2 Całki osobliwe i identyczności aproksymowane

Całki osobliwe na sferach n -wymiarowych wprowadzone zostały przez Berensa i in. w artykule [6]. Praca ta inspirowana jest wcześniejszymi artykułami dotyczącymi całek osobliwych na liczbach rzeczywistych [11], okręgu jednostkowym [12, 61], w k -wymiarowej przestrzeni euklidesowej [13] czy na k -wymiarowym torusie [55].

Definicja 1 Niech $\mathcal{L}_\lambda^1([-1, 1])$ oznacza klasę funkcji zdefiniowanych na $[-1, 1]$ i całkownych względem wagi $t \mapsto (1 - t^2)^{\lambda-1/2}$. Niech $\{\mathcal{K}_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+} \subseteq \mathcal{L}_\lambda^1([-1, 1])$ będzie rodziną jąder takich, że

$$\widehat{\mathcal{K}}_\rho(0) = c(0, \lambda) \int_{-1}^1 \mathcal{K}_\rho(t) (1 - t^2)^{\lambda-1/2} dt = 1. \quad (8)$$

Wówczas

$$I_\rho(f) = f * \mathcal{K}_\rho \quad (9)$$

jest nazywane sferyczną całką osobliwą. Rodzinę $\{\mathcal{K}_\rho\}$ nazywa się jądrem całki osobliwej.

Uwaga. \mathcal{L}_λ^1 może być utożsamiana z klasą całkownych funkcji zonalnych na $2\lambda + 1$ -wymiarowej sferze.

Identyczności aproksymowane (bez użycia tej nazwy) były badane w artykule [6]. Początkowo pojęcie to dotyczyło całek osobliwych o dodatkowej własności

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \|I_\rho f - f\|_{\mathcal{X}} = 0, \quad (10)$$

gdzie $\mathcal{X}(\mathcal{S}^n)$ oznacza przestrzeń $\mathcal{L}^p(\mathcal{S}^n)$, $p \in [1, \infty)$, lub $\mathcal{C}(\mathcal{S}^n)$. Takiej definicji używa się m.in. w [7, 8, 9, 28, 27, 24, 3]. Okazuje się jednak, że warunek (8) nie jest potrzebny ani do aproksymacji (10), ani do zdefiniowania falek sferycznych. Ponadto okazuje się, że nie jest spełniony przez wiele rodzin falek. Z tego powodu, podobnie jak autorzy [20], używam następującej definicji:

Definicja 2 Niech dana będzie rodzina $\{\mathcal{K}_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ całkownych funkcji zonalnych spełniających warunek (10). Wówczas rodzina $\{\mathcal{K}_\rho^*\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ stanowi identyczność aproksymowaną z jądrem $\{\mathcal{K}_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$.

Inna ważna własność identyczności aproksymowanych przedstawiona jest w następującym twierdzeniu, patrz [20, Twierdzenie 3.8].

Twierdzenie 3 Załóżmy, że jądro $\{\mathcal{K}_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+} \subseteq \mathcal{L}_\lambda^1([-1, 1])$ jest jednostajnie ograniczone w normie \mathcal{L}_λ^1 ,

$$\int_{-1}^1 |\mathcal{K}_\rho(t)| (1 - t^2)^{\lambda-1/2} dt \leq \mathbf{c} \quad (11)$$

jednostajnie względem $\rho \in \mathbb{R}_+$, gdzie \mathbf{c} jest dodatnią stałą. Wtedy całka I_ρ dana wzorem (9) jest identycznością aproksymowaną w $\mathcal{X}(\mathcal{S}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \widehat{\mathcal{K}}_\rho(l) = \frac{\lambda + l}{\lambda} \quad (12)$$

dla wszystkich $l \in \mathbb{N}_0$.

Własności identyczności aproksymowanych są szczegółowo opisane w pracy [6].

4.3.3 Ramki

Większość stwierdzeń z tego rozdziału pochodzi z [45].

Definicja 4 Rodzinę wektorów $\{g_x, x \in X\} \subset \mathcal{H}$ w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , indeksowaną elementami przestrzeni X z dodatnią miarą μ nazywamy ramką z wagą μ , jeśli przekształcenie $x \mapsto g_x$ jest słabo mierzalne, tzn. $x \mapsto \langle g_x, u \rangle$ jest mierzalne, i jeśli dla pewnego $\epsilon \in [0, 1)$ zachodzi

$$(1 - \epsilon) \|u\|^2 \leq \int_X |\langle g_x, u \rangle|^2 d\mu(x) \leq (1 + \epsilon) \|u\|^2 \quad (13)$$

dla każdego $u \in \mathcal{H}$. Liczby $1 - \epsilon$ i $1 + \epsilon$ nazywamy ograniczeniami ramki. Ramkę nazywamy ścisłą, jeśli $\epsilon = 0$.

Niech $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(X, d\mu)$ będzie przestrzenią Hilberta funkcji na zbiorze X z jądrem reprodukcującym Π

$$u(x) = \int_X \Pi(x, y) u(y) d\mu(y).$$

Rodzina funkcji $\{g_x = \Pi(x, \cdot), x \in X\}$ jest ścisłą ramką z wagą μ . Odwrotnie, ścisła ramka $\{g_x, x \in X\}$ i miara μ w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} są w naturalny sposób powiązane z przestrzenią Hilberta $\mathcal{L}^2(X, d\mu)$ z jądrem reprodukcującym.

Twierdzenie 5 *Przekształcenie*

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}^2(X, d\mu), \quad Su(x) = \langle g_x, u \rangle \quad (14)$$

jest częściową izometrią, a jego obraz \mathcal{U} jest scharakteryzowany przez jądro reprodukcujące

$$\Pi(x, y) = \langle g_x, g_y \rangle.$$

To znaczy, że $u \in \mathcal{L}^2(X, d\mu)$ należy do obrazu przekształcenia S wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_X \Pi(x, y) u(y) d\mu(y) = u(x).$$

Całka ta jest bezwzględnie zbieżna, ponieważ $\Pi(x, \cdot)$ jest elementem $\mathcal{L}^2(X, d\mu)$. W szczególności:

Twierdzenie 6 Niech $\{g_x, x \in X\}$ będzie ścisłą ramką z wagą μ na \mathcal{H} . Rodzina $\{g_y, y \in \Lambda \subset X\}$ z miarą m na Λ stanowi ramkę dla \mathcal{H} wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\Pi(y, \cdot), y \in \Lambda\}$, $\Pi(\xi, \eta) = \langle g_\xi, g_\eta \rangle$, jest ramką dla $S(\mathcal{H})$, gdzie S dane jest wzorem (14).

Ramki postaci $\{\Pi(y, \cdot)\}$ mogą być scharakteryzowane w następujący sposób:

Twierdzenie 7 Niech $\Lambda \subset X$ i niech m będzie miarą na Λ , a μ miarą na X . Rodzina funkcji $\{g_y = \Pi(y, \cdot), y \in \Lambda\} \subset \mathcal{L}^2(X, d\mu)$ jest ramką z wagą m dla $\mathcal{U} = S(\mathcal{H})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F(x, z) = \int_{\Lambda} \Pi(x, y) \Pi(y, z) dm(y) - \Pi(x, z) \quad (15)$$

jest jądrem operatora ograniczonego \mathbb{F} na \mathcal{U} takiego, że $\|\mathbb{F}\| < 1$.

Ponieważ $\Pi(x, z) = \int_X \Pi(x, y) \Pi(y, z) d\mu(y)$, z twierdzenia wynika, że istnienie ramek jest ściśle związane z istnieniem dobrej kwadratury dla funkcji z \mathcal{U} . Tej ogólnej zasady używa się wraz z poniższym:

Wniosek 8 Załóżmy, że dla pewnego zbioru Λ rodzina $\{g_y = \Pi(y, \cdot), y \in \Lambda\}$ jest ramką dla \mathcal{U} z wagą m . Jeśli dla innego zbioru Υ rodzina $\{g_y = \Pi(y, \cdot), y \in \Upsilon\} \subset \mathcal{U}$ i waga v spełniają warunek taki, że

$$G(x, z) = \int_{\Lambda} \Pi(x, y) \Pi(y, z) dm(y) - \int_{\Upsilon} \Pi(x, y) \Pi(y, z) dv(y)$$

jest jądrem operatora \mathbb{G} z normą $\|\mathbb{G}\| \leq 1 - \|\mathbb{F}\|$, gdzie jądro \mathbb{F} dane jest wzorem (15), to $\{g_y, y \in \Upsilon\}$ jest ramką z wagą v .

Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w artykułach [45], [17] oraz [16].

4.4 Sferyczna transformata falkowa i jej własności [H1]

Następujące dwie definicje pochodzą z [20].

Definicja 9 Niech $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie wagą. Rodzina $\{\Psi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^n)$ jest nazywana dwuliniową falką sferyczną, jeśli spełnia następujące warunki:

1. dla $l \in \mathbb{N}_0$ zachodzi

$$\sum_{\kappa=1}^{N(n,l)} \int_0^\infty |a_l^\kappa(\Psi_\rho)|^2 \alpha(\rho) d\rho = N(n, l), \quad (16)$$

2. dla $R \in \mathbb{R}_+$ i $x \in \mathbb{S}^n$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{S}^n} \left| \int_R^\infty (\overline{\Psi_\rho} \hat{*} \Psi_\rho)(x \cdot y) \alpha(\rho) d\rho \right| d\sigma(y) \leq \mathbf{c}, \quad (17)$$

gdzie \mathbf{c} jest niezależne od R .

Czynnik $\Sigma_n = \int \mathcal{S}^n$ jest skorygowany (w stosunku do wzorów z [20]). Przyczyną jest fakt, że twierdzenie o dodawaniu harmonik hipersferycznych w artykule [6] zacytowane jest z błędną stałą, a na artykule tym bazuje kilka kolejnych prac. Dowód twierdzenia znajduje się w monografii [22], gdzie stosowana jest stara konwencja normalizacyjna dla harmonik hipersferycznych, tymczasem zacytowano je w artykule [6] bez zmiany odpowiednich stałych.

Definicja 10 Niech $\{\Psi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ będzie falką sferyczną. Transformata falkowa

$$\mathcal{W}_\Psi: \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+ \times SO(n+1))$$

jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{W}_\Psi f(\rho, \Upsilon) = \frac{1}{\Sigma_n} \int_{\mathcal{S}^n} \overline{\Psi_\rho(\Upsilon^{-1}x)} f(x) d\sigma(x).$$

Ograniczając się do dwu wymiarów, otrzymamy dobrze znane definicje z lat dziewięćdziesiątych [24, 27, 28]. Nowością w podejściu autorów artykułu [20] jest uogólnienie do n wymiarów oraz uwzględnienie falek, które nie są obrotowo symetryczne. Tak zdefiniowana transformata falkowa jest odwracalna [20, Twierdzenie 5.3]:

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{SO(3)} (\mathcal{W}_\Psi f)(\rho, \Upsilon) \Psi_\rho(\Upsilon^{-1}x) d\nu(\Upsilon) \alpha(\rho) d\rho \quad \text{prawie wszędzie.}$$

Dowód tego opiera się na Twierdzeniu 3. W podobny sposób udowodniłam, że transformata falkowa jest izometrią [H1, Twierdzenie 3.3]:

$$\langle \mathcal{W}_\Psi f, \mathcal{W}_\Psi g \rangle = \langle f, g \rangle,$$

gdzie iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+ \times SO(n+1))$ dany jest wzorem

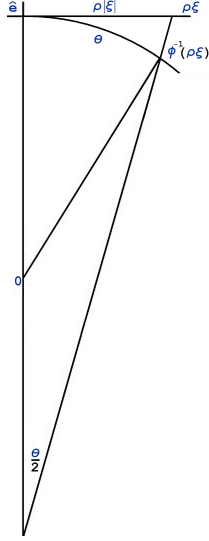
$$\langle F, G \rangle = \int_0^\infty \int_{SO(n+1)} \overline{F(\rho, \Upsilon)} G(\rho, \Upsilon) d\nu(\Upsilon) \alpha(\rho) d\rho.$$

4.4.1 Granica euklidesowa

Własność granicy euklidesowej jest pojęciem, które w tym kontekście wprowadził Holschneider w artykule [39]. Rozumiemy przez nie, że dla małych skal, tzn. w sytuacji, gdy falka skoncentrowana jest na obszarze \mathcal{S}^n , małym na tyle, że można go traktować jako płaski, falka zachowuje się tak, jakby była zdefiniowana na przestrzeni euklidesowej, tzn.

$$\Psi_\rho(\Phi^{-1}(\xi)) \approx \frac{1}{\rho^n} F\left(\frac{\xi}{\rho}\right) \quad \text{dla pewnego } F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n),$$

gdzie Φ^{-1} oznacza odwrotną projekcję stereograficzną. Dokładniej ([H1, Twierdzenie 3.4]):



Rys. 1: Rzut stereograficzny

Twierdzenie 11 Niech dana będzie falka sferyczna $\{\Psi_\rho\} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ spełniająca warunek

$$a_l^k(\Psi_\rho) = \frac{1}{l^{k_1-1} A_l^k} \mathcal{O}(\psi_k(l\rho)), \quad \rho \rightarrow 0,$$

$l \in \mathbb{N}_0$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n-1}(l)$, $k_1 \leq K$, gdzie $\psi_k \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, t^{n-1} dt)$ jest przeliczonymi gładką funkcją taką, że

$$\rho^n \sum_{l=0}^{\lfloor c/\rho \rfloor} l^{n-1} \psi_k(l\rho) < \epsilon,$$

dla pewnych $c > 0$, $\epsilon \ll 1$ oraz $\rho < \rho_0$. Dalej niech

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} a_l^k(\Psi_\rho) = 0$$

dla $k_1 \geq K$. Wówczas istnieje funkcja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ całkowna w kwadracie i taka, że

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^n \Psi_\rho(\Phi^{-1}(\rho\xi)) = F(\xi)$$

zachodzi punktowo dla każdego $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Dowód jest skomplikowany obliczeniowo i wykorzystuje elementy teorii funkcji specjalnych oraz transformat Fouriera na przestrzeni \mathbb{R}^n .

4.4.2 Falki zonalne

W artykule [H1] osobny rozdział poświęcony jest falkom osiowo symetrycznym. W tym przypadku obroty $SO(3)$ redukują się do translacji (rotacji) na sferze \mathcal{S}^n , warunki dopuszczalności upraszczają się, a w transformacie odwrotnej występuje całka po sferze zamiast falki po całej grupie $SO(3)$.

Definicja 12 Rodzinę $\{\Psi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ będącą podzbiorem przestrzeni $\mathcal{L}_\lambda^1([-1, 1])$ nazywa się zonalną falką sferyczną, jeśli spełnia następujące warunki:

1. dla $l \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^\infty |\widehat{\Psi}_\rho(l)|^2 \alpha(\rho) d\rho = \left(\frac{\lambda + l}{\lambda}\right)^2, \quad (18)$$

2. dla $R \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{-1}^1 \left| \int_R^\infty (\overline{\Psi}_\rho * \Psi_\rho)(t) \alpha(\rho) d\rho \right| (1 - t^2)^{\lambda-1/2} dt \leq \mathfrak{c}, \quad (19)$$

gdzie \mathfrak{c} jest niezależne od R .

Definicja 13 Niech $\{\Psi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ będzie falką sferyczną. Transformata falkowa

$$\mathcal{W}_\Psi : \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^n)$$

dana jest wzorem

$$\mathcal{W}_\Psi f(\rho, x) = (f * \overline{\Psi}_\rho)(x). \quad (20)$$

Transformata falkowa jest izometrią i jest odwracalna (w sensie \mathcal{L}^2) za pomocą przekształcenia

$$f(x) = \frac{1}{\Sigma_n} \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^n} \mathcal{W}_\Psi f(\rho, y) \Psi_{\rho, y}(x) d\sigma(y) \alpha(\rho) d\rho. \quad (21)$$

W ten sposób teoria falek zonalnych badana przez wielu autorów [25, 28, 27, 24, 8, 9, 19] jest uogólniona do sfer n -wymiarowych.

4.4.3 Falki wywiedzione z identyczności aproksymowanej

Teoria identyczności aproksymowanych wykorzystywana była dotychczas przy dowodzie odwracalności transformaty falkowej. Zostało wykazane, że złożenie transformaty falkowej i transformaty odwrotnej stanowi identyczność aproksymowaną. Okazuje się jednak, że zachodzi również zależność odwrotna: odpowiedniemu jądro identyczności aproksymowanej można przyporządkować falkę sferyczną, patrz [20, Twierdzenie 6.1].

Twierdzenie 14 Niech jądro $\{\Phi_R\}_{R \in \mathbb{R}_+}$ jednostajnie ograniczonej identyczności aproksymowanej dane będzie za pomocą współczynników Gegenbauera, różniczkowalnych względem R i monotonicznie malejących względem R . Załóżmy ponadto, że

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \widehat{\Phi}_R(l) = 0$$

dla $l \in \mathbb{N}$. Wówczas falka wywiedziona z tej identyczności aproksymowanej $\{\Psi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ dana jest poprzez

$$\widehat{\Psi}_\rho(l) = \left(-\frac{1}{\alpha(\rho)} \frac{d}{d\rho} |\widehat{\Phi}_\rho(l)|^2 \right)^{1/2}$$

dla $l \in \mathbb{N}_0$, $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Istnieje zatem wzajemnie jednoznaczna zależność pomiędzy identycznościami aproksymowanymi spełniającymi warunki podane w Twierdzeniu 14 a falkami sferycznymi. Stąd nazwa *falki wywiedzione z identyczności aproksymowanych* dla falek spełniających warunki Definicji 13. Ma to pomóc w odróżnieniu ich od zdefiniowanych przez Antoine'a i Vandergheynsta *falek wywiedzionych z teorii grup* [5, 4].

4.4.4 Falki liniowe

Oprócz badań opisanych powyżej, a dotyczących falek dwuliniowych, w pracy swojej zajęłam się również falkami liniowymi. Zdefiniowałam je dla sfer n -wymiarowych podobnie jak autorzy monografii [24] (dotyczącej funkcji na sferze dwuwymiarowej) oraz zgodnie z koncepcją zawartą w artykule [20] (patrz [H1, Rozdział 4]):

Definicja 15 Niech $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie wagą. Rodzina $\{\Psi_\rho^L\}_{\rho \in \mathbb{R}_+} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ nazywana jest *liniową falką sferyczną*, jeśli spełnia następujące warunki:

1. dla $l \in \mathbb{N}_0$

$$A_l^0 \cdot \int_0^\infty a_l^0(\Psi_\rho^L) \alpha(\rho) d\rho = \frac{\lambda + l}{\lambda},$$

2. dla $R \in \mathbb{R}_+$ i $x \in \mathcal{S}^n$

$$\int_{\mathcal{S}^n} \left| \int_R^\infty \Psi_\rho^L(x \cdot y) \alpha(\rho) d\rho \right| d\sigma(y) \leq \mathbf{c}, \quad (22)$$

gdzie \mathbf{c} jest niezależne od R .

Definicja 16 Niech $\{\Psi_\rho^L\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ będzie liniową falką sferyczną. Liniowa transformata falkowa

$$\mathcal{W}_\Psi^L : \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+ \times SO(n+1))$$

dana jest wzorem

$$\mathcal{W}_\Psi^L f(\rho, \Upsilon) = \frac{1}{\Sigma_n} \int_{\mathcal{S}^n} \Psi_\rho^L(g^{-1}x) f(x) d\sigma(x).$$

Twierdzenie 17 (*Rekonstrukcja*) Niech $\{\Psi_\rho^L\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$ będzie falką liniową i niech $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$. Wtedy

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{SO(n)} \mathcal{W}_\Psi^L f(\rho, \hat{x}\tilde{g}) d\nu(\tilde{g}) \alpha(\rho) d\rho$$

w sensie \mathcal{L}^2 , gdzie \hat{x} oznacza ustalony element $SO(n+1)$ taki, że $\hat{x}\hat{e} = x$.

Dowód bazuje na własnościach przedstawień grupy $SO(n) \subseteq SO(n+1)$ w $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$.

W tym przypadku do rekonstrukcji sygnału nie używa się falki. Dlatego opisaną w tym rozdziale transformatę nazywa się *liniową*.

4.4.5 Falki wywiedzione z identyczności aproksymowanych względem innych falek sferycznych

Dużą zaletą definicji przedstawionej w [H1] jest jej ogólność. W ostatnim rozdziale [H1] wykazałam, że kilka innych rodzin ciągłych falek sferycznych spełnia warunki Definicji 9. Należą do nich falki Holschneidera, *Mexican needlets*, dyfuzyjne falki Eberta. Okazuje się, że istnieją tylko dwie istotnie różne definicje falek sferycznych: bazująca na teorii identyczności aproksymowanych [H1] oraz bazująca na teorii grup [5, 4].

4.5 Falki Poissona [H2-H3]

Przykładem rodziny falek są falki Poissona wprowadzone (dla przypadku dwuwymiarowego) przez Holschneidera i in. w artykule [40], a bardziej szczegółowo przebadane w pracach [41, 42, 45]. Falki Poissona są bardzo przydatne w zastosowaniach, patrz [40, 15]. Ponadto istnieją ich dyskretne ramki, jak wykazałam w swojej rozprawie doktorskiej [42], patrz również [45]. Falki Poissona posiadają też swój odpowiednik kierunkowy (niezonalny) [38]. Dużą zaletą w porównaniu z innymi rodzinami falek jest jawny wzór przedstawiający falki Poissona jako funkcje współrzędnych sferycznych ϑ i φ . Jednak falki Poissona wprowadzone zostały jako falki spełniające warunki definicji podanej w artykule [39], która nie cieszy się uznaniem wśród społeczności matematycznej. Było to dla mnie motywacją do zbadania falek Poissona z perspektywy falek wywiedzionych z identyczności aproksymowanych.

W artykule [H2] uogólniłam definicję falek Poissona do n wymiarów (Definicja 3.1).

Definicja 18 *Falka Poissona rzędu m , $m \in \mathbb{N}$, dla skali ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, dana jest wzorem rekurencyjnym*

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^1 &= \rho r \partial_r p_{r\hat{e}}, & r &= e^{-\rho}, \\ \Psi_\rho^{m+1} &= \rho r \partial_r \Psi_\rho^m, \end{aligned} \tag{23}$$

gdzie $p_{r\hat{e}}$ jest jądrem Poissona na sferze jednostkowej:

$$p_\zeta(y) = \frac{1}{\Sigma_n} \frac{1 - |\zeta|^2}{|\zeta - y|^{n+1}} = \frac{1}{\Sigma_n} \frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{(n+1)/2}} \quad (24)$$

dla $\zeta, y \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$r = |\zeta| < |y| = 1,$$

gdzie ϑ oznacza kąt między wektorami ζ i y , tzn.

$$r \cos \vartheta = \zeta \cdot y.$$

Analogicznie jak w artykule [41] wyprowadziłam wzór na rozwinięcie Gegenbauera falek Poissona:

$$\Psi_\rho^m(y) = \frac{1}{\Sigma_n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda + l}{\lambda} (\rho l)^m e^{-\rho l} C_l^\lambda(\cos \vartheta),$$

[H2, Lemat 3.2]. Wykazałam również, że falki te można przedstawić jako kombinację liniową harmonik hipersferycznych, w tym wypadku wyznaczonych względem źródła pola (bieguna). Udowodniłam ponadto, że istnieje rozszerzenie harmoniczne tych funkcji do funkcji zdefiniowanych na całej przestrzeni z wyłączeniem bieguna [H2, Twierdzenie 4.1].

Twierdzenie 19 *Falki Poissona g_ρ^m , $m \in \mathbb{N}$, mogą być w sposób jednoznaczny rozszerzone harmonicznie do funkcji na $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{r\hat{e}\}$. Dane są one wzorem*

$$g_\rho^m(x) = \frac{\rho^m}{\Sigma_n} \sum_{l=0}^{m+1} l! \left(\alpha_l^m + \frac{\alpha_l^{m+1}}{\lambda} \right) e^{-\rho l} \frac{C_l^\lambda(\cos \chi)}{|x - r\hat{e}|^{l+2\lambda}}, \quad (25)$$

gdzie $r = e^{-\rho}$,

$$\cos \chi = \frac{x - r\hat{e}}{|x - r\hat{e}|} \cdot \hat{e},$$

a współczynniki α_l^m wyznacza się rekurencyjnie przez:

$$\begin{aligned} \alpha_0^0 &= 1, \\ \alpha_0^m &= 0 \quad \text{dla } m \geq 1, \\ \alpha_m^l &= 0 \quad \text{dla } l > m, \\ \alpha_l^{m+1} &= l\alpha_l^m + \alpha_{l-1}^m. \end{aligned}$$

W pracy swojej wyprowadziłam też wzory na falki Poissona jako funkcje niewymierne zmiennej $\cos \vartheta$. Ich istnienie jest jednym z powodów, dla których falki Poissona są tak przydatne w obliczeniach, bowiem zarówno falki Gaussa [24, Rozdział 10], jak i *Mexican needlets* [48] oraz dyskretne falki opisane w Rozdziale 11 [24] dane są wyłącznie w postaci szeregu Laplace'a.

Twierdzenie 20 *Falki Poissona rzędu $m \in \mathbb{N}$ równe są*

$$g_\rho^m(y) = \frac{\rho^m}{\Sigma_n} D_{\lambda+m+1} \sum_{k=0}^m R_k^m(r) \cos^k \vartheta, \quad (26)$$

gdzie

$$D_j = D_j(r, \vartheta) = \frac{r}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^j},$$

a R_k^m są wielomianami stopnia $2m - k + 1$ postaci

$$R_k^m(r) = \sum_{j=0}^{[(2m-k+1)/2]} a_j^{m,k} r^{2j+(k-1) \bmod 2}.$$

Współczynniki $a_j^{m,k}$ dane są wzorem rekurencyjnym

$$a_j^{m+1,0} = b_j^{m+1,0}, \quad j = 0, \dots, m+1,$$

$$a_j^{m+1,k} = b_j^{m+1,k} + c_j^{m+1,k}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, m, \\ j = 0, \dots, m+1 - \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor, \end{array}$$

$$a_j^{m+1,m+1} = c_j^{m+1,m+1}, \quad j = 0, \dots, \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor,$$

gdzie dla k parzystych

$$\begin{array}{ll} a_0^{1,0} = -(n+3), & a_1^{1,0} = n-1, \\ a_0^{1,1} = n+1, & a_1^{1,1} = -(n-3) \end{array}$$

oraz

$$\begin{aligned} b_0^{m+1,k} &= 2a_0^{m,k}, \\ b_j^{m+1,k} &= 2(j+1)a_j^{m,k} + 2(j-\lambda-m-1)a_{j-1}^{m,k}, \quad j = 1, \dots, m-k/2, \\ b_{m+1-k/2}^{m+1,k} &= -(2\lambda+k)a_{m-k/2}^{m,k}, \\ c_0^{m+1,k} &= 2(\lambda+m)a_0^{m,k-1}, \\ c_j^{m+1,k} &= 2(\lambda+m)a_j^{m,k-1} - 2 \cdot 2j a_j^{m,k-1} \\ &= 2(\lambda+m-2j)a_j^{m,k-1}, \quad j = 1, \dots, m+1-k/2, \end{aligned}$$

natomiast dla k nieparzystych

$$\begin{aligned} b_0^{m+1,k} &= a_0^{m,k}, \\ b_j^{m+1,k} &= (2j+1)a_j^{m,k} + (2(j-\lambda-m)-3)a_{j-1}^{m,k}, \quad j = 1, \dots, m - \lfloor k/2 \rfloor, \\ b_{m+1-\lfloor k/2 \rfloor}^{m+1,k} &= -(2\lambda+2m+1)a_{m-\lfloor k/2 \rfloor}^{m,k} + (2m-k+1)a_{m-\lfloor k/2 \rfloor}^{m,k} \\ &= -(2\lambda+k)a_{m-\lfloor k/2 \rfloor}^{m,k}, \\ c_0^{m+1,k} &= 0, \\ c_j^{m+1,k} &= 2(\lambda+m-2j+1)a_{j-1}^{m,k-1}, \quad j = 1, \dots, m+1 - \lfloor k/2 \rfloor \end{aligned}$$

Używając jawnego wzoru na falki Poissona, udowodniłam, że są one zlokalizowane wielomianowo jako funkcje odległości geodezyjnej ϑ [H2, Twierdzenie 6.5]:

Twierdzenie 21 *Niech Ψ_ρ^m będzie falką Poissona rzędu m . Istnieje stała \mathbf{c} taka, że*

$$|\rho^n \Psi_\rho^m(\cos(\rho\vartheta))| \leq \frac{\mathbf{c} \cdot e^{-\rho}}{\vartheta^{m+n}}, \quad \vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{\rho}\right],$$

jednostajnie względem ρ . $m+n$ jest największym możliwym wykładnikiem w tej nierówności.

Dalej, korzystając z przedstawienia falek Poissona w postaci sum skończonych harmonik hipsferycznych, znalazłam wzory na granice euklidesowe tych falek [H2, Twierdzenie 7.1]:

Twierdzenie 22 *Granice euklidesowe falek Poissona dane są wzorem*

$$G^m(|\xi|) = \frac{1}{\Sigma_n \lambda} (m+1)! \frac{C_{m+1}^\lambda (1/\sqrt{1+|\xi|^2})}{(1+|\xi|^2)^{(m+n)/2}}. \quad (27)$$

Wykazałam również, że są one zlokalizowane wielomianowo [H2, Twierdzenie 7.2]:

Twierdzenie 23 *Dla $|\xi| \rightarrow \infty$ zachodzi*

$$G^m(|\xi|) = \mathcal{O}(|\xi|^{-[m+n+(m+1)_{\text{mod } 2}]}).$$

Wymienione wyżej własności falek Poissona stanowią uogólnienie własności udowodnionych dla przypadku dwuwymiarowego w artykułach [41, 42, 45]. Jednak najważniejszym wynikiem w pracy [H2] jest dowód tego, że falki Poissona (odpowiednio znormalizowane i z miarą $\alpha(\rho) = \frac{1}{\rho}$) spełniają warunki powszechnie akceptowanej definicji falek z [H1] (patrz też [24]) zarówno jako falki dwuliniowe, jak i liniowe [H2, Rozdziały 8 i 9]. Przy udowadnianiu, że rodzina funkcji stanowi falkę, największą trudność stanowi oszacowanie potrójnej całki po lewej stronie nierówności (17) lub (22). W przypadku falek Poissona wykorzystałam omówione powyżej nierówności, żeby wykazać, że warunki (17) oraz (22) są spełnione.

4.5.1 Ramki falek Poissona

Jeszcze jednym powodem, dla którego falki Poissona są tak użyteczne, jest istnienie ich dyskretnych ramek. Dowód tego stwierdzenia dla przypadku dwuwymiarowego stanowił temat mojej rozprawy doktorskiej. W artykule [H3] uogólniłam te wyniki na przypadek n -wymiarowy. Fakt, że falki Poissona stanowią ramkę dyskretną, jest niezwykle ważny dla przechowywania danych: wartości transformaty falkowej na przeliczalnym zbiorze argumentów zawierają pełną informację o analizowanym sygnale.

Można wykazać za pomocą prostych rachunków, że istnieje szeroka klasa falek sferycznych (zawierająca falki Poissona), dla których istnieją ramki półciągłe, tzn. takie, że zmienna skali ρ poddana jest dyskretyzacji, natomiast zmienna sferyczna pozostaje ciągła [H3, Twierdzenie 3.2].

Twierdzenie 24 Niech $\{\Psi_\rho : \rho \in \mathbb{R}_+\}$ będzie rodziną falek taką, że

$$\widehat{\Psi}_\rho(l) = \frac{l + \lambda}{\lambda} \cdot \gamma(\rho \cdot \tau(l)),$$

gdzie τ jest dowolną funkcją, γ jest takie, że $\int_0^\infty \|\gamma^2\|'(t) dt < \infty$. Wówczas dla każdych $\epsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje stała q taka, że dla każdego ciągu $\mathcal{B} = (b_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ spełniającego warunki $b_0 \geq -\log q$ i $1 < b_j/b_{j+1} < 1 + q \cdot \delta$ rodzina $\{\Psi_{b_j, x}, b_j \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{S}^n\}$ z miarą $\{\nu_j = C \cdot \log \frac{b_j}{b_{j+1}}\}$ stanowi półciągłą ramkę dla $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$. Warunek (13) jest spełniony dla zadanego ϵ .

Pełna dyskretyzacja ramek zasadniczo oparta jest na szacowaniu błędu pojawiającego się przy dyskretyzacji splotu dwu jąder falkowych. Jądro reprodukujące transformaty falkowej względem falek zonalnych, które spełnia warunek

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\Psi f(a, x) &= \Pi(a, x; b, y) * \mathcal{W}_\Psi f(b, y) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^n} \Pi(a, x; b, y) \mathcal{W}_\Psi f(b, y) d\sigma(y) \alpha(b), \end{aligned}$$

dane jest wzorem

$$\Pi(a, x; b, y) = C \cdot \langle \Psi_{(x,a)}, \Psi_{(y,b)} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)},$$

gdzie C jest stałą. W przypadku falek Poissona wyraża się ono w postaci falek:

$$\Pi^m(a, x; b, y) = C \cdot \frac{(ab)^m}{(a+b)^{2m}} \Psi_{a+b}^{2m}(x \cdot y).$$

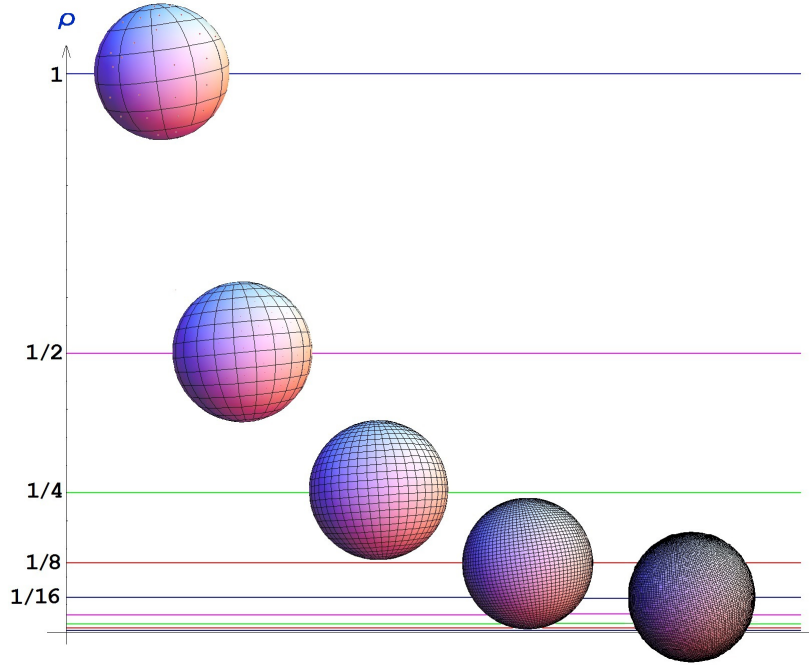
Jest zatem zlokalizowane wielomianowo względem zmiennej kątowej $x \cdot y$. Własność ta oraz ograniczoność gradientu jądra wykorzystane są przy oszacowaniu wartości wyrażenia

$$\left| \sum_{(b,y) \in \Lambda} \Pi(a, x; b, y) \Pi(b, y; c, z) \mu(b, y) - \tilde{C} \sum_{b \in \mathcal{B}} \int_{\mathcal{S}^n} \Pi(a, x; b, y) \Pi(b, y; c, z) d\sigma(y) \nu(b) \right|, \quad (28)$$

patrz Twierdzenie 7. Siatka punktów $\Lambda \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{S}^n$ ma być typu (δ, Ξ) . Oznacza to, że dla każdej skali $b = b_j$, istnieje mierzalny podział $\mathcal{P}_b = \{\mathcal{O}_k^{(b)}, k = 1, 2, \dots, K_b\}$ sfery \mathcal{S}^n na jednospójne zbiory, takie że średnica każdego z tych zbiorów (mierzona za pomocą odległości geodezyjnej) jest nie większa niż Ξb . Każdy ze zbiorów zawiera dokładnie jeden punkt siatki, a miara dana jest poprzez $\mu(b, y) = \sigma(\mathcal{O}_k^{(b)})$.

Wykazałam, że błąd (28) jest mniejszy niż

$$\frac{1}{c^n} f\left(\frac{a}{c}, \frac{\angle(x, z)}{c}\right)$$



Rys. 2: Przykład siatki typu (δ, Ξ)

dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, (\frac{da}{a}, \vartheta^{n-1} d\vartheta))$, takiej że $\|f\|$ jest dowolnie małe dla dostatecznie małego Ξ . Rachunki wymagają pomysłowego podziału obszaru całkowania oraz starannych oszacowań jąder, patrz dowód Twierdzenia 4.2 w [H3]. Zgodnie z Twierdzeniem 7, fakt, że całka błędu (28) jest zbieżna i mniejsza niż zadana wartość, implikuje istnienie w pełni dyskretnej ramki

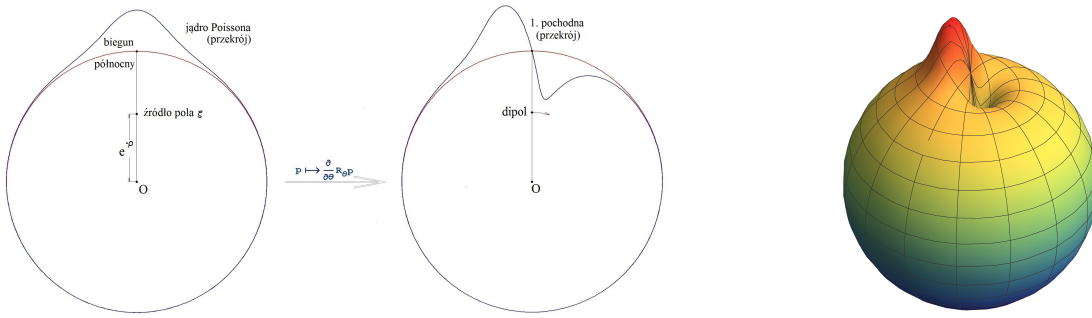
$$\{\Psi_{b,x}, (b, x) \in \Lambda\}$$

z miarą μ , patrz [H3, Wniosek 2.10].

Najważniejsza teza pracy [H3], istnienie dyskretnej ramki falkowej na sferach n -wymiarowych, udowodniona jest przy pewnych założeniach dotyczących lokalizacji jądra falkowego. Według mojej wiedzy spośród falek dotychczas skonstruowanych tylko falki Poissona (rzędu $m \geq n + 1$) spełniają te warunki, patrz [H3, Twierdzenie 6.7]. Twierdzenie 4.2 w [H3] dotyczy jednak szerszej grupy falek. Należy również dodać, że ten sposób dowodzenia, tzn. szacowanie błędu dyskretyzacji przy splataniu jąder, choć wymaga skomplikowanych obliczeń, daje dodatkową informację o strukturze siatki, w szczególności o proporcjonalności średnicy zbioru w podziale \mathcal{P}_b do skali b .

4.6 Falki kierunkowe [H4]

Jak już było powiedziane, jednym z najważniejszych osiągnięć Eberta i in. w artykule [20] było zdefiniowanie falek niezonalnych i niezonalnej transformaty falkowej. Autorzy artykułu nie podali jednak żadnego przykładu, trudno zatem było oszacować przydatność definicji. W pracy [H4] podjęłam próbę skonstruowania rodziny falek niezonalnych. Pomysł zaczerpnęłam z artykułu [38], w którym jądro Poissona poddane jest różniczkowaniu przy poruszeniu źródła $r\hat{e}$ prostopadle do osi z . Stanowi to dopełnienie dla różniczkowania wzdłuż osi z zgodnie z (23).



Rys. 3: Pochodna kierunkowa jądra Poissona

Definicja 25 [H4, Definicja 3.1] *Kierunkowa falka Poissona rzędu $d \in \mathbb{N}$ dana jest jako*

$$\Psi_\rho^{[d]}(x) = \rho^d \frac{\partial^d}{\partial \vartheta^d} \left(p_{\Upsilon_\vartheta^{-1}\zeta}(x) \right) \Big|_{\vartheta=0},$$

gdzie Υ_ϑ oznacza obrót przestrzeni \mathbb{R}^{n+1} w płaszczyźnie (\hat{e}, x_2) o kąt ϑ , natomiast $\zeta = e^{-\rho} \hat{e}$.

Aby badać falki powstające w ten sposób, wyprowadziłam wzory rekurencyjne na pochodne kierunkowe harmonik hipersferycznych [H4, Lemat 4.2].

Lemat 26 *Niech $n \geq 3$ i $l \in \mathbb{N}$ będą ustalone. Wtedy*

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_l^{(k_1, 0, \dots, 0)}(\Upsilon_\vartheta x) \Big|_{\vartheta=0} = \beta_{l, k_1-1} Y_l^{(k_1-1, 0, \dots, 0)}(x) - \beta_{l, k_1} Y_l^{(k_1+1, 0, \dots, 0)}(x) \quad (29)$$

dla

$$\beta_{l, k_1} = \sqrt{\frac{(k_1 + 1)(2\lambda + k_1 - 1)(l - k_1)(2\lambda + l + k_1)}{(2\lambda + 2k_1 - 1)(2\lambda + 2k_1 + 1)}}, \quad (30)$$

$k_1 = 0, 1, \dots, l$ oraz

$$\beta_{l,-1} = 0.$$

Niech $n = 2$ i $l \in \mathbb{N}$ będzie ustalone i niech \tilde{Y}_l^k oznacza

$$\tilde{Y}_l^k = \begin{cases} Y_l^{-k} + Y_l^k & \text{dla } k = 0, 1, \dots, l, \\ 0 & \text{dla pozostałych } k. \end{cases}$$

Wówczas zachodzi

$$\left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} \tilde{Y}_l^0(\Upsilon_\vartheta x) \right|_{\vartheta=0} = -\sqrt{l(l+1)} \tilde{Y}_l^1(x) \quad (31)$$

i

$$\left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} \tilde{Y}_l^k(\Upsilon_\vartheta x) \right|_{\vartheta=0} = \beta_{l,k-1} \tilde{Y}_l^{k-1}(x) - \beta_{l,k} \tilde{Y}_l^{k+1}(x) \quad (32)$$

dla $k = 1, 2, \dots, l$.

W dowodzie wykonane są obliczenia wykorzystujące własności wielomianów Gegenbauera. Bazując na powyższym lemacie, wyprowadziłam algorytm do wyznaczania współczynników Fouriera pochodnej kierunkowej funkcji zonalnej [H4, Twierdzenie 4.3].

Twierdzenie 27 Niech dana będzie funkcja zonalna

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^0(f) Y_l^0.$$

Zachodzi

$$f^{(d)} := \left. \frac{\partial^d}{\partial \vartheta^d} (f(\Upsilon_\vartheta x)) \right|_{\vartheta=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} a_l^{2j+d_{\text{mod}2}}(f^{(d)}) Y_l^{(2j+d_{\text{mod}2}, 0, \dots, 0)}(x) \quad (33)$$

dla $n \geq 3$ oraz

$$f^{(d)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} a_l^{2j+d_{\text{mod}2}}(f^{(d)}) \left(Y_l^{2j+d_{\text{mod}2}} + Y_l^{-(2j+d_{\text{mod}2})} \right) \quad (34)$$

dla $n = 2$, gdzie współczynniki $a_l^k(f^{(d)})$ dane są wzorem rekurencyjnym

$$\begin{aligned} a_l^{2j+1}(f^{(d)}) &= \beta_{l,2j+1} a_l^{2j+2}(f^{(d-1)}) - \beta_{l,2j} a_l^{2j}(f^{(d-1)}), \\ a_l^{2j}(f^{(d)}) &= 0 \end{aligned}$$

dla nieparzystych d oraz

$$\begin{aligned} a_l^0(f^{(d)}) &= -\beta_{l,0} a_l^1(f^{(d-1)}) & (\text{dla } n \geq 3), \\ a_l^0(f^{(d)}) &= -2\beta_{l,0} a_l^1(f^{(d-1)}) & (\text{dla } n = 2), \\ a_l^{2j}(f^{(d)}) &= \beta_{l,2j-1} a_l^{2j-1}(f^{(d-1)}) - \beta_{l,2j} a_l^{2j+1}(f^{(d-1)}), \\ a_l^{2j+1}(f^{(d)}) &= 0 \end{aligned}$$

dla parzystych d , natomiast $\beta_{l,k}$ zdefiniowane są jak w Lemacie 26.

Struktura współczynników β_{l,k_1} pojawiających się przy różniczkowaniu kierunkowym sprawia, że żadna z rodzin falkowych znanych dotychczas bądź skonstruowanych w podobny sposób, tzn. takich, których współczynniki Gabora stanowią próbki funkcji będącej iloczynem dodatniej całkowitej bądź połówkowej potęgi wielomianu oraz funkcji wykładniczej z wykładnikiem wielomianowym, nie spełnia warunków Definicji 9. (Definicja z artykułu [38] jest nieco inna i dopuszcza szerszą klasę falek. Jednak w tym przypadku rekonstrukcja jest możliwa tylko z dokładnością do moltiplicatora Fouriera). Sposobem na przezwycięzenie tej trudności było użycie dwóch różnych rodzin falek dla analizy i syntezy sygnału. Manewr taki często stosuje się w przypadku falek na przestrzeni euklidesowej.

Definicja 28 [H4, Definicja 5.1] Niech $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie wagą. Rodziny $\{\Psi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ oraz $\{\Omega_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ nazywamy parą falek, jeśli spełniają następujące warunki:

1. dla $l \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{\kappa=1}^{N(n,l)} \int_0^\infty \overline{a_l^\kappa(\Psi_\rho)} a_l^\kappa(\Omega_\rho) \alpha(\rho) d\rho = N(n,l), \quad (35)$$

2. dla $R \in \mathbb{R}_+$ i $x \in \mathcal{S}^n$

$$\int_{\mathcal{S}^n} \left| \int_R^\infty (\overline{\Psi_\rho} \hat{*} \Omega_\rho)(x \cdot y) \alpha(\rho) d\rho \right| d\sigma(y) \leq \mathbf{c}, \quad (36)$$

gdzie \mathbf{c} jest stałą niezależną od R .

Transformata falkowa dana jest tym samym wzorem co w [H1], patrz [H4, Definicja 5.2], i jest odwracalna za pomocą przekształcenia:

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{SO(n+1)} \mathcal{W}_\Psi f(\rho, \Upsilon) \Omega_\rho(g^{-1}x) d\nu(\Upsilon) \alpha(\rho) d\rho.$$

Jeżeli $\{\Psi_\rho\}$ i $\{\Omega_\rho\}$ nie są sobie równe, transformata falkowa nie jest izometrią.

W Twierdzeniu 5.7 z artykułu [H4] udowodnione jest, że pewne kombinacje liniowe pochodnych kierunkowych jądra Poissona oraz jądra

$$h_\rho(x) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{\rho l^2}{2\lambda}} \mathcal{C}_l^\lambda \quad (37)$$

stanowią parę falek z wagą $\alpha(\rho) = \frac{1}{\rho}$. Można powiedzieć, że falki kierunkowe powstałe z (37) stanowią falkę rekonstruującą dla kierunkowych falek Poissona.

W artykule [H4] wyprowadziłam również jawne wzory na granicę euklidesową kierunkowych falek Poissona (Twierdzenie 6.1).

Twierdzenie 29 *Granice euklidesowe kierunkowych falek Poissona wynoszą*

$$G^{[d]}(\xi) = \frac{\partial^d}{\partial \xi_2^d} \frac{2}{\Sigma_n(1 + |\xi|^2)^{\lambda+1}}, \quad (38)$$

$$\xi = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^n.$$

W Dodatku w artykule [H4] zastosowałam wzory rekurencyjne z Twierdzenia 4.3 do wyprowadzenia jawnego przedstawienia drugiej pochodnej kierunkowej jądra Poissona:

$$\begin{aligned} (p_\xi^\lambda)^{(2)}(x) = & - \frac{2(\lambda + 1) e^{-\rho} (1 - e^{-2\rho})}{\Sigma_n (1 - 2e^{-\rho} \cos \vartheta_1 + e^{-2\rho})^{\lambda+2}} \cos \vartheta_1 \\ & + \frac{4(\lambda + 1)(\lambda + 2) e^{-2\rho} (1 - e^{-2\rho})}{\Sigma_n (1 - 2e^{-\rho} \cos \vartheta_1 + e^{-2\rho})^{\lambda+3}} \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2. \end{aligned}$$

4.7 Ramki dyskretne falek niezonalnych [H5]

Celem mojej kolejnej pracy [H5] było skonstruowanie dyskretnych ramek falek kierunkowych. Ze względu na dużą liczbę zmiennych pojawiających się przy obliczeniach wykorzystujących falki niezonalne, jak również nieistnienie falek standardowej budowy, które byłyby dla siebie falkami rekonstrukcyjnymi, zastosowanie metody użytej w [H3] wydaje się niemożliwe. Zastosowałam zatem inny sposób: bezpośrednie oszacowanie

$$\left| \int_X |\langle f_x, f \rangle| d\mu(x) - \|f\|^2 \right|$$

przy odpowiednio wybranym $\{f_x\}$, zgodnie z (13). Metoda ta wymaga kolejnej modyfikacji definicji falek, patrz [H5, Definicja 2.3].

Definicja 30 Niech $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie wagą. Rodzina $\{\Psi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{R}_+} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ nazywana jest falką rzędu m , jeśli spełnia warunek

$$A \leq \beta(l) \leq B \quad (39)$$

dla dodatnich stałych A i B niezależnych od $l \in \mathbb{N}_0$, $l > m$, oraz $\beta(l) = 0$ dla $l \in \mathbb{N}_0$, $l \leq m$, gdzie $\beta(l)$ dane jest wzorem

$$\beta(l) := \frac{\sum_{\kappa=1}^{N(n,l)} \int_0^\infty |a_l^\kappa(\Psi_\rho)|^2 \alpha(\rho) d\rho}{N(n,l)}.$$

Opuszczenie warunku (17) (względnie (36)) pozwala na dużą dowolność w konstrukcji falek. W Twierdzeniu 2.6 w [H5] wykazałam istnienie szerokiej klasy funkcji o nieograniczonym spektrum, które są falkami.

Twierdzenie 31 Niech $\{\Psi_\rho\} \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ będzie rodziną funkcji zonalnych spełniających warunek

$$\widehat{\Psi}_\rho(l) = (\rho^a [q_\gamma(l)]^b)^c e^{-\rho^a [q_\gamma(l)]^b} \cdot \frac{l + \lambda}{\lambda} \quad \text{dla } l \in \mathbb{N}_0, \quad (40)$$

gdzie q_γ jest wielomianem stopnia γ , dodatnim dla dodatnich l , natomiast a, b, c są stałymi dodatnimi. Symbolem $\Upsilon_{\widehat{\varsigma}, \vartheta}$ oznaczony jest obrót przestrzeni \mathbb{R}^{n+1} w płaszczyźnie $(\widehat{e}, \widehat{\varsigma})$, gdzie $\widehat{\varsigma}$ jest osią obrotu równoległą do przestrzeni stycznej do sfery w punkcie \widehat{e} . Kąt obrotu wynosi ϑ . Wówczas dla każdego $d \in \mathbb{N}$

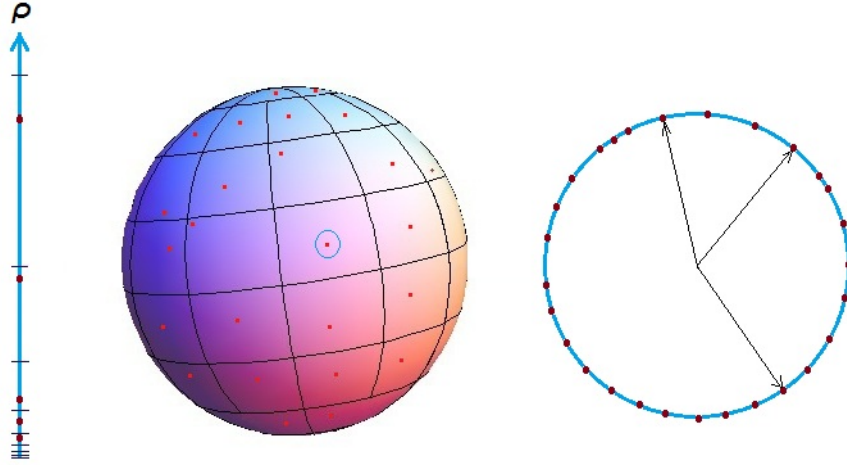
$$\{\Psi_\rho^{\widehat{\varsigma}, d}(x)\} = \left\{ \rho^{ad/(ub)} \frac{\partial^d}{\partial \vartheta^d} \Psi_\rho(\Upsilon_{\widehat{\varsigma}, \vartheta} x) \Big|_{\vartheta=0} \right\}$$

jest falką rzędu 0 zgodnie z Definicją 30, gdzie $\alpha(\rho) = \frac{1}{\rho}$.

Przyjąwszy taką definicję falki, tracimy możliwość bezpośredniej rekonstrukcji sygnału za pomocą całki. Jednak falki spełniające jej warunki stanowią ciągłą ramkę [H5, Twierdzenie 2.5]. Rekonstrukcja jest zatem możliwa np. za pomocą algorytmu iteracyjnego. Ponadto dla falek opisanych w Twierdzeniu 31 możliwa jest dyskretyzacja względem skali [H5, Twierdzenie 3.1].

Twierdzenie 32 Niech $\{\Psi_\rho\} \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$ będzie rodziną falek jak w Twierdzeniu 31. Wtedy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją stałe \mathbf{a}_0 i X takie, że dla każdego ciągu $\mathcal{R} = (\rho_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ spełniającego warunki $\rho_0 \geq \mathbf{a}_0$ oraz $1 < \rho_j/\rho_{j+1} < X$ rodzina $\{\Psi_{\rho_j}(\Upsilon^{-1} \circ), \rho_j \in \mathcal{R}, \Upsilon \in SO(n+1)\}$ stanowi półciągłą ramkę przestrzeni $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$.

Główne twierdzenie artykułu [H5] dotyczące dyskretyzacji obrotów udowodnione jest dla każdej rodziny falek, dla której istnieje ramka półciągła. Grupa obrotów $SO(n+1)$ interpretowana jest jako iloczyn kartezjański sfer \mathcal{S}^J , $J = 1, 2, \dots, n$, a dyskretyzacja wykonywana jest osobno na każdym \mathcal{S}^J [H5, Definicja 4.1 i Twierdzenie 4.2].



Rys. 4: Przykład ciągu \mathcal{R} i siatki typu (δ_2, δ_1)

Definicja 33 Niech dane będzie n . Mówimy, że Λ jest siatką typu $(\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)$, jeśli jest dyskretnym mierzalnym zbiorem obrotów w $SO(n+1)$ skonstruowanym iteracyjnie w następujący sposób: Istnieje mierzalny podział $\mathcal{P}_n = \{\mathcal{O}_{\alpha_n}^n : \alpha_n = 1, \dots, K_n\}$ sfery \mathcal{S}^n na jednospójne zbiory, takie że średnica każdego z tych zbiorów (mierzona za pomocą odległości geodezyjnej) jest nie większa niż δ_n . Każdy z tych zbiorów zawiera dokładnie jeden punkt $x_{\alpha_n}^n$, $\alpha_n = 1, \dots, K_n$. Dla $J < n$ niech $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{J+1})$ będzie ustalonym multiindeksem, a

$$\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_J(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{J+1}) = \{\mathcal{O}_{\alpha_J}^J : \alpha_J = 1, \dots, K_J\}$$

mierzalnym podziałem sfery \mathcal{S}^J na $K_J = K_J(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{J+1})$ jednospójnych zbiorów o średnicy nie większej niż δ_J , z których każdy zawiera dokładnie jeden punkt $x_{\alpha_J}^J = x_{(\alpha_n, \dots, \alpha_J)}^J$. Wówczas Λ jest zbiorem obrotów danym przez

$$\Upsilon_{(\alpha_n, \dots, \alpha_1)} = \Upsilon^1(x_{\alpha_1}^1) \Upsilon^2(x_{\alpha_2}^2) \dots \Upsilon^n(x_{\alpha_n}^n)$$

z miarą

$$\lambda(\Upsilon_{(\alpha_n, \dots, \alpha_1)}) := \prod_{J=1}^n \lambda^J(x_{\alpha_J}^J), \quad \lambda^J(x_{\alpha_J}^J) := \sigma_J(\mathcal{O}_{\alpha_J}^J).$$

Dla poszczególnych \mathcal{S}^J

$$\Upsilon^J(x^J) = \Upsilon_1(\vartheta_1^J) \Upsilon_2(\vartheta_2^J) \dots \Upsilon_{J-1}(\vartheta_{J-1}^J) \Upsilon_J(\varphi^J), \quad J = 1, 2, \dots, n,$$

dla

$$x^J = (\vartheta_1^J, \dots, \vartheta_{J-1}^J, \varphi^J) \in \mathcal{S}^J,$$

gdzie $\Upsilon_\iota(\vartheta)$ oznacza obrót w płaszczyźnie $(x_\iota, x_{\iota+1})$ o kąt ϑ , natomiast ϑ_ι^J oraz φ^J , $\iota = 1, 2, \dots, J-1$, są kątami Eulera Υ .

Twierdzenie 34 Niech Ψ_ρ będzie rodziną falek klasy \mathcal{C}^1 taką, że $\{\Psi_{\rho_j, x}, j \in \mathbf{N}_0, x \in \mathcal{S}^n\}$ jest ramką półciąglą. Wtedy dla każdego $j \in \mathbf{N}_0$ istnieją ciągi $(\delta_n^j, \delta_{n-1}^j, \dots, \delta_1^j)$ takie, że

$$\{\Psi_{\rho_j}(\Upsilon_{(\alpha_n^j, \dots, \alpha_1^j)}^{-1} \circ), j \in \mathbf{N}_0, \Upsilon_{(\alpha_n^j, \dots, \alpha_1^j)} \in \Lambda^j\}$$

jest ramką dla $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^n)$, jeśli tylko Λ^j jest siatką typu $(\delta_n^j, \delta_{n-1}^j, \dots, \delta_1^j)$.

W dowodzie wykorzystuje się ograniczoność norm \mathcal{L}^2 falki i jej gradientu powierzchniowego na każdej skali ρ_j . Wykazane jest, że można wykonać dyskretyzację na tyle gęsto, żeby całkowity błąd spełniał wymagane warunki.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Poza pięcioma pracami stanowiącymi jednotematyczny cykl publikacji, po uzyskaniu stopnia doktora opublikowałam osiem artykułów, a kolejne cztery zostały wysłane do redakcji. Łącznie jestem autorką lub współautorką trzynastu publikacji. Liczba cytowań według bazy Web of Science (na dzień 22 XI 2018 r.) wynosi 62 (16 bez autocytowań), zaś h -indeks (indeks Hirscha) jest równy 5. Sumaryczny *impact factor* czasopism dla pięciu publikacji wchodzących w skład *osiągnięcia naukowego*, według listy Journal Citation Reports, to 11,306; sumaryczny *impact factor* dla wszystkich trzynastu publikacji wynosi 21,529, patrz Tabela 1.

(a) Lista prac niewchodzących w skład *osiągnięcia naukowego*

- [P1] M. Holschneider, I. Iglewska-Nowak, *Poisson wavelets on the sphere*, J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), no. 4, 405–419.
- [P2] I. Iglewska-Nowak, M. Holschneider, *Frames of Poisson wavelets on the sphere*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 28 (2010), no. 2, 227–248.
- [P3] I. Iglewska-Nowak, M. Holschneider, *Irregular Gabor frames*, Kyushu J. Math. 67 (2013), no. 1, 237–247.
- [P4] I. Iglewska-Nowak, *Multiresolution on n -dimensional spheres*, Kyushu J. Math., 70 (2016), no. 2, 353–374.
- [P5] I. Iglewska-Nowak, *On the uncertainty product of spherical wavelets*, Kyushu J. Math. 71 (2017), no. 2, 407–416.

Tab. 1: *Impact factor* czasopism według listy Journal Citation Report zgodnie z rokiem opublikowania (lub 2017 dla publikacji z roku 2018)

praca	czasopismo	rok publikacji	<i>impact factor</i>
[H1]	Appl. Comput. Harmon. Anal.	2015	2,094
[H2]	J. Fourier Anal. Appl.	2015	0,912
[H3]	Appl. Comput. Harmon. Anal.	2016	2,634
[H4]	Appl. Comput. Harmon. Anal.	2018	2,833
[H5]	Appl. Comput. Harmon. Anal.	2017	2,833
[P1]	J. Fourier Anal. Appl.	2007	1,125
[P2]	Appl. Comput. Harmon. Anal.	2010	3,144
[P3]	Kyushu J. Math.	2013	0,25
[P4]	Kyushu J. Math.	2016	0,375
[P5]	Kyushu J. Math.	2017	0,478
[P6]	Kyushu J. Math.	2017	0,478
[P7]	Appl. Comput. Harmon. Anal.	2018	2,833
[P8]	Int. J. Wavelets Multiresolution Inf. Process.	2018	0,54

[P6] I. Iglewska-Nowak, *Uncertainty of Poisson wavelets*, Kyushu J. Math. 71 (2017), no. 2, 349–362.

[P7] I. Iglewska-Nowak, *Angular multiselectivity with spherical wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 45 (2018), no. 3, 729–741.

[P8] I. Iglewska-Nowak, *Uncertainty product of the spherical Gauss-Weierstrass wavelet*, Int. J. Wavelets Multiresolution Inf. Process. 16 (2018), no. 4, 1850030, 14 pp.

[Pre1] I. Iglewska-Nowak, *A continuous spherical wavelet transform for $\mathcal{C}(\mathcal{S}^n)$* , arXiv: <https://arxiv.org/abs/1806.07881>.

[Pre2] I. Iglewska-Nowak, *Spin weighted wavelets on the sphere*, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1804.04947>.

[Pre3] I. Iglewska-Nowak, *Uncertainty product of the spherical Abel-Poisson wavelet*, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1806.07883>.

[Pre4] I. Iglewska-Nowak, *On the uncertainty product of spherical functions*, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1806.07880>.

(b) Omówienie wyników uzyskanych w wyżej wymienionych pracach

5.1 Badania opisane w rozprawie doktorskiej [P1–P3]

Dowód istnienia dyskretnych ramek falek Poissona na \mathcal{S}^2 był tematem mojej pracy doktorskiej zadanym mi przez promotora prof. Matthiasa Holschneidera. Artykuły [P1] i [P2] przedstawiają wyniki będące treścią rozprawy. Strategia jest analogiczna do tej, którą wykorzystałam w pracach nad falkami n -wymiarowymi i jest szczegółowo opisana w poprzedniej części tego autoreferatu.

W pracy [P3] zastosowałam metodę szacowania błędu dyskretyzacji przy splocie jąder transformaty Gabora, by pokazać, że istnieją dyskretne ramki Gabora. W dowodzie wykorzystałam fakt, że istnieją całkowalne majoranty jądra, podałam też przykład takiej majoranty. Dodatkowo do tych wyników, które były już opublikowane wcześniej w mojej rozprawie doktorskiej, w artykule [P3] wykazałam, że istnienie opisanej wyżej majoranty implikuje ograniczoność gradientu iloczynu jąder Gabora. Własność ta jest wykorzystana przy dowodzie głównego twierdzenia. W przypadku falek sferycznych wymagana jest ograniczoność gradientu jądra (i konieczna jest bezpośrednia weryfikacja tej własności), tutaj natomiast gradient jądra oscyluje, stąd dla dowodu używa się oszacowania gradientu iloczynu jąder.

Udowodniłam ponadto, że z ograniczoności jądra transformaty Gabora wynika, że okno czasowe jest funkcją klasy Schwartza (implikacja odwrotna jest oczywista).

Przykład numeryczny pokazuje, że dzięki tej metodzie można wyznaczyć górną granicę gęstości siatki taką, że próbkowanie na tej siatce wygeneruje dyskretną ramkę. Okazuje się jednak, że wielkość ta jest daleka od optymalnej (wyznaczonej innymi metodami). Oznacza to, że prezentowana metoda służyć powinna raczej do dowodzenia istnienia ramek.

5.2 Falki wielomianowe i analiza wielorozdzielcza [P4]

W artykule [P4] zdefiniowane są falki i transformata falkowa na sferze \mathcal{S}^n , istotnie różne od tych wywiedzionych z identyczności aproksymowanych. Zaprezentowana konstrukcja jest uogólnieniem wyników z [18] dotyczących falek na \mathcal{S}^2 . Falki w [P4] są kombinacjami liniowymi harmonik hipersferycznych. Z jednej strony powoduje to, że falki oscylują, z drugiej jednak gwarantuje, że falki i funkcje skalujące (przy tej konstrukcji falki stanowią różnicę funkcji skalujących o różnych skalach) są prostopadłe, mają własność reprodukującą oraz są w pewien sposób zlokalizowane. Falki i funkcje skalujące są próbkowane na siatkach równokątnych. Prosta zależność łączy falki i funkcje skalujące na różnych skalach, a ponadto stanowią one ramki rozpiętych na nich przestrzeni. Podany jest prosty algorytm rekonstrukcji sygnału, jednak może on być niestabilny ze względu na koncentrację próbek w pobliżu biegunów. Jednym z najważniejszych wyników prezentowanych w [P4] jest definicja analizy wielorozdzielczej (MRA). Według mojej wiedzy, jest to pierwsza próba

zdefiniowania MRA na \mathcal{S}^n . Ponadto w pracy wyprowadzony jest wzór na stałą nieoznaczoności dla funkcji zonalnych oraz wyznaczone stałe nieoznaczoności falek i funkcji skalujących.

5.3 Dalsze prace dotyczące falek wywiedzionych z identyczności aproksymowanych [P5–P8, Pre1–Pre3]

5.3.1 Stała nieoznaczoności

Wyniki opublikowane w artykułach [H1–H5] otwierają szerokie możliwości badań. Ze względu na ogólność definicji kierunkowe falki sferyczne mogą być konstruowane bądź oceniane według różnych kryteriów. Jest to tematem moich dalszych prac.

Jednym ze wskaźników jakości funkcji analizującej jest jej stała nieoznaczoności [54, 57]. Jest ona miarą kompromisu pomiędzy lokalizacją w przestrzeni a lokalizacją w częstotliwości. W przypadku ciągłych funkcji sferycznych dana jest wzorem

$$U(F) = \sqrt{\frac{1 - \|\xi_O(F)\|^2}{\|\xi_O(F)\|^2}} \cdot \frac{\|\nabla_{\mathcal{S}^n} F\|_2}{\|F\|_2},$$

gdzie

$$\xi_O(F) = \frac{1}{\|F\|_2^2} \int_{\mathcal{S}^n} x |F(x)|^2 d\sigma(x)$$

dla $F \in \mathcal{C}(\mathcal{S}^n)$. Jest ograniczona z dołu liczbą $\frac{n}{2}$ [57, 36]. Oznacza to, że nie można jednocześnie uzyskać ostrości i w przestrzeni, i w częstotliwości. Jest to odpowiednik reguły nieoznaczoności Heisenberga.

W pracy [47] wykazano, że stała nieoznaczoności jądra Gaussa-Weierstrassa na \mathcal{S}^2 dąży do wartości minimalnej przy $\rho \rightarrow 0$. Ciekawym zagadnieniem jest klasyfikacja innych funkcji opisanych Twierdzeniem 31 według kryterium wartości stałej nieoznaczoności albo wyznaczenie jej dla falek o skończonym spektrum, jak to zostało zrobione w [P4] (dla innej klasy falek, dla której skala jest z założenia dyskretna). W artykule [P5] zawarte są ogólne wyniki dotyczące stałej nieoznaczoności falek zdefiniowanych poprzez (40) [P5, Twierdzenie 3.4].

Twierdzenie 35 *Niech $\{\Psi_\rho\}$ będzie rodziną falek zonalnych takich danych wzorem (40), gdzie $a > 0$, $c > 0$, a $q_\nu(l) = a_\nu l^\nu + a_{\nu-1} l^{\nu-1} + \dots + a_1 l + a_0$ jest wielomianem stopnia ν , dodatnim i monotonicznie rosnącym dla $l \geq 1$. Stała nieoznaczoności funkcji Ψ_ρ dla $\rho \rightarrow 0$ spełnia warunek*

$$U(\Psi_\rho) \leq \mathcal{O}\left(\rho^{\frac{-a}{2\nu}}\right).$$

Oznacza to, że w ogólności stała nieoznaczoności falek sferycznych skonstruowanych w powyższy sposób nie musi być ograniczona. Dalsze badania wykazały, że jest ona ograniczona przy $\rho \rightarrow 0$ dla pewnych klas funkcji spełniających warunki Twierdzenia 35. Funkcjami tymi są falka Gaussa-Weierstrassa $\{\Psi_\rho^G\}$ (będąca pochodną jądra Gaussa-Weierstrassa), dla której zachodzi [P8]

$$U(\Psi_\rho^G) \leq \sqrt{2 \left(1 + \frac{6}{e} + \frac{16}{e^2}\right)} + O(1), \rho \rightarrow 0,$$

oraz falka Abela-Poissona $\{\Psi_\rho^A\}$ (którą można interpretować jako falkę Abela-Poissona rzędu $\frac{1}{2}$) spełniająca warunek [Pre4]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} U(\Psi_\rho^A) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n^2-3n+3)}{n(n-1)}}.$$

Jednak najciekawsze wyniki dotyczą falek Poissona $\{g_\rho^m\}$ [P6]. Ich stała nieoznaczoności nie tylko jest ograniczona przy $\rho \rightarrow 0$, ale też w pewnych przypadkach granicznych dąży do wartości optymalnej. Dokładniej: dla danego n falka Poissona rzędu $[(n-1)/2]$ ma najmniejszą spośród falek Poissona wszystkich rzędów wartość granicy stałej nieoznaczoności przy $\rho \rightarrow 0$:

$$\min_{m \in \mathbb{N}} \lim_{\rho \rightarrow 0} U(g_\rho^m) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n-1)(2n-1)}{2n-3}}.$$

Przy $n \rightarrow \infty$ wartość tego wyrażenia zachowuje się jak $\frac{n}{2}$, tzn. dąży do wartości optymalnej. Pokazuje to, że w przypadku funkcji sferycznych nie tylko jądro Gaussa ma minimalną nieoznaczoność, jak to ma miejsce przy funkcjach na przestrzeni euklidesowej.

5.3.2 Wielorozdzielczość kątowa

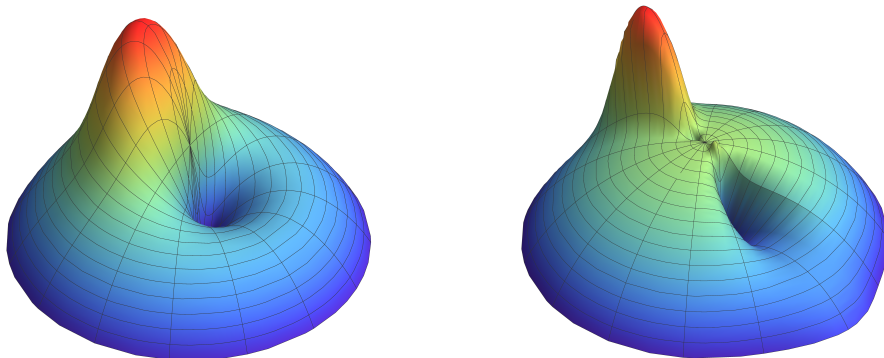
Inną własnością falek, którą można wyrazić liczbą, jest rozdzielczość kątowa. Ciekawym zagadnieniem jest konstrukcja falek kierunkowych mających wyraźny profil względem zmiennej kątowej φ , patrz [P7]. Falki takie pozwalają na dokładną analizę składowych kierunkowych sygnału.

Pierwsza pochodna kierunkowa jądra Poissona jest funkcją o zmiennych rozdzielonych:

$$g_\rho^1(\vartheta, \varphi) = v_\rho(\vartheta) \cdot \cos(\varphi).$$

Aby osiągnąć opisany powyżej cel, próbowałam zastąpić $\cos(\varphi)$ funkcją

$$f_\tau(\varphi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} F_\tau(\varphi + 2j\pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$



Rys. 5: Falka o małej i falka o dużej rozdzielczości kątowej

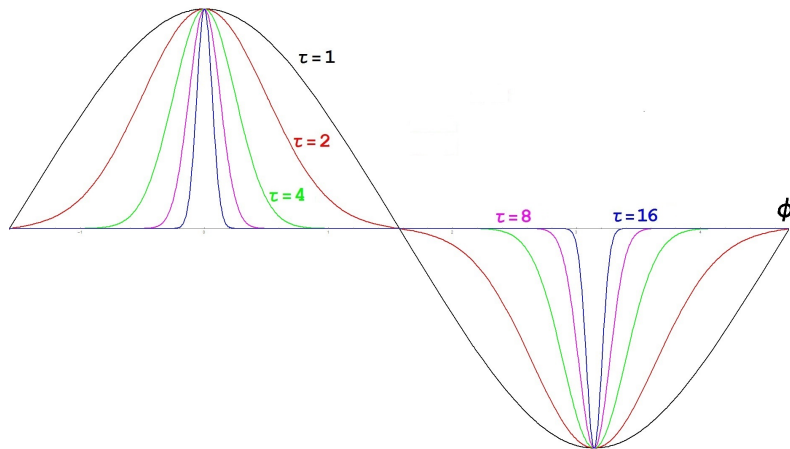
gdzie F_τ dane jest wzorem

$$F_\tau(\phi) = e^{-\frac{\tau^2 \phi^2}{2}} - e^{-\frac{\tau^2 (\phi - \pi)^2}{2}}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Okazało się jednak, że funkcja $(\vartheta, \varphi) \mapsto v_\rho(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$ nie jest falką. Niezbędne zatem było znaleźć funkcję ω_ρ taką, że $(\vartheta, \varphi) \mapsto \omega_\rho(\vartheta) \cdot f_\tau(\varphi)$ spełnia warunki Definicji 30. Sposobem na to było manipulowanie współczynnikami różnych pochodnych jądra Poissona i sprawdzanie, czy nierówności (16) i (17) są spełnione. Znalazłam dwie funkcje:

$$\begin{aligned} \omega_\rho^{(1)}(\vartheta) &= \rho \cdot \sin^5 \vartheta \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial}{\partial r} p_{r\hat{e}}(\cos \vartheta) \right], \\ \omega_\rho^{(2)}(\vartheta) &= \rho \cdot \sin^5 \vartheta \cdot r^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} p_{r\hat{e}}(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

gdzie $r = e^{-\rho}$. W obu przypadkach $\omega_\rho \cdot f_\tau$ jest falką dla każdej wartości $\tau \geq 1$. W związku z tym, jeśli transformata falkowa jest dyskretyzowana zgodnie ze schematem opisanym w [H5], poprzez odpowiedni dobór parametru τ można adaptować rozdzielczość kątową falki do własności analizowanego sygnału wykrytych w danym punkcie.



Rys. 6: f_τ dla różnych τ

5.3.3 Falki o wadze spinowej [Pre2]

W kolejnej pracy zdefiniowałam falki o wadze spinowej. Mogą one mieć zastosowanie w kosmologii, w szczególności przy badaniu polaryzacji mikrofalowego promieniowania tła. Falki te są uogólnieniem falek spinowych typu *needlet* z artykułu [30]. Polaryzację można interpretować jako cięcie wiązki liniowej na sferze, a *needlet-type spin wavelets* są narzędziem służącym do badania takich cięć. Można je też traktować jako uogólnienie *needlets* [32], które są przypadkiem szczególnym falek sferycznych [H1]. Zatem *spin-weighted spherical wavelets* rozszerzają klasę funkcji służących do badania polaryzacji promieniowania tła.

5.3.4 Transformata falkowa funkcji ciągłych [Pre1]

Innym ciekawym zagadnieniem jest analiza wielorozdzielcza oparta na falkach sferycznych (w miejsce harmonik hipersferycznych). Gdyby ją zdefiniować, mogłaby służyć za podstawę konstrukcji baz Schaudera dla funkcji *ciągłych* na \mathcal{S}^n lub przynajmniej na \mathcal{S}^2 , analogicznie jak to jest opisane np. w artykule [21]. Niezbędny jest staranny dobór funkcji rozpinających poszczególne przestrzenie, tak żeby stałe Lebesgue'a były jednostajnie ograniczone, patrz również [56]. W artykule [Pre1] skonstruowałam falkę sferyczną służącą do analizy funkcji ciągłych taką, że odwrotna transformata falkowa jest zbieżna w normie supremum.

5.4 Stała nieoznaczoności funkcji sferycznych [Pre4]

Moje wcześniejsze badania dotyczące stałej nieoznaczoności różnych klas falek dotyczyły funkcji obrotowo symetrycznych. Jednym z powodów był fakt, że wyznaczenie stałej nieoznaczoności dla funkcji niezonalnych wymaga skomplikowanych rachunków. W artykule [Pre4]

wyprowadziłam wzór wyrażający stałą nieoznaczoności funkcji ciągłej za pomocą jej współczynników Fouriera i zastosowałam go do drugiej pochodnej kierunkowej falki Poissona g_ρ^1 .

Literatura

- [1] J.-P. Antoine, *Wavelets and wavelet frames on the 2-sphere*, Contemporary problems in mathematical physics, 344–362, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [2] J.-P. Antoine, L. Demanet, L. Jacques, and P. Vandergheynst, *Wavelets on the sphere: Implementation and approximations*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 13 (2002), no. 3, 177–200.
- [3] J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S.T. Ali, *Two-dimensional wavelets and their relatives*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] J.-P. Antoine and P. Vandergheynst, *Wavelets on the n -sphere and related manifolds*, J. Math. Phys. 39 (1998), no. 8, 3987–4008.
- [5] J.-P. Antoine and P. Vandergheynst, *Wavelets on the 2-sphere: a group-theoretical approach*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 7 (1999), no. 3, 262–291.
- [6] H. Berens, P.L. Butzer, and S. Pawelke, *Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, Vol. 4 (1968), 201–268.
- [7] S. Bernstein, *Spherical singular integrals, monogenic kernels and wavelets on the three-dimensional sphere*, Adv. Appl. Clifford Algebr. 19 (2009), no. 2, 173–189.
- [8] S. Bernstein and S. Ebert, *Kernel based wavelets on S^3* , J. Concr. Appl. Math. 8 (2010), no. 1, 110–124.
- [9] S. Bernstein and S. Ebert, *Wavelets on S^3 and $SO(3)$ — their construction, relation to each other and Radon transform of wavelets on $SO(3)$* , Math. Methods Appl. Sci. 33 (2010), no. 16, 1895–1909.
- [10] I. Bogdanova, P. Vandergheynst, J.-P. Antoine, L. Jacques, and M. Morvidone, *Stereographic wavelet frames on the sphere*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 19 (2005), no. 2, 223–252.
- [11] P.L. Butzer, *Fourier–transform methods in the theory of approximation*, Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960), 390–415.
- [12] P.L. Butzer, *Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reelwertiger Funktionen*, Math. Ann. 144 (1961), 275–298.

- [13] A.P. Calderon and A. Zygmund, *On a problem of Mihlin*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 209–224.
- [14] P. Cerejeiras, M. Ferreira, and U. Kähler, *Clifford analysis and the continuous spherical wavelet transform*, in *Wavelet analysis and applications*, 173–184, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Basel, 2007.
- [15] A. Chambodut, I. Panet, M. Manda, M. Diament, M. Holschneider, and O. Jamet, *Wavelet frames: an alternative to spherical harmonic representation of potential fields*, Geophys. J. Int. 163 (2005), 875–899.
- [16] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston 2003.
- [17] O. Christensen and T.K. Jensen, *An introduction to the theory of bases, frames, and wavelets*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.17.241>, 1999.
- [18] M. Conrad and J. Prestin, *Multiresolution on the Sphere*, Summer School Lecture Notes on Principles of Multiresolution in Geometric Modelling (Summer School, Munich).
- [19] S. Ebert, *Wavelets on Lie groups and homogeneous spaces*, PhD–thesis, Freiberg 2011.
- [20] S. Ebert, S. Bernstein, P. Cerejeiras, and U. Kähler, *Nonzonal wavelets on \mathcal{S}^N* , 18th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, Weimar 2009.
- [21] W. Erb, *Uncertainty principles on Riemannian manifolds*, doctoral dissertation, TU München 2010.
- [22] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F.G. Tricomi *Higher transcendental functions, II*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1953.
- [23] M. Ferreira, *Spherical continuous wavelet transforms arising from sections of the Lorentz group*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 26 (2009), no. 2, 212–229.
- [24] W. Freeden, T. Gervens, and M. Schreiner, *Constructive approximation on the sphere. With applications to geomathematics*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [25] W. Freeden and M. Schreiner, *Non-orthogonal expansions on the sphere*, Math. Methods Appl. Sci. 18 (1995), no. 2, 83–120.
- [26] W. Freeden and M. Schreiner, *Orthogonal and nonorthogonal multiresolution analysis, scale discrete and exact fully discrete wavelet transform on the sphere*, Constr. Approx. 14 (1998), no. 4, 493–515.

- [27] W. Freeden and U. Windheuser, *Combined spherical harmonic and wavelet expansion – a future concept in Earth’s gravitational determination*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 4 (1997), no. 1, 1–37.
- [28] W. Freeden and U. Windheuser, *Spherical wavelet transform and its discretization*, Adv. Comput. Math. 5 (1996), no. 1, 51–94.
- [29] D. Geller, X. Lan, and D. Marinucci, *Spin needlets spectral estimation*, Electron. J. Stat. 3 (2009), 1497–1530.
- [30] D. Geller and D. Marinucci, *Spin wavelets on the sphere*, J. Fourier Anal. Appl. 16 (2010), no. 6, 840–884.
- [31] D. Geller and A. Mayeli, *Besov spaces and frames on compact manifolds*, Indiana Univ. Math. J. 58 (2009), no. 5, 2003–2042.
- [32] D. Geller and A. Mayeli, *Continuous wavelets on compact manifolds*, Math. Z. 262 (2009), no. 4, 895–927.
- [33] D. Geller and A. Mayeli, *Nearly tight frames and space–frequency analysis on compact manifolds*, Math. Z. 263 (2009), no. 2, 235–264.
- [34] D. Geller and A. Mayeli, *Nearly tight frames of spin wavelets on the sphere*, Sampl. Theory Signal Image Process. 9 (2010), no. 1–3, 25–57.
- [35] D. Geller and I.Z. Pesenson, *Band-limited localized Parseval frames and Besov spaces on compact homogeneous manifolds*, J. Geom. Anal. 21 (2011), no. 2, 334–371.
- [36] S.S. Goh and T.N.T. Goodman, *Uncertainty principles and asymptotic behavior*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 16 (2004), no. 1, 19–43.
- [37] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.
- [38] M. Hayn and M. Holschneider, *Directional spherical multipole wavelets*, J. Math. Phys. 50 (2009), no. 7, 073512, 11 pp.
- [39] M. Holschneider, *Continuous wavelet transforms on the sphere*, J. Math. Phys. 37 (1996), no. 8, 4156–4165.
- [40] M. Holschneider, A. Chambodut, and M. Manda, *From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames*, Phys. Earth Planet. Inter. 135 (2003), 107–123.
- [41] M. Holschneider and I. Iglewska-Nowak, *Poisson wavelets on the sphere*, J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), 405–419.

- [42] I. Iglewska-Nowak, *Poisson wavelet frames on the sphere*, doctoral thesis, Potsdam 2007.
- [43] I. Iglewska-Nowak, *Continuous wavelet transforms on n -dimensional spheres*, Appl. Comput. Harmon. Anal., *to appear*.
- [44] I. Iglewska-Nowak, *Semi-continuous and discrete wavelet frames on n -dimensional spheres*, preprint, https://www.researchgate.net/profile/Ilona_Iglewska-Nowak/publications.
- [45] I. Iglewska-Nowak and M. Holschneider, *Frames of Poisson wavelets on the sphere*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 28 (2010) 227–248.
- [46] X. Lan and D. Marinucci, *On the dependence structure of wavelet coefficients for spherical random fields*, Stochastic Process. Appl. 119 (2009), no. 10, 3749–3766.
- [47] N. Laín Fernández and J. Prestin, *Localization of the spherical Gauss-Weierstrass kernel*, Constructive theory of functions, 267–274, DARBA, Sofia, 2003.
- [48] A. Mayeli, *Asymptotic uncorrelation for Mexican needlets*, J. Math. Anal. Appl. 363 (2010), no. 1, 336–344.
- [49] J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, and A.N. Lasenby, *Fast directional continuous spherical wavelet transform algorithm*, IEEE Trans. Signal Process. 55 (2007), no. 2, 520–529.
- [50] J.D. McEwen, P. Vandergheynst, and Y. Wiaux, *On the computation of directional scale-discretized wavelet transforms on the sphere*, arXiv:1308.5706.
- [51] J.D. McEwen and Y. Wiaux, *A novel sampling Twierdzenie on the sphere*, IEEE Trans. Signal Process. 59 (2011), no. 12, 5876–5887.
- [52] F.J. Narcowich, P. Petrushev, and J.D. Ward, *Decomposition of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on the sphere*, J. Funct. Anal. 238 (2006) 530–564.
- [53] F.J. Narcowich, P. Petrushev, and J.D. Ward, *Localized tight frames on spheres*, SIAM J. Math. Anal. 38 (2006), no. 2, pp. 574–594.
- [54] F. J. Narcowich and J. D. Ward, *Nonstationary wavelets on the m -sphere for scattered data*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 3 (1996), no. 4, 324–336.
- [55] R.J. Nessel, A. Pawelke, *Über Favardklassen von Summationsprozessen mehrdimensionaler Fourierreihen*, Compositio Math. 19 (1968), 196–212.
- [56] J. Prestin and J. Schnieder, *Polynomial Schauder basis of optimal degree with Jacobi orthogonality*. J. Approx. Theory 174 (2013), 65–89.

- [57] M. Rösler and M. Voit, *An uncertainty principle for ultraspherical expansions*, J. Math. Anal. Appl. 209 (1997), no. 2, 624–634.
- [58] J.-L. Starck, Y. Moudden, P. Abrial, and M. Nguyen, *Wavelets, ridgelets and curvelets on the sphere*, Astron. Astrophys. 446 (2006), 1191–1204.
- [59] J.-L. Starck, Y. Moudden, and J. Bobin, *Polarized wavelets and curvelets on the sphere*, Astron. Astrophys. 497 (2009), 931–943.
- [60] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, no. 32. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [61] G. Sunouchi and C. Watari, *On the determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions*, Proc. Japan Acad. 34 (1958), 477–481.
- [62] N. Ja. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, in Translations of Mathematical Monographs, Vol. 22, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968.
- [63] Y. Wiaux, L. Jacques, and P. Vandergheynst, *Correspondence principle between spherical and Euclidean wavelets*, Astrophys. J. 632 (2005), no. 1, 15–28
- [64] Y. Wiaux, J.D. McEwen, and P. Vielva, *Complex data processing: fast wavelet analysis on the sphere*, J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), no. 4, 477–493.

Štoma Šprajcka-Šovak