Autoreferat

1. Imię i nazwisko:

Kamil Kaleta

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe - z podaniem nazwy miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

2008 dyplom magistra matematyki,
Instytut Matematyki i Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska,
praca magisterska *Teoria potencjału α-stabilnego ruchu Lévy'ego na fraktalach*
napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Tomasza Byczkowskiego i dr. hab. Mateusza Kwaśnickiego, prof. PWr.

2011 dyplom doktora nauk matematycznych,
Instytut Matematyki i Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska,
rozprawa doktorska *Teoria potencjału dla ułamkowych potęg operatora Laplace'a i związanych z nimi operatorów Schrödingera*
napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Tadeusza Kulczyckiego.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2011–2014	asystent w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej (w latach 2012-2014 urlop naukowy)
2014–2015 [1]	asystent w Katedrze Matematyki Wydziału PPT Politechniki Wrocławskiej (urlop naukowy)
2012–2015	asystent naukowy w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego (staż podoktorski)
2016–2017	staż podoktorski na Technische Universität Dresden, Niemcy
od 2015	adiunkt na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej

[1] zmiana miejsca zatrudnienia wynikała ze zmian organizacyjnych na uczelni, tzn. przekształcenia Instytutu Matematyki i Informatyki w Katedrę Matematyki na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki

4. **Wskazanie osiągnięcia uzyskanego zgodnie z art. 16. ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):**

(a) **Tytuł osiągnięcia naukowego**

Półgrupy Feynmana–Kaca procesów Lévy'ego z własnością bezpośredniego skoku

(b) **Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe**

[H1] K. Kaleta, J. Lőrinczi, *Pointwise eigenfunction estimates and intrinsic ultracontractivity-type properties of Feynman-Kac semigroups for a class of Lévy processes*, Annals of Probability 43 (3), 1350-1398 (2015).

[H2] K. Kaleta, P. Sztonyk, *Small time sharp bounds for kernels of convolution semigroups*, Journal d'Analyse Mathématique 132 (1), 355-394 (2017).

[H3] K. Kaleta, J. Lőrinczi, *Fall-off of eigenfunctions for non-local Schrödinger operators with decaying potentials*, Potential Analysis 46 (4), 647-688 (2017).

[H4] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Lőrinczi, *Contractivity and ground state domination properties for non-local Schrödinger operators*, Journal of Spectral Theory 8 (1), 165-189 (2018).

(c) **Omówienie celu wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania**

I. Wstęp

Klasyczne równanie Schrödingera, sformułowane w 1926 przez austriackiego fizyka Erwina Schrödingera, jest jednym z kluczowych równań nierelatywistycznej mechaniki kwantowej. W swojej najogólniejszej postaci opisuje ono ewolucję w czasie stanu kwantowego układu fizycznego. Podstawowym obiektem jest operator Schrödingera, który pełni rolę operatora energii (tzw. hamiltonianu) układu. Dla cząstki poruszającej się w polu o potencjale V, operator ten przyjmuje nastepującą postać w reprezentacji położeniowej

$$H = H_0 + V,$$

gdzie $H_0 = -\Delta$, a V jest operatorem mnożenia przez funkcję. Stany stacjonarne układu są opisywane przez równanie Schrödingera niezależne od czasu, które przyjmuje postać zagadnienia własnego $H\varphi = \lambda\varphi$. Laplasjan Δ jest generatorem infinitezymalnym ruchu Browna. Dzięki temu również własności operatora H, w tym własności rozwiązań wspomnianego zagadnienia własnego, mogą być efektywnie badane przy pomocy metod probabilistycznych [66].

Ze szczególnej teorii względności wynika, że w przypadku cząstek poruszających się z dużą prędkością (a więc w przypadku dużych energii) operator H_0 powinien być wybrany w inny sposób (zob. np. [50]). Pewne przybliżenia teorii relatywistycznej są często realizowane poprzez modele wykorzystujące tzw. *nielokalne operatory Schrödingera.* W tym przypadku $H_0 = -L$, gdzie L jest generatorem pewnego procesu Lévy'ego ze skokami. Szczególne miejsce zajmują tu operatory H oparte na

$$L = -(-\Delta + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} + m \quad \text{oraz} \quad L = -(-\Delta)^{\alpha/2}, \quad \alpha \in (0,2),\ m > 0,$$

zwane odpowiednio *quasi-relatywistycznymi* i *ultra-relatywistycznymi* (albo ułamkowymi) operatorami Schrödingera. Podobnie jak w przypadku klasycznym, półgrupy ewolucyjne nielokalnych operatorów Schrödingera mają reprezentacje stochastyczne (typu *Feynmana–Kaca*) względem procesów Lévy'ego ze skokami. Umożliwia to badanie ich własności przy pomocy metod probabilistycznych. Dodajmy, że w ostatnich latach można zaobserwować bardzo wzmożone zainteresowanie tematyką skokowych procesów Markowa i operatorów nielokalnych. Są one źródłem nowych metod w modelowaniu naukowym, w szczególności umożliwiają modelowanie zjawisk nieciągłych i wprowadzają konieczne poprawki do ustanowionych już teorii, czyniąc je bardziej zgodnymi z rzeczywistym doświadczeniem.

Teoria nielokalnych operatorów Schrödingera została istotnie rozwinięta przez ostatnie 30 lat. Własności spektralne i analityczne takich operatorów i ich półgrup ewolucyjnych były intensywnie badane przez wielu matematyków i fizyków, zarówno metodami analitycznymi, jak i probabilistycznymi. Wśród osób mających wkład w te badania są Bañuelos, Bogdan, Byczkowski, Carmona, Chen, Fefferman, Frank, Garbaczewski, Hansen, Herbst, Hiroshima, Jakubowski, Kim, Kulczycki, Kwaśnicki, Lieb, Lőrinczi, Seiringer, Simon, Song, Takeda, Weder, Wang [1, 8, 9, 11, 13, 20, 21, 23, 24, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 46, 47, 48, 69, 70]. Zaznaczmy, że wiele z tych prac badawczych, szczególnie w obrębie fizyki matematycznej, było silnie motywowanych dociekaniami E. Lieba i jego współpracowników nad stabilnością relatywistycznej materii [27, 50, 51].

Przedstawione osiągnięcie naukowe dotyczy nielokalnych operatorów Schrödingera $H = -L+V$, gdzie L jest generatorem *procesu Lévy'ego z własnością bezpośredniego skoku,* i związanych z nimi półgrup Feynmana–Kaca. Ich własności zostały zbadane metodami probabilistycznymi, w tym przy użyciu współczesnych technik probabilistycznej teorii potencjału. W pracy [H1] uzyskaliśmy dokładne dwustronne oszacowania tempa zaniku w nieskończoności funkcji własnej stanu podstawowego i górne oszacowania pozostałych funkcji własnych takich operatorów dla potencjałów Kato-rozkładalnych $V(x) \to \infty$, gdy $|x| \to \infty$. Następnie oszacowania te wykorzystaliśmy do zbadania i charakteryzacji tzw. własności mocnej kontraktywności półgrup Feynmana–Kaca ([H1] i [H4]). W pracy [H3] zbadaliśmy tempo zaniku funkcji własnych w przypadku $V(x) \to 0$, gdy $|x| \to \infty$. Praca [H2] dotyczy własności półgrup ewolucyjnych operatorów L – zawiera dokładne oszacowania ich jąder ciepła w skończonym horyzoncie czasowym. Ważną cechą prezentowanego tutaj osiągnięcia naukowego jest to, że proponuje ono kompleksowe metody uzyskiwania dokładnych oszacowań w obrębie szerokiej klasy procesów Lévy'ego o dość różnorodnych intensywnościach dalekich skoków. Klasa ta zawiera ważne rodziny procesów, których rozkłady mają zarówno ciężkie, jak i lekkie ogony (np. izotropowe *procesy stabilne* oraz *relatywistyczne* i *temperowane procesy stabilne*).

Poniższe omówienie cyklu prac [H1]-[H4] zostało podzielone na rozdziały ze względu na problematykę, a nie według chronologii powstawania poszczególnych prac. W rozdziale I ustalimy definicje i oznaczenia oraz omówimy podstawowe własności rozważanych procesów i operatorów. W rozdziale II zaprezentujemy oszacowania funkcji własnych w przypadku, gdy $V(x) \to \infty$, $|x| \to \infty$. Rozdział III poświęcony jest prezentacji wyników dotyczących własności mocnej kontraktywności. W rozdziale IV omówimy oszacowania funkcji własnych dla potencjałów $V(x) \to 0$, gdy $|x| \to \infty$. Rozdział V dotyczy jąder ciepła operatorów L.

Notacja

Dodatnie stałe występujące w sformułowaniach kolejnych założeń i wyników w poniższym opisie będą oznaczane wspólnym symbolem C i nie będą numerowane. Notacja $\widetilde{C}$ lub numeracja $C_1, C_2, \ldots$ będzie jednak czasem stosowana lokalnie dla rozróżnienia stałych w obrębie sformułowania jednego założenia, lematu lub twierdzenia (nie odpowiada to jednak numeracji w żadnej z cytowanych prac). Ze względu na dość dużą ogólność naszych rozważań, stałe występujące w oszacowaniach na ogół zależą od procesu i potencjału, oraz wymiaru przestrzeni. Nie będzie to już odrębnie zaznaczane. W przypadku, gdy zależność (lub niezależność) danej stałej od pewnego parametru będzie istotna, to wyraźnie to podkreślimy. Gdy f i g są funkcjami nieujemnymi, to poniżej często stosujemy skrócony zapis $f(x) \asymp g(x)$, $x \in A$, który oznacza, że istnieje stała $C \geq 1$ spełniająca nierówności

$$C^{-1}g(x) \leq f(x) \leq Cg(x), \quad x \in A.$$

Napiszemy też $f(x) \stackrel{C}{\asymp} g(x)$, gdy konieczne będzie odwołanie się do stałej C ustalającej tę porównywalność. Oszacowanie dwustronne nieujemnej funkcji f przez funkcje g i h, tj.

$$C_1 g(x) \leq f(x) \leq C_2 h(x), \quad x \in A,$$

nazwiemy *dokładnym* lub *ostrym* (ang. *sharp*) tylko w przypadku, gdy $g(x) \asymp h(x)$, $x \in A$.

Procesy Lévy'ego i własność bezpośredniego skoku

Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie procesem Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Przypomnijmy, że $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest jednorodnym w czasie i w przestrzeni procesem Markowa względem swojej naturalnej filtracji, z mocną własnością Markowa, o trajektoriach typu càdlàg. Oznaczmy przez $\mathbb{P}^x$ i $\mathbb{E}^x$ miarę prawdopodobieństwa i wartość oczekiwaną dla procesu startującego z $x \in \mathbb{R}^d$. Procesy Lévy'ego są jednoznacznie opisane przez wzór Lévy'ego-Chinczyna

$$\mathbb{E}^0 e^{i\xi\cdot X_t} = e^{-t\psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \ t > 0,$$

gdzie

$$\psi(\xi) = -i\xi\cdot b + \xi \cdot A\xi + \int \left(1 - e^{i\xi\cdot y} + i\xi\cdot y \mathbb{1}_{B(0,1)}(y)\right) \nu(dy), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,d}$ jest symetryczną i nieujemnie określoną macierzą $d \times d$, $b \in \mathbb{R}^d$, a ν jest miarą Lévy'ego na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, tzn. $\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (1 \wedge |z|^2)\, \nu(dz) < \infty$. Oznaczmy przez $\{P_t : t \geq 0\}$ półgrupę przejścia procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Będziemy używać tego samego symbolu P_t w odniesieniu do rozkładu zmiennej X_t (tj. $P_t(E - x) = \mathbb{P}^x(X_t \in E)$ i w odniesieniu do operatora zdefiniowanego przez działanie tej miary (tj. $P_t f(x) = \mathbb{E}^x f(X_t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y+x) P_t(dy)$). Generator infinitezymalny L (półgrupy przejścia) procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest jednorodnym, nielokalnym operatorem pseudoróżniczkowym zdefiniowanym przez

$$\widehat{Lf}(\xi) = -\psi(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad f \in D(L) := \{h \in L^2(\mathbb{R}^d) : \psi\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \tag{2}$$

($\widehat{f}(\xi)$ oznacza tu transformatę Fouriera $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\xi\cdot x} dx$ funkcji f; czasem piszemy też $\mathcal{F}f(\xi)$). Funkcja ψ nazywana jest często wykładnikiem charakterystycznym (Lévy'ego-Chinczyna) albo symbolem. Dla funkcji f klasy C^2 o nośniku zwartym działanie operatora L przyjmuje postać

$$L\, f(x) = b \cdot \nabla f(x) + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x) + \int \left(f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{B(0,1)}(z) z \cdot \nabla f(x)\right) \nu(dz). \tag{3}$$

W tym oraz w trzech kolejnych rozdziałach II-IV, których zawartość odpowiada pracom [H1], [H3] i [H4], **będziemy stale zakładać**, że

$$b = 0, \quad \nu(-E) = \nu(E) \tag{4}$$

oraz

$$\nu(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = \infty, \quad \nu(dx) = \nu(x)dx, \tag{5}$$

tj. ν jest nieskończoną miarą absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a (w dalszej części tego rozdziału oraz w rozdziałach II-IV będziemy posługiwać się wyłącznie gęstością miary Lévy'ego i oznaczać ją tym samym symbolem ν). Warunek (4) oznacza, że process $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jest *symetryczny*, tzn. $-X_t$ ma ten sam rozkład co X_t, a (5) gwarantuje, że jego rozkłady jednowymiarowe są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a [61, Theorem 27.7] (gęstości miar P_t oznaczamy przez $p_t(x)$). Równoważnie, process $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ma mocną własność Fellera, tzn. funkcja $x \mapsto P_t f(x) = \mathbb{E}^x f(X_t)$ jest ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}^d$ dla wszystkich $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $t > 0$. Dzięki (4)–(5) wzór (1) redukuje się do

$$\psi(\xi) = \xi \cdot A\xi + \int (1 - \cos(\xi \cdot y))\, \nu(y)dy, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{6}$$

ψ jest nieograniczoną (nawet gdy $A \equiv 0$) funkcją o wartościach w $[0, \infty)$, a $-L$ jest samosprzężonym, nieujemnie określonym operatorem nieograniczonym w $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Poniżej będziemy też potrzebować informacji o procesie Lévy'ego zabitym po wyjściu z ograniczonego zbioru otwartego $D \subset \mathbb{R}^d$. Przez τ_D oznaczamy czas pierwszego wyjścia procesu ze zbioru D, tzn.

$$\tau_D := \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}.$$

Gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ zabitego po wyjściu ze zbioru D dana jest wzorem Dynkina–Hunta

$$p_D(t, x, y) = p_t(y - x) - \mathbb{E}^x\left[\tau_D < t; p_{t-\tau_D}(y - X_{\tau_D})\right], \quad x, y \in D, \ t > 0. \tag{7}$$

Przyjmujemy, że $p_D(t, x, y) = 0$, gdy $x \notin D$ lub $y \notin D$. Mamy, $\mathbb{P}^x(t < \tau_D) = \int_D p_D(t, x, y)\, dy$, $x \in D$, $t > 0$. Ponadto, funkcja Greena procesu $(X_t)_{t\geq 0}$ zabitego po wyjściu z D jest zdefiniowana jako $G_D(x, y) = \int_0^\infty p_D(t, x, y)\, dt$. Naszym podstawowym źródłem informacji o własnościach procesów Lévy'ego i ich półgrup są monografie [6, 17, 41, 61].

Przypomnijmy, że w pracach [H1], [H3] i [H4] rozważamy wyłącznie symetryczne procesy Lévy'ego o nieskończonych miarach Lévy'ego, absolutnie ciągłych względem wielowymiarowej miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (tj. spełniające warunki (4)–(5)). Sformułujemy teraz założenia (A1)-(A3), przy których uzyskujemy nasze główne wyniki w tej klasie procesów. Dwa pierwsze z nich, dotyczące bezpośrednio gęstości $\nu(x)$ i $p_t(x)$, mają znaczenie strukturalne. Trzecie założenie, pochodzące oryginalnie z pracy [15], dotyczy funkcji Greena kuli i ma charakter techniczny. Pojawia się ono także tutaj, ponieważ nasze metody dowodowe oparte są w dużej mierze na argumentach z teorii potencjału.

(A1) ***Gęstość miary Lévy'ego.*** Istnieje funkcja nierosnąca $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, która spełnia następujące warunki:

a) $\nu(x) \asymp g(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

b) istnieje stała $C_1 \geq 1$ taka, że $g(r) \leq C_1 g(r + 1)$, $\quad r \geq 1$,

c) *własność bezpośredniego skoku*: istnieje stała $C_2 > 0$ taka, że

$$\int_{\substack{|x-y|>1 \\ |y|>1}} g(|x-y|)g(|y|)\,dy \leq C_2 g(|x|), \quad |x| \geq 1.$$

Funkcję g spełniającą (A1.a) nazwiemy *profilem gęstości* miary Lévy'ego.

(A2) ***Gęstość przejścia.*** Istnieje $t_b > 0$ takie, że $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} p_{t_b}(x) < \infty$.

(A3) ***Funkcja Greena.*** Dla wszystkich $0 < p < q < R \leq 1$ zachodzi

$$\sup_{x \in B(0,p)} \sup_{y \in B(0,q)^c} G_{B(0,R)}(x,y) < \infty.$$

W pracach [H3]-[H4] nasze bazowe założenia zostały sformułowane w takiej postaci, jak powyżej (przy czym w [H3] wymagamy (A3) dla dowolnych $R > 0$), a w pracy [H1], która otwiera cykl, nieco inaczej. Warunki (A1)-(A3) odpowiadają tam kolejno założeniom [H1, Assumptions 2.1-2.3]. Pierwsze z tych założeń zostało sformułowane w nieco ogólniejszej postaci, ale jest spełnione automatycznie, gdy zachodzi (A1) (zobacz uwagi zamieszczone bezpośrednio pod tym założeniem w pracy [H1]). Dodatkowo, założenie [H1, Assumptions 2.2] postuluje także istnienie gęstości $p_t(x)$. Nie jest to jednak konieczne, bo istnienie wynika zawsze z (5). Wystarczy zatem zakładać (A2).

Warunek splotowy w (A1.c), który determinuje klasę procesów rozważanych w prezentowanym tu cyklu prac, ma znaczenie strukturalne w naszych badaniach. W pewnym sensie wyjaśnia on strukturę uzyskiwanych przez nas wyników i ma bardzo naturalną intepretację probabilistyczną. Ponieważ $\nu \asymp g$ i profil g jest monotoniczny, to można sprawdzić, że warunek (A1.c) jest w rzeczywistości równoważny istnieniu stałej $C > 0$, która spełnia

$$\int_{\substack{1<|x-y|<|x| \\ 1<|y|<|x|}} \nu(x-y)\nu(y)\,dy \leq C\nu(x), \quad |x| > 1.$$

Funkcja $\nu(x)$ obcięta do $\{x : |x| > 1\}$ może być interpretowana jako intensywności dalekich skoków wyjściowego procesu Lévy'ego (po unormowaniu jest ona nawet gęstością rozkładu pojedynczego skoku jego części poissonowskiej). Powyższy warunek oznacza więc, że *intensywność sekwencji dwóch dalekich skoków procesu jest dominowana przez intensywność jednego, bezpośredniego dalekiego skoku.* Może to być rozumiane w ten sposób, że osiągnięcie przez cząstkę startującą ze środka układu pewnego odległego położenia x przy pomocy jednego bezpośredniego skoku jest asymptotycznie nie mniej prawdpopodobne niż zrealizowanie tego położenia przy pomocy kombinacji kilku krótszych skoków. Ta interpretacja uzasadnia nazywanie (A1.c) własnością bezpośredniego skoku (ang. *direct jump property*; w skrócie DJP). Opisane powyżej zjawisko może być też rozumiane jako własność redukcji wielokrotnych dalekich skoków (w naszych pracach [H3]-[H4] założenie (A1.c) nazywane było *jump-paring property*).

Założenia (A1)-(A3) są spełnione dla szerokiej klasy procesów Lévy'ego ze skokami [H1, Section 4], [H4, Section 4], [H3, Sections 4.3-4.4]. Warunek splotowy (A1.c) został scharakteryzowany w [H2, Proposition 2] (zob. też [H2, Example 2 (1)]) dla pewnej rodziny profilów g, która właściwie pokrywa większość ważnych i interesujących procesów. Gdy na przykład profil g ma własność podwajania, to (A1.c) zachodzi automatycznie. Zaznaczmy jednak, że nasze założenia i metody dowodowe znajdują zastosowanie dla procesów o różnych typach intensywności dalekich skoków: wielomianowych (np. skokowe procesy stabilne), wykładniczych (np. relatywistyczne i temperowane procesy stabilne), a także pośrednich (np. procesy typu Weibulla, które stają się coraz powszechniejsze w modelowaniu). Mogą to być zarówno procesy izotropowe, jak i procesy nieizotropowe, których intensywności skoków są kontrolowane przez monotoniczne profile izotropowe. Praca [P6] zawiera odnośniki do literatury dotyczącej zastosowań procesów o szybko zanikających intensywnościach skoków.

Półgrupy Feynmana–Kaca i nielokalne operatory Schrödingera

Zacznijmy od wprowadzenia klasy potencjałów schrödingerowskich, które rozważane są w prezentowanym cyklu prac (por. [H1, Definition 2.1], [H3, Definition 2.2], [H4, Definition 3.2]).

Definicja 1 (**Klasa Kato**). Mówimy, że funkcja borelowska $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ należy do *klasy Kato* $\mathcal{K}$ związanej z procesem Lévy'ego $\{X_t\}_{t\geq 0}$, jeśli spełniony jest warunek

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x\left[\int_0^t |V(X_s)|ds\right] = 0. \tag{8}$$

Podobnie, $V \in \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}$, gdy $V\mathbf{1}_B \in \mathcal{K}$ dla dowolnej kuli $B \subset \mathbb{R}^d$. Panadto, V nazwiemy funkcją *Kato-rozkładalną* (lub z *X-klasy Kato*; ang. *X-Kato class*), co oznaczamy przez $V \in \mathcal{K}_{\pm}$, jeśli

$$V_- \in \mathcal{K} \quad \text{i} \quad V_+ \in \mathcal{K}_{\mathrm{loc}},$$

gdzie V_+, V_- oznaczają odpowiednio część dodatnią i część ujemną V.

Jeśli L jest generatorem procesu Lévy'ego określonym przez (2), warunki (4)-(5) są spełnione oraz $V \in \mathcal{K}_{\pm}$, to

$$H := -L + V$$

może zostać zdefiniowany w sensie form kwadratowych jako operator samosprzężony określony na gęstej dziedzinie w $L^2(\mathbb{R}^d)$ i ograniczony z dołu. Operator H nazywamy *nielokalnym operatorem Schrödingera opartym na generatorze* L, zaś sam operator $-L$ często nazywany jest *częścią kinetyczną* H. V jest tu operatorem mnożenia przez funkcję, która nazywana jest *potencjałem*. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, większość motywacji do badania nielokalnych operatorów Schrödingera pochodzi z fizyki matematycznej. Operator H może być interpretowany jako *hamiltonian* pewnego układu fizycznego. Część ujemna V_- często nazywana jest potencjałem *przyciągającym* (ang. *attractive potential*), a część dodatnia V_+ potencjałem *odpychającym* (ang. *repulsive potential*).

Półgrupa schrödingerowska związana z operatorem H ma reprezentację stochastyczną względem procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ [29, Rozdział 2.A]. Dokładniej, zachodzi równość

$$e^{-tH}f(x) = T_t f(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad t > 0, \tag{9}$$

gdzie

$$T_t f(x) := \mathbb{E}^x\left[e^{-\int_0^t V(X_s)ds} f(X_t)\right], \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{10}$$

Równość (9) często nazywana jest *wzorem Feynmana-Kaca.* Jest to bezpośrednie uogólnienie klasycznego wyniku z teorii lokalnych operatorów Schrödingera, gdzie rolę procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ pełni ruch Browna. Wzór Feynmana–Kaca jest niezwykle użytecznym narzędziem, które pozwala na badanie różnorodnych własności operatorów H i e^{-Ht} przy pomocy metod probabilistycznych, w tym szeroko rozwiniętych nowoczesnych technik probabilistycznej teorii potencjału. Bardzo często różne zagadnienia związane z nielokalnymi operatorami Schrödingera, w tym również problemy z fizyki matematycznej, są wręcz formułowane w języku procesów stochastycznych. Tutaj punktem wyjścia jest proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ oraz rodzina operatorów $\{T_t : t \geq 0\}$, które mogą być rozpatrywane zupełnie niezależnie od (9). Nasze podejście w pracach [H1], [H3], [H4] jest również głównie probabilistyczne, co mocno wpisuje się w ten trend. W dalszym ciągu będziemy posługiwać się już wyłącznie reprezentacją stochastyczną półgrupy schrödingerowskiej związanej z operatorem H.

Rodzina $\{T_t : t \geq 0\}$ zdefiniowana w (10) jest mocno ciągłą półgrupą operatorów symetrycznych na $L^2(\mathbb{R}^d)$. Będziemy nazywać ją *półgrupą Feynmana–Kaca* procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ z potencjałem V. Zauważmy, że gdy $V \geq 0$ (tzn. $V_- \equiv 0$), to $\{T_t : t \geq 0\}$ jest półgrupą przejścia pewnego procesu Markowa, którego trajektorie *zabijane* są z losową intensywnością wyznaczoną przez potencjał V. Gdy $V_- \neq 0$, to ze względu na *zjawisko kreacji masy* półgrupie $\{T_t : t \geq 0\}$ nie można nadać bezpośredniej interpretacji probabilistycznej.

Przypomnimy teraz podstawowe własności półgrup Feynmana–Kaca.

Lemat 2. *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a. Załóżmy (A2) i niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}$.*

(a) Operatory $T_t : L^p(\mathbb{R}^d, dx) \to L^p(\mathbb{R}^d, dx)$ są ograniczone dla $t \geq 0$ i $1 \leq p \leq \infty$. Ponadto, $T_t : L^p(\mathbb{R}^d, dx) \to L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ są ograniczone dla $t \geq t_b$ i $1 \leq p < \infty$.

(b) Funkcja $x \mapsto T_t f(x)$ jest ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}^d$ dla wszystkich $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ i $t > 0$ (tzn. półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest mocno fellerowska).

(c) Operatory T_t mają jądra całkowe, tzn. dla każdego $t > 0$ istnieje ciągła i symetryczna funkcja $u_t(\cdot, \cdot)$ na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ taka, że

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_t(x, y) f(y) dy, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d, dx), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Ponadto, $u_t(x, y) > 0$ dla $t > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}^d$ oraz $\sup_{x,y\in\mathbb{R}^d} u_t(x, y) < \infty$, dla $t \geq t_b$.

Szersze wprowadzenie do teorii półgrup Feynmana–Kaca można znaleźć w monografiach [29] i [25, Rozdział 3.2].

Przypomnijmy, że skoro H jest operatorem samosprzężonym, to $\operatorname{spec} H \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że λ jest wartością własną H, gdy istnieje $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ spełniająca równanie $H\varphi = \lambda\varphi$ (lub, równoważnie, $T_t\varphi = e^{-\lambda t}\varphi$, $t > 0$). Oznaczmy:

$$\lambda_0 := \inf \operatorname{spec} H.$$

Gdy λ_0 jest wartością własną, to używając nomenklatury pochodzącej z fizyki matematycznej mówimy, że operator H ma *stan podstawowy* (ang. ground state). Ze ścisłej dodatniości jąder $u_t(x, y)$ wynika, że λ_0 jest jednokrotna (tzn. H ma *niezdegenerowany stan podstawowy*), a odpowiadająca jej funkcja własna φ_0 jest ściśle dodatnia (zob. np. [58, Theorem XIII.43]). Poniżej λ_0 i φ_0 nazywane będą *wartością własną* i *funkcją własną stanu podstawowego* H. Zawsze zakładamy, że $\|\varphi_0\|_2 = 1$. Zauważmy, że gdy φ jest funkcją własną odpowiadającą wartości własnej λ, to własności (a) i (b) w Lemacie 2 implikują kolejno, że $\varphi = e^{\lambda t_b} T_{t_b} \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ i $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Oznacza to, że φ ma wersję, która jest ciągła i ograniczona (a w przypadku φ_0 nawet ściśle dodatnia) na $\mathbb{R}^d$. W szczególności, równania własne $T_t\varphi(x) = e^{-\lambda t}\varphi(x)$ mogą być rozpatrywane punktowo dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$.

Określimy teraz dwie rozłączne podrodziny Kato-rozkładalnych potencjałów schrödingerowskich, których dotyczy osiągnięcie naukowe prezentowane w tym autoreferacie.

DEFINICJA 3. Niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}$. Wówczas

- $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$, gdy $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$,
- $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{0}$, gdy $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$.

Potencjały z klasy $\mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$ (ang. *confining potentials*) są rozważane w pierwszej i czwartej pracy z tego cyklu (por. [H1, Assumption 2.4] oraz [H4, Assumption (A4)]), a te z klasy $\mathcal{K}_{\pm}^{0}$ (ang. *decaying potentials*) w trzeciej pracy (por. [H3, Assumption (A4)]). W autoreferacie odpowiada to kolejno rozdziałom II-III i IV.

Gdy $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$, to operatory T_t dla $t > 0$ są zwarte, a spektra T_t i H składają się z izolowanych wartości własnych o skończonych krotnościach. Dokładniej, istnieje przeliczalna baza ortonormalna $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ w $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ spełniająca $H\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ oraz $T_t\varphi_n = e^{-\lambda_n t}\varphi_n$ dla $t > 0$, gdzie $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \to \infty$ (dla wygody wartości własne λ_n zliczamy w tej reprezentacji bez krotności, ale każda z nich powtarza się co najwyżej skończenie wiele razy; wyjątkiem jest λ_0, która jest jednokrotna). W szczególności, automatycznie istnieje niezdegenerowany stan podstawowy.

Jeśli $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{0}$, to operatory T_t nie są zwarte i spektra T_t i H wyglądają zupełnie inaczej. Spektrum istotne operatora H pokrywa się ze spektrum istotnym operatora $-L$ i jest równe $[0, \infty)$. Jeśli zatem istnieje izolowana wartość własna λ (o skończonej krotności) operatora H, to koniecznie $\lambda < 0$. Problem istnienia i własności ujemnych wartości własnych był szeroko badany zarówno w przypadku lokalnych jak i nielokalnych operatorów Schrödingera. Odnośniki do literatury wraz z nieco szerszą dyskusją zostały zamieszczone na początku [H3, Section 4.1].

Półgrupa warunkowana przez stan podstawowy i związany z nią process

Wprowadzimy teraz definicję półgrupy schrödingerowskiej warunkowanej przez stan podstawowy, która jest jednym z podstawowych obiektów rozważanych w pracach [H1] i [H4] (odpowiada to materiałowi prezentowanemu w rozdziale III tego autoreferatu). Niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$. Przypomnijmy, że w tym przypadku automatycznie istnieje jedyna $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, $\varphi_0 > 0$, $\|\varphi_0\|_2 = 1$, taka, że $H\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$ oraz $T_t\varphi_0 = e^{-\lambda_0 t}\varphi_0$, $t > 0$, gdzie $\lambda_0 := \inf \operatorname{spec} H$. Niech $\mu(dx) = \varphi_0^2(x)dx$.

Wychodząc od półgrupy Feynmana–Kaca $\left\{T_t : t \geq 0\right\}$ procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ z potencjałem V, określamy

$$\widetilde{T}_t f(x) = \frac{1}{\varphi_0(x)} e^{\lambda_0 t} T_t(f\varphi_0)(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu), \quad t > 0. \tag{11}$$

Nietrudno sprawdzić, że tak zdefiniowane operatory są symetryczne i tworzą mocno ciągłą półgrupę na $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$, którą nazywamy *półgrupą warunkowaną przez stan podstawowy* (ang. ground state transformed semigroup). Czasem jest ona też nazywana półgrupą wewnętrzną (ang. intrinsic semigroup). Generatorem półgrupy $\left\{\widetilde{T}_t : t \geq 0\right\}$ jest operator $-\widetilde{H}$, gdzie $\widetilde{H}f = \varphi_0^{-1}H(f\varphi_0) - \lambda_0 f$ jest zdefiniowany dla funkcji $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$, dla których $f\varphi_0$ należy do dziedziny H. Operatory $\widetilde{H}$ i $H - \lambda_0$ są więc unitarnie równoważne. Ponadto, $\widetilde{T}_t\mathbf{1} = \mathbf{1}$, $t > 0$.

Operatory $\widetilde{T}_t$, $t > 0$, podobnie jak T_t, są operatorami całkowymi. Dokładniej, jeśli $u_t(x, y)$ jest jądrem całkowym T_t, to mamy

$$\widetilde{T}_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{u}_t(x, y) f(y) \mu(dy), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu), \quad t > 0,$$

gdzie

$$\widetilde{u}_t(x,y) := \frac{e^{\lambda_0 t} u_t(x,y)}{\varphi_0(x)\varphi_0(y)}.$$

Półgrupa operatorów $\left\{\widetilde{T}_t : t \geq 0\right\}$ definiuje stacjonarny proces Markowa o trajektoriach typu càdlàg, tzw. *proces Markowa warunkowany przez stan podstawowy* (ang. *ground state transformed Markov process*), związany z nielokalnym operatorem Schrödingera H. Zauważmy, że funkcja własna stanu podstawowego φ_0 jest dodatnią funkcją harmoniczną operatora Schrödingera $H - \lambda_0 = -L + V - \lambda_0$. Oznacza to, że z punktu widzenia teorii prawdopodbieństwa kontrukcja (11) jest w istocie szczególnym przypadkiem tzw. transformacji (albo warunkowania w sensie) Dooba procesu Markowa. W analizie stochastycznej taka zmiana miary znana jest też jako transformacja Girsanova typu skokowego [32, Chapter 6.3], [62] (zob. też [57]).

Nietrudno sprawdzić, że w przypadku klasycznych operatorów Schrödingera opartych na laplasjanie powyższa kontrukcja prowadzi do procesów dyfuzyjnych z dryfem wyznaczonym przez pole $\nabla \log \varphi_0$. Dla przykładu, gdy $H = -\Delta + |x|^2$ (oscylator harmoniczny), to proces warunkowany jest dyfuzją Ornsteina-Uhlenbecka. Gdy potencjał jest wielomianem parzystego stopnia, to jest on często nazywany $P(\phi)_1$-procesem stowarzyszonym z operatorem Schrödingera H (zob. np. [59]). Warto podkreślić, że takie procesy są centralnymi obiektami tzw. nelsonowskiej stochastycznej mechaniki kwantowej [55].

W przypadku skokowym procesy warunkowane przez stan podstawowy były już częściowo badane [33, 34, 35, D1, P6, P11].

Narzędzia probabilistycznej teorii potencjału

Znaczna część głównych wyników uzyskanych w pracach [H1], [H3] i [H4] dotyczy własności lokalizacji funkcji własnych operatorów H w nieskończoności. Zastosowane przez nas metody opierają się na sprowadzeniu tego problemu do znajdowania dostatecznie dokładnych oszacowań punktowych dla funkcji harmonicznych względem procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$, którego trajektorie są zabijane z losową intensywnością wyznaczoną przez nieujemny potencjał V.

Niech $0 \leq V \in \mathcal{K}_{\pm}$. Nieujemną funkcję borelowską f na $\mathbb{R}^d$ nazywamy (X,V)-*harmoniczną* w zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^d$, jeśli spełnia warunek średniej

$$f(x) = \mathbb{E}^x \left[\tau_U < \infty; e^{-\int_0^{\tau_U} V(X_s)ds} f(X_{\tau_U})\right], \quad x \in U, \tag{12}$$

dla każdego zbioru otwartego U, dla którego $\overline{U} \subset D$. Ponadto, f jest nazywana funkcją *regularnie (X,V)-harmoniczną* w D, jeśli (12) zachodzi dla $U = D$ (przypomnijmy, że τ_U oznacza moment pierwszego wyjścia procesu ze zbioru U). Dzięki mocnej własności Markowa procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$, każda funkcja regularnie (X,V)-harmoniczna jest funkcją (X,V)-harmoniczną. W zastosowaniach szczególnie ważna jest sytuacja, gdy D jest kulą otwartą lub dopełnieniem kuli domkniętej w $\mathbb{R}^d$. W ostatnim przypadku własność (12) często nazywana jest *harmonicznością w nieskończoności.*

W naszych oszacowaniach najczęściej pojawiają się funkcje (X,η)-harmoniczne, gdzie η jest liczbą dodatnią. Odpowiada to sytuacji, gdy trajektorie procesu Lévy'ego zabijane są ze stałą intensywnością $V \equiv \eta > 0$. W tym przypadku, o ile nośnik funkcji f jest oddzielony od zbioru D, wyrażenie występujące po prawej stronie (12) może być często efektywnie oszacowane przy pomocy wersji tzw. *wzoru Ikedy-Watanabe* (por. [40, Theorem 1]): jeśli $D \subset \mathbb{R}^d$ jest otwartym zbiorem ograniczonym, $\eta \geq 0$, a f jest ograniczoną lub nieujemną funkcją borelowską na $\mathbb{R}^d$, dla której $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\, f, D) > 0$, to prawdziwa jest równość

$$\mathbb{E}^x\left[e^{-\eta\tau_D} f(X_{\tau_D})\right] = \int_D \int_0^\infty e^{-\eta t} p_D(t,x,y)dt \int_{D^c} f(z)\nu(z-y)dzdy, \quad x \in D. \tag{13}$$

Operator Greena (potencjału) półgrupy $\{T_t : t \geq 0\}$ zdefiniowany jest wzorem

$$G^V f(x) = \int_0^\infty T_t f(x)dt = \mathbb{E}^x\left[\int_0^\infty e^{-\int_0^t V(X_s)ds} f(X_t)dt\right],$$

dla wszystkich nieujemnych lub ograniczonych funkcji borelowskich f na $\mathbb{R}^d$. Podobnie określony jest operator Greena dla zbioru otwartego D:

$$G_D^V f(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}^x\left[t < \tau_D; e^{-\int_0^t V(X_s)ds} f(X_t)\right] dt = \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\int_0^t V(X_s)ds} f(X_t)dt\right], \quad x \in D,$$

dla wszystkich nieujemnych lub ograniczonych funkcji borelowskich f na D. Zauważmy, że gdy $V \geq 0$, to wyrażenie $G_D^V \mathbf{1}(x) = \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\int_0^t V(X_s)ds}dt\right]$, $x \in D$, może być zinterpretowane jako średni czas wyjścia ze zbioru D procesu startującego z $x \in D$, którego trajektorie są zabijane z intensywnością daną przez V. Z mocnej własności Markowa procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$ wynika równość

$$G^V f(x) = G_D^V f(x) + \mathbb{E}^x\left[\tau_D < \infty; e^{-\int_0^{\tau_D} V(X_s)ds} G^V f(X_{\tau_D})\right], \quad x \in D, \tag{14}$$

która znajduje częste zastosowanie w naszych technikach dowodowych.

Kluczowym narzędziem, które wykorzystujemy w pracach [H1] i [H3], jest następujące dwustronne oszacowanie dla funkcji (X,V)-harmonicznych w kulach.

Lemat 4 ([H1, Lemma 3.1, Corollary 3.1]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego $\nu(dx) = \nu(x)dx$ takiej, że $\nu(x) \asymp g(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, dla pewnego profilu nierosnącego $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Załóżmy ponadto (A3). Wówczas istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego potencjału $V \in \mathcal{K}_\pm$, $V \geq 0$ na $B(x_0,1)$ i dla każdej funkcji niejemnej na $\mathbb{R}^d$, która jest regularnie (X,V)-harmoniczna w $B(x_0,1)$, mamy*

$$f(y) \stackrel{C}{\asymp} G^V_{B(x_0,1)}\mathbf{1}(y) \int_{B(x_0,3/4)^c} f(z)\nu(z-x_0)dz, \quad y \in B(x_0,1/2).$$

Powyższy fakt wynika bezpośrednio z niezwykle mocnego wyniku, który został uzyskany przez Bogdana, Kumagaiego i Kwaśnickiego w dużo większej ogólności [15, Lemma 3.2 (b), Theorem 3.5]. Podkreślmy, że oszacowania tego typu mają fundamentalne znaczenie w brzegowej teorii potencjału procesów Markowa ze skokami. Z punktu widzenia naszych zastosowań bardzo ważny jest fakt, że stała w powyższym oszacowaniu jest jednostajna nie tylko ze względu na funkcje f, ale także ze względu na potencjał V i środek kuli x_0.

Badania nad teorią potencjału nielokalnych operatorów Schrödingera i związanych z nimi półgrup Feynmana–Kaca zostały zainicjowane w pionierskich pracach Bogdana i Byczkowskiego w przypadku stabilnym [8, 9]. Wiele wyników na ten temat można także znaleźć w późniejszych pracach [23, 24, D3] oraz monografiach [25, 29]. Źródłem potrzebnej wiedzy o teorii potencjału ogólnych procesów Markowa i procesów Lévy'ego są dla nas monografie [6, 7, 10] oraz artykuły [15, 60, 63].

Dekompozycja trajektorii procesu

Nasze techniki dowodowe w pracy [H1] oparte są na pewnej dekompozycji trajektorii procesu, która wyznaczona jest przez momenty zatrzymania opisujące czasy pierwszego wyjścia i wejścia dla pewnych obszarów sferycznych w $\mathbb{R}^d$ scentrowanych w środku układu współrzędnych. Zastosowany przez nas schemat pochodzi z prac [18, 47] i ma charakter iteracyjny. Dla dostatecznie dużego $n_0 \in \mathbb{N}$ i $n, k \in \mathbb{N}$ takich, że $n, k \geq n_0$ określamy (zob. [H1, s. 1371-1372])

$$R_k := \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^d : k-1 < |x| \leq k\right\}, & \text{gdy } k \geq n_0 + 2, \\ \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq n_0 + 1\right\}, & \text{gdy } k = n_0 + 1, \\ \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq n_0\right\}, & \text{gdy } k = n_0, \end{cases}$$

$$D_n := \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > n-2\right\}, & \text{gdy } n \geq n_0 + 2, \\ \mathbb{R}^d, & \text{gdy } n \in \{n_0, n_0+1\}, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_{R_k} &:= \inf\{t \geq 0 : X_t \in R_k\} \quad \text{(czas pierwszego wejścia procesu do } R_k), \\ \tau_{D_n} &:= \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D_n\} \quad \text{(czas pierwszego wyjścia procesu z } D_n). \end{aligned}$$

Wspomniana dekompozycja oparta jest na iteracji scenariusza, w których proces opuszcza dopełnienie pewnej kuli (tj. zbiór D_n) wskakując do jednego z obszarów R_k, $k \leq n-2$ (wewnątrz tej kuli). Dokładniej, dla $n-2 \geq k \geq n_0$ oraz $t > 0$ definiujemy

$$\begin{aligned} S(n,k,1,t) &= \left\{X_{\tau_{D_n}} \in R_k, \sigma_{R_k} < t\right\}, \\ S(n,k,l,t) &= \bigcup_{p=k+2}^{n-2} S(n,p,l-1,t) \cap S(p,k,1,t), \qquad l > 1. \end{aligned}$$

Zdarzenie $S(n,k,1,t)$ opisuje scenariusz, w którym proces trafia w zbiór R_k w chwili wyjścia ze zbioru D_n, przed czasem t. Kolejne zdarzenia $S(n,k,l,t)$ są zdefiniowane indukcyjnie, poprzez l-krotną iterację tego scenariusza. Dla przykładu, jeśli $k+2 \leq p \leq n-2$, to zdarzenie $S(n,p,1,t) \cap S(p,k,1,t)$ odpowiada dokładnie tym trajektoriom procesu, które najpierw trafiają w zbiór R_p w chwili wyjścia z D_n, a następnie opuszczając zbiór D_p (który jest nadzbiorem R_p) trafiają w R_k, przy czym wszystko to dzieje się przed chwilą t.

Struktura iteracyjna powyższego schematu pozwala na efektywne wyszacowanie prawdopodobieństw poszczególnych scenariuszy dla procesu, którego trajektorie zabijane są przez potencjał schrödingerowski.

Lemat 5 ([H1, Lemma 3.6]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego $\nu(dx) = \nu(x)dx$ takim, że założenia (A1)-(A3) są spełnione i niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ i stała $C > 0$ takie, że dla $n-1 < |x| \leq n$, $n_0 \leq k \leq n-2$, $n, k, l \in \mathbb{N}$ i $t > 0$ mamy*

$$\mathbb{E}^x\left[S(n,k,l,t); e^{-(1/2)\int_0^{\sigma_{R_k}} V(X_s)ds}\right] \leq \frac{C}{2^l \inf_{|y|\geq n-2} V(y)} \int_{R_k} \nu(x-z)dz.$$

Powyższe oszacowanie udowodnione jest przez indukcję ze względu na $l \in \mathbb{N}$ i jest oparte na zastosowaniu nierówności splotowej w (A1.c). Kluczowa jest tu weryfikacja tezy indukcyjnej dla $l = 1$. Jest to wniosek z następującego lematu.

Lemat 6 ([H1, Lemma 3.5]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego $\nu(dx) = \nu(x)dx$ takim, że założenia (A1)–(A3) są spełnione. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, stała $C > 0$ i parametr $\theta_0 > 0$ takie, że dla wszystkich $\theta > \theta_0$, $n-1 < |x| \leq n$, $n_0 \leq k \leq n-2$, $n, k \in \mathbb{N}$, oraz $t > 0$ mamy*

$$\mathbb{E}^x\left[\tau_{D_n} < t, X_{\tau_{D_n}} \in R_k; e^{-\theta\tau_{D_n}}\right] \leq \frac{C}{\theta}\int_{R_k} \nu(x-z)dz.$$

Lematy 5–6 uogólniają analogiczne oszacowania w pracy [47], w której zaproponowany został powyższy schemat. Nasz dowód Lematu 6 jest nowy i istotnie różni się od tego w cytowanej pracy. Kluczowy krok oparty jest na zastosowaniu Lematu 4 oraz pewnego oszacowania samopoprawiającego. Argument ten wymaga nierówności splotowej w (A1.c). Ze względu na nasze zastosowania istotne jest, że stałe w powyższych oszacowaniach nie zależą od czasu t.

II. Punktowe oszacowania funkcji własnych dla $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$

Przypomnijmy, że jeśli $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$, to operatory T_t, $t > 0$, półgrupy Feynmana–Kaca są zwarte, spektra T_t i H składają się z przeliczalnie wielu izolowanych wartości własnych o skończonych krotnościach, a odpowiadające im funkcje własne $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ tworzą bazę ortonormalną w $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$. W szczególności, istnieje niezdegenerowany stan podstawowy H. Ten rozdział jest poświęcony prezentacji dwustronnych dokładnych oszacowań tempa zaniku w nieskończoności funkcji własnej stanu podstawowego φ_0 oraz górnych oszacowań pozostałych funkcji własnych φ_n. Wyniki te zostały uzyskane w pierwszej części pracy [H1].

Motywacje i wcześniejsze wyniki. Zbadanie własności lokalizacyjnych i geometrycznych funkcji własnych, poodobnie jak zbadanie struktury spektrum i własności wartości własnych, jest jednym z najważniejszych wyzwań analizy spektralnej. Przypomnijmy, że w nierelatywistycznych (lokalnych) i quasi-relatywistycznych (nielokalnych) modelach mechaniki kwantowej funkcje własne φ_n są rozwiązaniami niezależnego od czasu równania Schrödingera z operatorem energii H (lub, po prostu, zagadnienia własnego dla hamiltonianu H). Kodują one pełną informację o tzw. stanach stacjonarnych układu. W szczególności ich kwadraty są gęstościami prawdopodobieństwa lokalizacji cząstek w przestrzeni konfiguracyjnej. Znajomość tempa zaniku funkcji własnej stanu podstawowego φ_0 w nieskończoności okazuje się być także kluczowa dla zrozumienia własności ewolucyjnych półgrupy $\{T_t : t \geq 0\}$ w długim horyzoncie czasowym. Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest *mocno ultrakontraktywna* (zob. Definicję 10 (iii) poniżej), to prawdziwa jest faktoryzacja

$$u_t(x,y) \asymp e^{-\lambda_0 t}\varphi_0(x)\varphi_0(y), \quad t \geq t_0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{15}$$

co oznacza, że φ_0 opisuje tu zachowanie przestrzenne jąder $u_t(x,y)$ dla dużych czasów (zagadnienie to będzie omówione bardziej szczegółowo w następnym rozdziale).

W przypadku klasycznych operatorów Schrödingera $-\Delta + V$, gdzie Δ jest laplasjanem, istnieje kilka modeli, dla których funkcje własne moga być wyznaczone jawnie. Gdy $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$, to najbardziej znanym przykładem jest oscylator harmoniczny, dla którego funkcje własne są tzw. funkcjami Hermite'a. Istnieje bardzo obszerna literatura dotycząca oszacowań zachowania asymptotycznego funkcji własnych dla klasycznych operatorów Schrödingera (np. [2, 19, 65] oraz [67]). Z punktu widzenia tego osiągnięcia naukowego, najciekawsza wydaje się praca Carmony [19], gdzie odpowiednie oszacowania punktowe uzyskiwane były metodami probabilistycznymi, przy użyciu klasycznego wzoru Feynmana–Kaca. Warto zauważyć, że wyniki uzyskiwane metodami probabilistycznymi były na ogół ogólniejsze i wymagały mniej założeń, niż te uzyskiwane metodami analitycznymi [66]. W pewnym sensie podejście probabilistyczne zrewolucjonizowało ówczesne spojrzenie na te zagadnienia ([67, punkt (V), s. 3]). Wspólną cechą funkcji własnych klasycznych operatorów Schrödingera z potencjałami Kato-rozkładalnymi jest to, że zanikają one w nieskończoności nie wolniej niż wykładniczo ([19, Proposition 3.3]) oraz [65, Theorems C.3.3-C.3.4]).

Problem lokalizacji funkcji własnych dla nielokalnych operatorów Schrödingera z potencjałami z klasy $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$ był także badany. Jak wiadomo, nie można w tym przypadku liczyć na uzyskanie jawnych wzorów dla funkcji własnych. Pewne wzory asymptotyczne w przypadku $H = \sqrt{-\Delta} + |x|^2$ zostały uzyskane w [52]. Słynna praca Carmony, Mastersa i Simona, oparta w całości na technikach probabilistycznych, zawiera wynik wiążący wykładniczy zanik funkcji własnych z istnieniem momentu wykładniczego miary Lévy'ego [20, Proposition IV.4]. Dokładniej, dla szerokiej klasy procesów Lévy'ego i potencjałów $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$ zachodzi implikacja: jeśli ψ jest funkcją własną H i $\int_{|y|>1} e^{b|y|}\nu(dy) < \infty$ dla pewnego $b > 0$, to istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$, dla których $|\psi(x)| \leq C_1 e^{-C_2|x|}$, $x \in \mathbb{R}^d$. W późniejszym okresie, badane były głównie własności zaniku φ_0 w nieskończoności i to w ścisłym związku z mocną ultrakontraktywnością półgrupy $\{T_t : t \geq 0\}$. Kulczycki i Siudeja zajmowali się w [47] przypadkiem relatywistycznych procesów α-stabilnych ($\alpha \in (0,2)$) i nieujemnych potencjałów z pewnej podklasy $\mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$ o dostatecznie regularnym wzroście w nieskończoności. Przy założeniu, że półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest mocno ultrakontraktywna, uzyskali oni dokładne dwustronne oszacowania φ_0 w nieskończoności. Zdaniem autora, niezwykle ważnym wkładem do tej tematyki jest też praca Kwaśnickiego [48], w której znaleziono dokładne dwustronne oszacowania φ_0 w nieskończoności i zastosowano je do uzyskania charakteryzacji mocnej ultrakontraktywności dla izotropowych półgrup stabilnych na nieograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}^d$. Nie dotyczy ona bezpośrednio półgrup schrödingerowskich, ale dość naturalna adaptacja technik dowodowych z tego artykułu pozwoliła na uzyskanie równie mocnych wyników dla półgrup Feynmana–Kaca izotropowych procesów stabilnych, związanych z tzw. *ułamkowym operatorem Schrödingera* (ang. *fractional Schrödinger operator*) [D3, D1]. Kluczowy pomysł Kwaśnickiego polegał na pionierskim zastosowaniu tzw. brzegowej nierówności Harnacka (udowodnionej wcześniej w [14]) do uzyskania pewnych starategicznych oszacowań funkcji α-harmonicznych, które pojawiają się naturalnie w obrębie tego zagadnienia. Obie prace [47, 48] były inspiracją dla naszych badań w [H1].

Nasze rezultaty. Celem pracy [H1], która zainicjowała jednotematyczny cykl publikacji prezentowany w tym autoreferacie, było zbadanie własności tempa zaniku funkcji własnej stanu podstawowego φ_0 w nieskończoności oraz własności mocnej ultrakontraktywności półgrupy $\{T_t : t \geq 0\}$ dla możliwie jak najszerszej klasy procesów Lévy'ego ze skokami i potencjałów z klasy $\mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$. Chodziło o zrozumienie jak własności te zależą od procesu i potencjału, a więc także o unifikację znanych dotychczas wyników. Ten cel udało nam się zrealizować w klasie procesów posiadających *własność bezpośredniego skoku*, która okazuje się być optymalną dla naszych rezultatów. Zawiera ona zarówno izotropowe skokowe procesy stabilne, jak i procesy o wykładniczych intensywnościach dalekich skoków takie jak relatywistyczne procesy stabilne i (wykładniczo i podwykładniczo) temperowane procesy stabilne. Podkreślmy też, że nasze rezultaty dotyczą dowolnych potencjałów z klasy $\mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$ i nie wymagają żadnych dodatkowych założeń na regularność półgrupy.

Pierwszym głównym wynikiem prezentowanego cyklu prac jest następujące górne oszacowanie punktowe dla nieujemnych funkcji borelowskich φ na $\mathbb{R}^d$, które spełniają następujący warunek: dla pewnego $\lambda \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\varphi(x) \leq e^{\lambda t} T_t \varphi(x), \quad \text{dla wszystkich } t > 0 \text{ i } x \in \mathbb{R}^d \tag{16}$$

Twierdzenie 7 ([H1, Theorem 2.1]). *Niech $\{X_t\}_{t \geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego $\nu(dx) = \nu(x)dx$ takim, że założenia (A1)-(A3) są spełnione i niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$. Jeśli φ jest nieujemną i ograniczoną funkcją borelowską na $\mathbb{R}^d$ spełniającą warunek* (16) *dla pewnego $\lambda \geq 0$, to istnieją stałe $C = C(\lambda)$ i $R = R(\lambda)$, dla których*

$$\varphi(x) \leq C \left\|\varphi\right\|_{\infty} \nu(x), \quad |x| \geq R.$$

Zauważmy, że gdy funkcja borelowska spełnia równanie

$$\varphi(x) = e^{\lambda t} T_t \varphi(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{17}$$

dla pewnego $\lambda > 0$, to $|\varphi|$ spełnia warunek (16). Pozwala to poprawić oszacowanie górne uzyskane w Twierdzeniu 7 dla funkcji spełniających (17), nawet jeśli zmieniają znak.

Twierdzenie 8 ([H1, Theorem 2.2]). *Niech $\{X_t\}_{t \geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego $\nu(dx) = \nu(x)dx$ takim, że założenia (A1)-(A3) są spełnione i niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$. Jeśli φ jest ograniczoną funkcją borelowską na $\mathbb{R}^d$ spełniającą warunek* (17) *dla pewnego $\lambda > 0$, to istnieją stałe $C = C(\lambda)$ i $R = R(\lambda)$, dla których*

$$|\varphi(x)| \leq C \left\|\varphi\right\|_{\infty} G^V_{B(x,1)} \mathbf{1}(x)\, \nu(x), \quad |x| \geq R.$$

Jeśli ponadto, φ jest dodatnia, to istnieją stałe $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\lambda, \varphi)$ i $\widetilde{R} = \widetilde{R}(\lambda, \varphi)$ takie, że

$$\varphi(x) \geq \widetilde{C} G^V_{B(x,1)} \mathbf{1}(x)\, \nu(x), \quad |x| \geq \widetilde{R}.$$

Przypomnijmy, że $G^V_{B(x,1)} \mathbf{1}(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_{B(x,1)}} e^{-\int_0^t V(X_s)ds} dt \right]$.

Główne idee dowodów Twierdzeń 7 - 8 będą omówione pod koniec tego rozdziału. Najpierw skupimy się na zastosowaniu tych wyników do uzyskania punktowych oszacowań funkcji własnych operatora H. Ponieważ dla każdego $\eta \geq 0$ takiego, że $\eta + \lambda_0 > 0$ (w szczególności $\eta + \lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$) prawdziwe sa równości

$$e^{-(\lambda_n + \eta)t} \varphi_n(x) = e^{-\eta t} T_t \varphi_n(x) = \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^t (V(X_s) + \eta)ds} \varphi_n(X_t) \right], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0,$$

każda funkcja własna φ_n spełnia warunek (17) względem półgrupy Feynmana–Kaca z przesuniętym potencjałem $V + \eta$ i $\lambda = \lambda_n + \eta$. Prowadzi to wprost do następującego wniosku.

Wniosek 9 ([H1, Theorems 2.3-2.4]). *Niech $\{X_t\}_{t \geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego $\nu(dx) = \nu(x)dx$ takim, że założenia (A1)-(A3) są spełnione i niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$. Wówczas dla każdego $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ oraz $\eta \geq 0$, spełniającego nierówność $\lambda_0 + \eta > 0$, istnieją stałe $C = C(n, \eta)$ i $R = R(n, \eta)$, dla których*

$$|\varphi_n(x)| \leq C G^{V+\eta}_{B(x,1)} \mathbf{1}(x)\, \nu(x), \quad |x| \geq R.$$

Co więcej,

$$\varphi_0(x) \asymp G^{V+\eta}_{B(x,1)} \mathbf{1}(x)\, \nu(x), \quad |x| \geq R.$$

Tempo zaniku funkcji własnej stanu podstawowego φ_0 w nieskończoności jest zdeterminowane przez iloczyn $\nu(x)$ i $G^{V+\eta}_{B(x,1)}\mathbf{1}(x)$. Pierwsza z tych funkcji opisuje intensywność skoków wyjściowego procesu Lévy'ego. Druga zaś może zostać zinterpretowana jako średni czas wyjścia z kuli $B(x,1)$ procesu startującego z x, którego trajektorie sa zabijane z intensywnością ustaloną przez potencjał $V+\eta$ (przypomnijmy, że $V \geq 0$ poza zbiorem ograniczonym). Można sprawdzić (por. [H1, (3.2)]), że istnieje stała $C \geq 1$, która spełnia

$$\frac{1}{C}\frac{1}{\sup_{y\in B(x,1)} V(y)} \leq G^{V+\eta}_{B(x,1)}\mathbf{1}(x) \leq C\frac{1}{\inf_{y\in B(x,1)} V(y)},$$

dla dostatecznie dużych x. Pozwala to uczynić oszacowanie we Wniosku 9 bardziej jawnym (zob. [H1, Corollary 2.2]), ale przede wszystkim daje jego pełną faktoryzację, która pozwala ocenić jak tempo zaniku φ_0 w nieskończoności zależy od potencjału i od wyjściowego procesu. W szczególności, jeśli istnieje stała $C \geq 1$, dla której $\sup_{y\in B(x,1)} V(y) \leq C \inf_{y\in B(x,1)} V(y)$, dla $|x| \geq R$, to dostajemy

$$\varphi_0(x) \asymp \frac{\nu(x)}{V(x)}, \quad |x| \geq R+1.$$

Oszacowania funkcji własnej stanu podstawowego operatora H przedyskutowane powyżej są kluczowe do uzyskania dalszych wyników w pracach [H1, H4] (będzie to omówione bardziej szczegółowo w następnym rozdziale).

Odnotujmy jeszcze jedną, dość zaskakującą, konsekwencję oszacowań we Wniosku 9 (zob. [H1, Corollary 2.1]): dla każdego $n \geq 1$ istnieje stała $C = C(n)$ taka, że

$$|\varphi_n(x)| \leq C\varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{18}$$

Oznacza to, że funkcje własne nielokalnych operatorów Schrödingera z dowolnymi potencjałami z klasy $\mathcal{K}^{\infty}_{\pm}$ zanikają w nieskończoności nie wolniej niż funkcja własna stanu podstawowego. Co ciekawe, taka własność nie jest ogólnie prawdziwa dla klasycznych operatorów Schrödingera postaci $-\Delta + V$, gdzie $V \in \mathcal{K}^{\infty}_{\pm}$. Najprostrzym kontrprzykładem jest tu przypadek kwantowego oscylatora harmonicznego (tj. $V(x) = |x|^2$), w którym funkcje własne są dane jawnie i nie spełniają (18) z żadnymi stałymi.

Omówimy teraz główne idee dowodów Twierdzeń 7–8, które prowadzą bezpośrednio do głównego wyniku zaprezentowanego w tym rozdziale. Przypomnijmy, że te rezultaty to odpowiednio Twierdzenia 2.1 i 2.2 w pracy [H1], a ich dowody znajdują się na stronach 1377-1383 cytowanej pracy.

Zaznaczmy najpierw, że Twierdzenie 7 jest wynikiem podstawowym dla dalszych rozważań w pracach [H1, H4] (w naturalny sposób motywuje też pytania, które stawiamy w [H3]). Był to bez wątpienia najbardziej pracochłonny krok w naszych badaniach. Podstawowa trudność polegała na tym, że oczekiwaliśmy wyniku, który mówi, iż tempo zaniku funkcji $\varphi(x)$ w nieskończoności jest kontrolowane dokładnie przez intensywność skoków procesu $\nu(x)$. Chcieliśmy objąć naszymi badaniami jak najszerszą klasę procesów, w tym relatywistyczne i temperowane procesy stabilne, dla których zanik $\nu(x)$ w nieskończoności jest rzędu wykładniczego. Przypomnijmy, że dla takich procesów pewne niedokładne oszacowania górne zostały uzyskane przez Carmonę, Mastersa i Simona. Jednak trudniejsze pytanie czy funkcja $\varphi(x)$ jest majoryzowana dokładnie przez $\nu(x)$ pozostawało bez odpowiedzi. Dotychczas nie były znane metody, które pozwalałyby na uzyskiwanie takich oszacowań w przypadku intensywności skoków, które zanikają w nieskończoności szybciej niż wielomianowo. Poniżej opiszemy pomysł, który doprowadził nas do rozwiązania tego problemu.

W toku badań okazało się, że możliwe jest wykazanie następującego oszacowania: dla dostecznie dużego $n_0 > 0$ istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\varphi(x) \leq C \|\varphi\|_\infty \left(\int_{|y| \leq n_0} \nu(x-y) \right)^{\sum_{i=1}^{p} 2^{-i}}, \quad |x| > n_0 + 3, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Własność ta jest już wystarczająca dla dowodu Twierdzenia 7, ponieważ stała C jest jednostajna także ze względu na p. Oczekiwana nierówność z tezy twierdzenia jest bezpośrednią konsekwencją przejścia granicznego $p \to \infty$ i zastosowania założenia (A1.b). Argument indukcyjny prowadzący do (19) jest oparty na subtelnym oszacowaniu samopoprawiającym (ang. *self-improving estimate*). Punktem wyjścia jest tu warunek (16) oraz dekompozycja trajektorii procesu omówiona w poprzednim rozdziale, dzięki którym możemy napisać nierówności (por. [H1, (3.11) i oszacowanie powyżej])

$$\begin{aligned} \varphi(x) \leq e^{\lambda t} T_t \varphi(x) &\leq \mathbb{E}\left[\tau_{D_n} > t; e^{-\int_0^t (V(X_s)-\lambda) ds} \varphi(X_t)\right] \\ &+ \sum_{k=n_0+2}^{n-2} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[S(n,k,l,t), \tau_{D_k} > t; e^{-\int_0^t (V(X_s)-\lambda) ds} \varphi(X_t)\right] \\ &+ \sum_{k=n_0}^{n_0+1} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[S(n,k,l,t); e^{-\int_0^t (V(X_s)-\lambda) ds} \varphi(X_t)\right], \end{aligned} \tag{20}$$

dla $t > 0$, $n - 1 < |x| \leq n$ i dostatecznie dużych liczb naturalnych n. Przypomnijmy, że dla $k = n_0$ i $k = n_0 + 1$ przyjmujemy, że $D_k = \mathbb{R}^d$ (a więc $\tau_{D_{n_0}} = \tau_{D_{n_0+1}} = \infty$). Oznacza to, że po dojściu do odpowiedniego zbioru R_{n_0} oraz R_{n_0+1} proces może już dowolnie ewoluować do chwili t. W szczególności jego trajektorie mogą trafić do obszaru, gdzie potencjał V_+ nie jest oddzielony od zera, a nawet do nośnika V_-. W konsekwencji, ostatnie składniki w powyższej sumie muszą być traktowane indywidualnie.

Dowód oszacowania (19) składa się z dwóch etapów. Najpierw uzasadniamy żądaną nierówność dla $p = 1$. Warunek, że $V(x) \to \infty$, gdy $|x| \to \infty$, oraz Lemat 5 pozwalają na efektywne wyszacowanie wartości oczekiwanych po prawej stronie (20).

Po wysumowaniu odpowiednich ograniczeń górnych względem l i k i uporządkowaniu wszystkich składników prowadzi to do następującej nierówności

$$\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty \left(e^{-Ct}(1 + C_1) + e^{Ct} C_2 \int_{|y| \leq n_0} \nu(x-y) dy \right), \tag{21}$$

prawdziwej dla wszystkich $t > 0$, $n - 1 < |x| \leq n$ i dostatecznie dużych liczb naturalnych n, z jednostajnymi stałymi. Biorąc

$$t := -\frac{1}{2C} \log \left(C_3 \int_{|y| \leq n_0} \nu(x-y) dy \right) > 0, \tag{22}$$

otrzymujemy oczekiwaną nierówność (19) dla $p = 1$. Zauważmy, że przy pierwszym składniku sumy po prawej stronie oszacowania (21) stoi e^{-Ct}, podczas gdy przy drugim składniku, zawierającym już całkę $\int_{|y| \leq n_0} \nu(x-y) dy$, mamy e^{Ct} (dodatnia stała w wykładniku, pojawiająca się tu z konieczności, jest konsekwencją braku kontroli nad wartościami potencjału w kulach $B(0, n_0)$ i $B(0, n_0 + 1)$, o której już wspomnieliśmy powyżej). Oznacza to, że (22) jest rzeczywiście najbardziej optymalnym wyborem t w pierwszym etapie naszego rozumowania.

W drugim etapie sprawdzamy krok indukcyjny. Wychodząc od ograniczenia (19) dla pewnego p i korzystając z oszacowania (20), poprawiamy (19) zwiększając zakres sumowania w potędze do $p + 1$. Argument jest tu oparty na podobnym pomyśle, jak w pierwszym etapie. Jest jednak bardziej subtelny i skomplikowany technicznie. Poszczególne składniki sum po prawej stronie oszacowania (20) są szacowane podobnie, przy pomocy Lematu 5, z uwzględnieniem oszacowań wartości φ w obrębie zbiorów D_k. Właściwe wysumowanie wszystkich składników względem k wymaga jednak dość subtelnych przekształceń występujących tu całek wielokrotnych z miar Lévy'ego, które oparte są na zamianie kolejności całkowania i nierówności splotowej w założeniu (A1.c) oraz monotoniczności profilu gęstości miary Lévy'ego. Podobnie jak w pierwszym etapie, finalne oszacowanie znów uzyskane jest poprzez odpowiedni wybór t. Zaproponowana przez nas procedura indukcyjna pozwala uzyskać wynik w Twierdzeniu 7 poprzez przeliczalnie wiele iteracji oszacowania (20). Nierówność splotowa w założeniu (A1.c), wyznaczająca klasę procesów o własności bezpośredniego skoku, ma znaczenie strukturalne dla tego rozumowania.

Przejdziemy teraz do omówienia dowodu Twierdzenia 8. Ponieważ funkcja φ spełnia warunek (17) dla pewnego $\lambda > 0$, to zapisując tę równość w równoważnej postaci $e^{-\lambda t}\varphi(x) = T_t\varphi(x)$, $t > 0$, i całkując jej obie strony względem t na półprostej $(0, \infty)$, uzyskujemy odpowiednią tożsamość punktową dla operatora potencjału $\varphi(x) = \lambda G^V \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Stosując następnie wzór (14) dla $f = \varphi$ i $D = B(x, 1)$, uzyskujemy równość

$$\varphi(x) = \lambda G^V_{B(x,1)}\varphi(x) + \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^{\tau_{B(x,1)}} V(X_s)ds} \varphi(X_{\tau_{B(x,1)}}) \right], \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{23}$$

Mamy więc

$$|\varphi(x)| \leq \lambda G^V_{B(x,1)}|\varphi|(x) + \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^{\tau_{B(x,1)}} V(X_s)ds} |\varphi(X_{\tau_{B(x,1)}})| \right] =: I + II, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Składnik I szacujemy najpierw z góry przez $\lambda G^V_{B(x,1)}\mathbf{1}(x) \sup_{y \in B(x,1)} |\varphi(y)|$, a następnie korzystamy z wyniku w Twierdzeniu 7 i założenia (A1.b). To daje już właściwe oszacowanie górne dla I. Oszacowanie górne składnika II dostajemy w dwóch krokach, wykorzystując nieujemność V na $B(x, 1)$, wynik w Twierdzeniu 7, założenie (A1), wzór Ikedy-Watanabe (13) oraz oszacowanie funkcji harmonicznych w Lemacie 4.

Punktem wyjścia dla oszacowania dolnego w przypadku, gdy φ jest dodatnia jest równość (23). Właściwą nierówność uzyskujemy tu poprzez pominięcie pierwszego składnika i zastosowanie wzoru Ikedy-Watanabe do drugiego składnika, po uprzednim zawężeniu obszaru całkowania.

Dodajmy, że gdy profil gęstości miary Lévy'ego nie ma własności (A1.c), to funkcja własna stanu podstawowego φ_0 nie spełnia oszacowania górnego, które zostało zaprezentowane powyżej. Nie zostało to przedyskutowane w pracy [H1], ale można to sprawdzić przy pomocy analogicznego rozumowania jak w dowodzie Twierdzenia 19 poniżej.

III. Własności typu mocnej kontraktywności i dominacja przez φ_0

W tym rozdziale będziemy nadal zakładać, że $V \in \mathcal{K}^{\infty}_{\pm}$, co gwarantuje zwartość operatorów T_t dla wszystkich $t > 0$. Omówimy tu wyniki dotyczące własności tzw. mocnej kontraktywności półgrup Feynmana–Kaca związanych z nielokalnymi operatorami Schrödingera, w tym warunki wystarczające i dostateczne oraz charakteryzację mocnej ultrakontraktywności i hiperkontraktywności, a także wnioski wypływające z tych rezultatów. Wyniki te zostały uzyskane w drugiej części pracy [H1] oraz w pracy [H4], która zamyka prezentowany tu cykl publikacji.

Definicje, motywacje i wcześniejsze wyniki. Przypomnijmy, że λ_0 i φ_0 oznaczają odpowiednio wartość i funkcję własną stanu podstawowego operatora Schrödingera H, zaś $\{\widetilde{T}_t : t \geq 0\}$ jest półgrupą Feynmana–Kaca warunkowaną przez stan podstawowy, która została zdefiniowana w (11). Przypomnijmy, że $\mu(dx) = \varphi_0^2(x)dx$.

Nasze rozważania w tym rozdziale koncentrują się wokół następujących własności.

DEFINICJA 10 (**Własności kontraktywności**).

(i) Półgrupa $\{\widetilde{T}_t : t \geq 0\}$ *jest* superkontraktywna, *jeśli dla każdego* $p \in (2, \infty)$ *i* $t > 0$ *operatory* $\widetilde{T}_t : L^2(\mathbb{R}^d, \mu) \to L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ *są ograniczone. Mówimy wówczas, że wyjściowa półgrupa* $\{T_t : t \geq 0\}$ *jest* mocno superkontraktywna *(ang.* intrinsically supercontractive*; w skrócie ISC).*

(ii) Półgrupa $\{\widetilde{T}_t : t \geq 0\}$ *jest* hiperkontraktywna, *jeśli dla każdego* $p \in (2, \infty)$ *istnieje* $t_p > 0$ *takie, że dla wszystkich* $t \geq t_p$ *operatory* $\widetilde{T}_t : L^2(\mathbb{R}^d, \mu) \to L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ *są ograniczone. Mówimy wówczas, że wyjściowa półgrupa* $\{T_t : t \geq 0\}$ *jest* mocno hiperkontraktywna *(ang.* intrinsically hypercontractive*; w skrócie IHC).*

(iii) Półgrupa $\{\widetilde{T}_t : t \geq 0\}$ *jest* ultrakontraktywna, *jeśli dla każdego* $t > 0$ *operatory* $\widetilde{T}_t : L^2(\mathbb{R}^d, \mu) \to L^\infty(\mathbb{R}^d, \mu)$ *są ograniczone. Mówimy wówczas, że wyjściowa półgrupa* $\{T_t : t \geq 0\}$ *jest* mocno ultrakontraktywna *(ang.* intrinsically ultracontractive*; w skrócie IUC).*

(iv) Półgrupa $\{\widetilde{T}_t : t \geq 0\}$ *jest* asymptotycznie ultrakontraktywna, *jeśli istnieje* $t_\infty > 0$ *takie, że dla wszystkich* $t \geq t_\infty$ *operatory* $\widetilde{T}_t : L^2(\mathbb{R}^d, \mu) \to L^\infty(\mathbb{R}^d, \mu)$ *są ograniczone. Mówimy wówczas, że wyjściowa półgrupa* $\{T_t : t \geq 0\}$ *jest* asymptotycznie mocno ultrakontraktywna *(ang.* asymptotically intrinsically ultracontractive*; w skrócie AIUC).*

Zauważmy, że w *(ii)* i *(iv)* wystarczy zakładać, że żądana ograniczoność zachodzi tylko dla pewnych $t_p, t_\infty > 0$. Dzięki własności półgrupowej i tak rozszerza się ona odpowiednio do wszystkich $t \geq t_p$ i $t \geq t_\infty$. Własności *(i)-(iii)* pojawiły się w literaturze w konktekście klasycznych operatorów różniczkowych. Mocna hiperkontraktywność została wprowadzona przez Nelsona [54], a mocna ultrakontraktywność pojawia się po raz pierwszy w pracach Daviesa i Simona [28], Davisa [26] i Bañuelosa [4] (zob. także [5]). Własność *(iv)* nie była rozważana w kontekście operatorów lokalnych. Została zbadana po raz pierwszy w pracy [D1] dla ułamkowych operatorów Schrödingera. Trzeba zaznaczyć, że AIUC jest równoważna dokładnym dwustronnym oszacowaniom (15) oraz nierówności $|\widetilde{u}(t,x,y) - 1| \leq Ce^{-(\lambda_1 - \lambda_0)t}$, $t > t_0$, z pewną stałą $C > 0$ i $t_0 > 0$, która implikuje bardzo mocną własność jednostajnej ergodyczności (zob. np. [D1, Lemma 4.1]). W kontekście naszych wyników, które będą zaprezentowane poniżej, wartym odnotowania jest fakt, że w przypadku klasycznych operatorów Schrödingera istnieje naturalna hierarchia pomiędzy własnościami *(i)-(iii)*: IUC jest mocniejsza od ISC, a ISC jest mocniejsza od IHC. Ponadto wiadomo, że AIUC jest mocniejsza od IHC. Może to być zilustrowane przy pomocy następującego przykładu: dla klasycznej półgrupy schrödingerowskiej związanej z operatorem $H = -\Delta + |x|^\alpha \log(1+|x|)^\beta$, $\alpha > 0, \beta \geq 0$, wiadomo, że [28]:

- gdy $\alpha > 2$ lub $\alpha = 2$, $\beta > 2$, to zachodzi IUC;
- gdy $\alpha = 2$, $0 < \beta \leq 2$, to zachodzi ISC, ale nie IUC;
- gdy $\alpha = 2$, $\beta = 0$ (oscylator harmoniczny), to zachodzi IHC, ale nie ISC;

- gdy $\alpha < 2$, to nie zachodzi nawet IHC.

Sprawdziliśmy też w [H4, Example 4.4], że gdy $\alpha = 2$, $\beta = 0$ (oscylator harmoniczny), to nie zachodzi AIUC. Co ciekawe, IUC dla operatorów $-\Delta + V$ została w pełni scharakteryzowana dopiero w roku 2009 w przypadku potencjałów V, które mają profile niemalejące [3] (por. (25) i Wniosek 16 poniżej).

Własności *(i)-(iii)* były już częściowo badane także w przypadku nielokalnym: IUC we wspomnianych już pracach [47, D3], a AIUC w [D1]. Pewne wyniki dotyczące IUC, ISC oraz IHC zostały też uzyskane przy pomocy form Dirichleta w przypadku półgrup Feynmana–Kaca dla pewnej klasy niejednorodnych przestrzennie procesów Markowa [21].

Nasze rezultaty. Zaprezentujemy teraz nasze wyniki, które opisują zdefiniowane powyżej własności. Chronologia tych badań była następująca: najpierw w [H1] zajmowaliśmy się przypadkiem $p = \infty$ (mocna ultrakontraktywność, w tym asymptotyczna) dla procesów z własnością bezpośredniego skoku, a nastepnie zauważyliśmy w [H4], że wyniki te rozszerzają się także na przypadek $p \in (2, \infty)$ (hiper- i superkontraktywność). Dodajmy, że nasze główne twierdzenia w pracy [H4] zostały najpierw uzyskane dla znacznie szerszej klasy półgrup, a dopiero potem zostały zastosowane w przypadku pógrup Feynmana–Kaca procesów z własnością bezpośredniego skoku. Pomimo tych rozbieżności, poniżej bedziemy starali się zaprezentować materiał z prac [H1] i [H4] jako jedną spójną całość. Ponadto, dla uproszczenia, nasza prezentacja ograniczy się do półgrup związanych z procesami Lévy'ego ze skokami.

Ważnym krokiem w kierunku uzyskania jawnych warunków koniecznego i wystarczającego dla własności mocnej kontraktywności półgrup Feynmana–Kaca w pracach [H1] i [H4] jest obserwacja, że własności ograniczoności operatorów $\widetilde{T}_t : L^2(\mathbb{R}^d, \mu) \to L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ mogą zostać równoważnie scharakteryzowane przez pewne własności ilorazów $T_t\mathbf{1}/\varphi_0$.

DEFINICJA 11 ([H4, Definition 2.1] **Własności dominacji przez stan podstawowy**). *Niech $p \in (2, \infty]$.*

(i) Mówimy, że operator T_t jest L^p-dominowany przez stan podstawowy *(ang.* L^p-ground state dominated*; w skrócie L^p-GSD), jeśli*

$$\frac{T_t\mathbf{1}}{\varphi_0} \in L^p(\mathbb{R}^d, \mu).$$

(ii) Półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-dominowana przez stan podstawowy *(w skrócie L^p-GSD), jeśli dla każdego $t > 0$ operatory T_t są L^p-dominowane przez stan podstawowy.*

(iii) Mówimy też, że półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest asymptotycznie L^p-dominowana przez stan podstawowy *(w skrócie L^p-AGSD), jeśli istnieje $t_p > 0$ takie, że dla każdego $t > t_p$ operatory T_t są L^p-dominowane przez stan podstawowy. Jeśli konkretna wartość liczby t_p jest istotna, to wówczas, dla podkreślenia tego faktu, piszemy (t_p, L^p)-AGSD.*

W naszej pierwszej pracy [H1] rozważaliśmy jedynie przypadek $p = \infty$ i dlatego pisaliśmy krótko AGSD i GSD zamiast L^∞-AGSD i L^∞-GSD (por. [H1, Definition 2.3]).

Wspomniana powyżej obserwacja jest treścią poniższego lematu.

Lemat 12 ([H4, Lemma 2.1]). *Niech $\{X_t\}_{t \geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a. Załóżmy, że (A2) zachodzi dla pewnego $t_b > 0$ i niech $V \in \mathcal{K}_{\pm}$. Niech ponadto $p \in (2, \infty]$. Rozważmy dwie poniższe własności.*

(1) Operator T_t jest L^p-GSD dla pewnego $t > 0$.

(2) Operator $\widetilde{T}_t$ jest ograniczony z $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$ do $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ dla pewnego $t > 0$.

Wówczas:

(i) jeśli (1) zachodzi dla pewnego $t = s > 0$, to (2) zachodzi dla $t = s + t_b$;

(ii) jeśli (2) zachodzi dla pewnego $t = s > 0$ oraz

$$\varphi_0^{1-\frac{1}{p-1}} \in L^1(\mathbb{R}^d, dx), \tag{24}$$

to (1) zachodzi dla $t = 2s$.

Zaznaczmy, że [H4, Lemma 2.1] został formalnie sformułowany jedynie dla $p \in (2, \infty)$, ale argument dla $p = \infty$ jest taki sam (w warunku (24) stosujemy wówczas konwencję, że $1/\infty = 0$). Przypadkiem $p = \infty$ zajmowaliśmy się w pierwszej pracy z cyklu. Taki fakt nie został tam sformułowany jako odrębny lemat, ale równoważność warunków (1) i (2) w tym przypadku została wykazana (i jednocześnie zastosowana) w dowodzie [H1, Theorem 2.5]. Założenie (24) (tzn. $\varphi_0 \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ było tam automatycznie spełnione, ale oszacowania są bardzo ogólne.

Dalsza dyskusja warunku (24) została zawarta w [H4, Remark 2.1]). Jest on spełniony dla bardzo szerokiej klasy półgrup lokalnych i nielokalnych operatorów Schrödingera.

Ostatecznie uzyskujemy następujące twierdzenie charakteryzacyjne, które wynika z Lematu 12.

Twierdzenie 13. *Przy założeniach Lematu 12 zachodzą następujące implikacje.*

(i) ***(IHC i L^p-AGSD)*** *Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-AGSD dla wszystkich $p \in (2, \infty)$, to jest ona też IHC. Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest IHC oraz $\varphi_0^\delta \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, dla pewnego $\delta \in (0, 1)$, to jest ona też L^p-AGSD dla wszystkich $p \in (2, \infty)$.*

(ii) ***(ISC i L^p-GSD)*** *Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-GSD dla wszystkich $p \in (2, \infty)$, to jest ona też ISC. Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest ISC oraz $\varphi_0^\delta \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, dla pewnego $\delta \in (0, 1)$, to jest ona też L^p-GSD dla wszystkich $p \in (2, \infty)$.*

(iii) ***(AIUC i L^∞-AGSD)*** *Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^∞-AGSD, to jest ona też AIUC. Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest AIUC oraz $\varphi_0 \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, to jest ona też L^∞-AGSD.*

(iv) ***(IUC i L^∞-GSD)*** *Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^∞-GSD i $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} p_t(x) < \infty$ dla każdego $t > 0$, to jest ona też IUC. Jeśli półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest IUC oraz $\varphi_0 \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, to jest ona też L^∞-GSD.*

Podpunkty (i) i (ii) powyższego twierdzenia są szczególną wersją [H4, Theorems 2.1-2.2], sformułowaną dla procesów Lévy'ego ze skokami. Wyniki (iii)-(iv) uzyskuje się w tej ogólności dokładnie tak samo jak w [H1, Theorem 2.5], które zostało od razu udowodnione dla klasy procesów z własnością bezpośredniego skoku. Przypomnijmy, że dla tej klasy warunek $\varphi_0 \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ jest spełniony automatycznie.

Podstawowa korzyść wypływająca z powyższych charakteryzacji jest taka, że zamiast badać własności kontraktywności półgrup warunkowanych, wystarczy zbadać własności L^p-dominacji dla wyjściowych półgrup, które mogą być często efektywnie zbadane przy pomocy technik probabilistycznych.

Zaprezentujemy teraz znalezione przez nas warunki wystarczajace i konieczne dla L^p-GSD i L^p-AGSD w przypadku, gdy założenia (A1)-(A3) są spełnione. Są to nasze główne wyniki na ten temat uzyskane w pracach [H1] i [H4]. Pierwsze z twierdzeń łączy rezultaty uzyskane w [H1, Theorems 2.6 (1) i 2.7 (1)] oraz [H4, Proposition 3.2].

Twierdzenie 14 (Warunki wystarczające dla L^p-GSD i L^p-AGSD). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}$.*

(i) Jeśli istnieją stałe $C > 0$ i $R > 0$ takie, że

$$\frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} \geq C, \quad |x| \geq R,$$

to dla każdego $p \in (2, \infty]$ półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest (t_0, L^p)-AGSD, gdzie $t_0 = 4/C$.

(ii) Jeśli

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} = \infty,$$

to dla każdego $p \in (2, \infty]$ półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-GSD.

Kolejne twierdzenie łączy wyniki uzyskane w [H1, Theorems 2.6 (2) i 2.7 (2)] oraz [H4, Theorem 3.1]. Oznaczmy $V_r^*(x) = \sup_{y\in B(x,r)} V(y)$, $r > 0$.

Twierdzenie 15 (Warunki konieczne dla L^p-GSD i L^p-AGSD). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$.*

(i) Jeśli dla pewnego $p \in (2, \infty]$ półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-AGSD, to dla każdego $r \in (0, 1)$ istnieją stałe $C > 0$ i $R > 0$ takie, że

$$\frac{V_r^*(x)}{|\log \nu(x)|} \geq C, \quad |x| \geq R.$$

(ii) Jeśli dla pewnego $p \in (2, \infty]$ półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-GSD, to dla każdego $r \in (0, 1)$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{V_r^*(x)}{|\log \nu(x)|} = \infty.$$

Użyteczność powyższych wyników polega głównie na tym, że wszystkie warunki są wyrażone bezpośrednio w języku intensywności skoków $\nu(x)$ i potencjału $V(x)$.

Zauważmy, że dzięki Twierdzeniu 13 nasze Twierdzenia 14-15 dają w rzeczywistości warunki dostateczne i konieczne dla wszystkich własności kontraktywności z Definicji 10. Co więcej, dla dostatecznie regularnych potencjałów V, prowadzą one do bardzo zaskakujących wyników charakteryzacyjnych (por. [H1, Corollary 2.3] oraz [H4, Theorem 3.2]). Zdefiniujmy dwie następujące podklasy funkcji $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$V \in \mathcal{V}_1 \iff \text{istnieją } r \in (0,1) \text{ i } R > 0 \text{ takie, że } V_r^*(x) \asymp V(x), \text{ dla } |x| > R;$$

$$V \in \mathcal{V}_2 \iff \begin{array}{c}\text{istnieją niemalejąca funkcja } f : (0,\infty) \to (0,\infty) \text{ i } R > 0 \\ \text{takie, że } V(x) \asymp f(|x|), \text{ dla } |x| > R.\end{array} \tag{25}$$

WNIOSEK 16 ([H4, Corollary 3.2] **Równoważność własności mocnej kontraktywności**). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty} \cap \mathcal{V}_1$ lub $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty} \cap \mathcal{V}_2$. Załóżmy dodatkowo, że gęstości $p(t,\cdot)$ są ograniczone dla wszystkich $t > 0$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) $\lim_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} = \infty$.

(ii) Półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-GSD dla wszystkich $p \in (2, \infty]$.

(iii) Półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest ISC.

(iv) Półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest IUC.

WNIOSEK 17 ([H4, Corollary 3.3] **Równoważność asymptotycznych własności mocnej kontraktywności**). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty} \cap \mathcal{V}_1$ lub $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty} \cap \mathcal{V}_2$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) Istnieją $C, R > 0$ takie, że $\frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} \geq C$, dla wszystkich $|x| \geq R$.

(ii) Półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest L^p-AGSD dla wszystkich $p \in (2, \infty]$.

(iii) Półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest IHC.

(iv) Półgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ jest AIUC.

Powyższe wnioski pokazują, że własności analityczne półgrup związanych z nielokalnymi operatorami Schrödingera sa istotnie różne od własności klasycznych półgrup schrödingerowskich związanych z lokalnym operatorem $-\Delta + V$. Jak już zauważyliśmy na początku tego rozdziału, nawet w przypadku bardzo regularnych potencjałów, dla operatorów lokalnych ISC jest istotnie słabszą własnością niż IUC. Ponadto, nasze wyniki dotyczące równoważności AIUC oraz L^∞-AGSD uzyskane w [H4, Section 2] w przypadku ogólnym pokazują, że dla lokalnych operatorów Schrödingera również IHC jest istotnie słabszą własnością niż AIUC (zob. analizę przypadku oscylatora harmonicznego w [H4, Example 4.4]).

Wspomnijmy też, że nasze wyniki zaprezentowane powyżej pozwalają na określenie tzw. *granicznego* albo *minimalnego wzrostu potencjału* dla własności mocnej kontraktywności półgrup związanych z nielokalnymi operatorami Schrödingera. Dokładniej, gdy intensywność skoków $\nu(x)$ jest dana, to taki wzrost jest opisany przez $|\log \nu(x)|$. Ponadto, nasze probabilistyczne podejście do tego problemu umożliwiło nam podanie stochastycznej i wariacyjnej interpretacji tych własności i wzrostu granicznego. Pewne wyniki na ten temat wraz z opisem heurystycznym zostały zawarte w [H1, Section 2.5].

Obszerna lista przykładów procesów, dla których zachodzą przedstawione powyżej wyniki, została przedyskutowana w [H1, Section 4].

Omówimy teraz krótko dowody Twierdzeń 14-15. Zauważmy, że dzięki inkluzjom $L^p(\mathbb{R}^d, \mu) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d, \mu)$, $p > 2$, w pierwszym z tych twierdzeń wystarczy wykazać jedynie odpowiednie implikacje dla $p = \infty$ (tj. L^∞-(A)GSD pociąga L^p-(A)GSD dla wszystkich $p > 2$). W przypadku $p = \infty$ implikacje te stanowią część (1) Twierdzeń 2.6 i 2.7 w pracy [H1]. Ich dowód wymagał sprawdzenia, że odpowiednie założenie na iloraz $V/|\log \nu|$ pociąga nierówności $T_t \mathbf{1}(x) \leq C\varphi_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, dla odpowiednio dużych (implikacja i) lub wszystkich (implikacja ii) $t > 0$, ze stałą C jednostajną ze względu na x. Ponieważ $T_t\mathbf{1}$ jest funkcją ograniczoną, a φ_0 jest ciągła i ściśle dodatnia, wystarczyło udowodnić takie oszacowanie tylko dla dostatecznie dużych x. Kluczowa była tu znajomość dokładnego dwustronnego oszacowania φ_0 z Wniosku 9. Wraz z [H1, Lemma 3.7] pozwoliła ona zredukować problem do dowodu oszacowania $T_t\mathbf{1}(x) \leq C\nu(x)$.

Twierdzenie 18 ([H1, Theorem 3.1]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}$. Jeśli istnieją stałe $C > 0$ i $R > 0$ takie, że*

$$\frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} \geq C, \quad |x| \geq R, \tag{26}$$

to dla każdego $t \geq t_0 := 4/C$ istnieją $\widetilde{C}, \widetilde{R} > 0$, dla których

$$T_t\mathbf{1}(x) \leq \widetilde{C}\nu(x), \quad |x| \geq \widetilde{R}. \tag{27}$$

Jeśli ponadto

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} = \infty,$$

to (27) zachodzi dla wszystkich $t > 0$.

Dowód powyższego twierdzenia (zob. [H1, s. 1385-1386]) przebiega w oparciu o schemat podobny do tego w dowodzie Twierdzenia 7 z tą różnicą, że teraz funkcja pod wartością oczekiwaną jest równa jeden i musimy pozyskać więcej informacji o zaniku z samego funkcjonału $\exp(-\int_0^t V(X_s)ds)$. Jest to możliwe dzięki założeniu na iloraz ν/V, dekompozycji trajektorii procesu oraz (A1).

Dowód Twierdzenia 15 to bezpośrednie oszacowanie dolne wartości oczekiwanej z funkcjanału Feynmana–Kaca, przy ustalonym $t > 0$. Argument w istotny sposób wykorzystuje też dokładne górne oszacowanie φ_0 z Wniosku 9. Dla $p = \infty$ jest to dowód implikacji (2) Twierdzeń 2.6 i 2.7 w pracy [H1] (s. 1387), a dla $p \in (2, \infty)$ dowód Twierdzenia 3.1 w pracy [H4] (s. 179-180).

Należy podkreślić, że dowody Twierdzeń 14-15 nie mogłyby zostać przeprowadzone bez znajomości dokładnych dwustronnych oszacowań funkcji własnej stanu podstawowego φ_0 zaprezentowanych w poprzednim rozdziale. Twierdzenia 7-8 są więc wynikami fundamentalnymi także dla wszystkich rezultatów prezentowanych w tym rozdziale.

IV. Tempo zaniku funkcji własnych w przypadku $V \in \mathcal{K}_{\pm}^0$

W tym rozdziale omówimy wyniki dotyczące punktowych oszacowań funkcji własnych nielokalnych operatorów Schrödingera z potencjałami $V \in \mathcal{K}_{\pm}^0$, które odpowiadają ujemnym wartościom własnym. Wyniki te zostały uzyskane w pracy [H3].

Motywacje i wcześniejsze wyniki. Wiadomo, że w przypadku klasycznych operatorów Schrödingera $-\Delta + V$ w potencjałami Kato-rozkładalnymi spełniającymi warunek $V(x) \to 0$, gdy $|x| \to \infty$, tempo zaniku w nieskończoności funkcji własnych odpowiadających ujemnym wartościom własnym jest co najmniej wykładnicze (zob. np. [65, Theorems C.3.4-C.3.5]). Problem lokalizacji funkcji własnych ułamkowych i relatywistycznych operatorów Schrödingera odpowiadających takim wartościom własnym został poruszony we wspomnianej już pracy Carmony, Mastersa i Simona [20]. Autorzy ci wykazali, że w przypadku ułamkowych operatorów Schrödingera $H = (-\Delta)^{\alpha/2} + V$, $\alpha \in (0,2)$, tempo zaniku w nieskończoności funkcji własnej φ odpowiadającej ujemnej wartości własnej λ jest dominowane przez intensywność skoków izotropowego procesu stabilnego, tj. $|\varphi(x)| \le C(1 \wedge |x|^{-d-\alpha})$ (co więcej, dla funkcji własnej stanu podstwowego zachodzi dokładne oszacowanie dwustronne $\varphi_0(x) \asymp 1 \wedge |x|^{-d-\alpha}$). Wyniki uzyskane przez nich dla relatywistycznych operatorów Schrödingera $H = \sqrt{-\Delta + m^2} - m + V$, $m > 0$, są już mniej dokładne, ale prowadzą do następującego zaskakującego wniosku: gdy $|\lambda| \ge m$, to tempo zaniku w nieskończoności funkcji własnej $\varphi(x)$ odpowiadającej λ jest rzędu $e^{-m|x|}$, podczas, gdy dla $|\lambda| < m$ jest ono istotnie wolniejsze i wynosi $e^{-\sqrt{2m|\lambda|-\lambda^2}\,|x|}$. Przypomnijmy, że intensywność dalekich skoków dla procesu relatywistycznego jest porównywalna z funkcją $e^{-m|x|}|x|^{-(d+2)/2}$). Oznacza to, że dla $|\lambda| < m$ tempo zaniku φ w nieskończoności jest nadal wykładnicze, ale zależy od $|\lambda|$ i jest istotnie wolniejsze od tempa zaniku intensywności skoków procesu. Zauważmy, że taka dychotomia nie występuje w przypadku ułamkowym, gdzie wielkość $|\lambda|$ nie wpływa na tempo zaniku φ w nieskończoności.

Jedną z motywacji dla naszych badań prowadzących do powstania pracy [H3] była próba zrozumienia tej dychotomii.

Nasze rezultaty. Chcieliśmy zrozumieć jakie własności procesu generowanego przez L i potencjału $V \in \mathcal{K}_{\pm}^0$ gwarantują, że tempo zaniku funkcji własnych odpowiadających ujemnych wartościom własnym operatorów $-L + V$ wyznaczone jest przez intensywność skoków ν. Pracując w obrębie klasy procesów z własnością bezpośredniego skoku, uzyskaliśmy wyniki, które opisują warunki dostateczne dla dominacji $|\varphi(x)| \le C(1 \wedge \nu(x))$. Najpierw jednak pokazaliśmy, że jeśli φ jest dodatnia, to automatycznie spełnia ona analogiczne oszacowanie dolne.

Twierdzenie 19 ([H3, Theorem 4.1]). *Niech $\{X_t\}_{t\ge0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego $\nu(dx) = \nu(x)dx$ takiej, że gestość $\nu(x)$ spełnia warunek (A1.a). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}^0$. Załóżmy, że $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ jest dodatnią funkcją własną operatora H odpowiadającą wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(1) Jeśli założenie (A1.b) jest spełnione, to istnieją $C, R > 0$ (zależne od λ) takie, że

$$\varphi(x) \ge C\,\nu(x), \qquad |x| \ge R.$$

(2) Rozważmy dwa następujące rozłączne przypadki:

(i) (A1.b) jest spełnione, ale (A1.c) nie zachodzi,

(ii) (A1.b) nie zachodzi (w konsekwencji również (A1.c) nie zachodzi).

W każdym z dwóch przypadków (i) oraz (ii) mamy

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\nu(x)} = \infty.$$

Zauważmy, że druga część powyższego twierdzenia orzeka, że poza klasą procesów z własnością bezpośredniego skoku własność dominacji $|\varphi(x)| \le C(1 \wedge \nu(x))$ nie zachodzi. Jest to więc optymalne założenie dla naszych badań. Powyższy wynik jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia opisującego analogiczne własności dla funkcji (X,η)-harmonicznych [H3, Twierdzenie 3.1]. Twierdzenie to uzyskaliśmy przy pomocy wzoru Ikedy-Watanabe oraz bezpośrednich oszacowań wykorzystujących monotoniczność profilu gęstości miary Lévy'ego.

Dowody dalszych wyników z pracy [H3], prowadzące do górnych oszacowań funkcji własnych, są znacznie bardziej skomplikowane technicznie. W szczególności wymagają one bardziej subtelnych metod, niż te z pracy [H1], gdzie zajmowaliśmy się potencjałami z klasy $\mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$. Istotnie, gdy $V(x) \to 0$, $|x| \to \infty$, to (z dala od środka układu współrzędnych) proces, którego trajektorie poddane sa działaniu potencjału V, zaczyna przypominać proces wolny. Nie występuje tu już silny efekt zabijania jak w przypadku potencjałów z klasy $\mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$, który pomaga w uzyskiwaniu oszacowań. Oddziaływanie potencjału na trajektorie procesu może być uchwycone jedynie jako subtelny *efekt energetyczny*, który objawia się w wielkości $|\lambda|$.

Poniższe twierdzenie orzeka, że jeśli $|\lambda|$ jest dostatecznie duże względem wyjściowego procesu Lévy'ego, to tempo zaniku φ w nieskończoności jest dominowane przez ν.

Twierdzenie 20 ([H3, Theorem 4.2]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{0}$. Wówczas istnieje liczba η_0 (zależna od procesu i niezależna od V) taka, że jeśli $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ jest funkcją własną operatora H odpowiadającą wartości własnej $\lambda \in (-\infty, -\eta_0)$, to istnieją $C, R > 0$ (zależne od procesu i λ), dla których*

$$|\varphi(x)| \leq C \, \|\varphi\|_{\infty} \, \nu(x), \qquad |x| \geq R.$$

Stała η_0 dana przez [H3, (4.6)] może być oszacowana dla niektórych przykładów procesów Lévy'ego, ale nie jest to stała optymalna dla powyższego wyniku. Podkreślmy jednak, że rezultat ten dotyczy dowolnego procesu z własnością bezpośredniego skoku.

Przejdziemy teraz do sformułowania dwóch wyników, które podają warunki dostateczne na wyjściowy proces Lévy'ego, przy których powyższa własność dominacji przez ν w nieskończoności zachodzi dla dowolnych $\lambda < 0$. Wynikają one wprost z dwóch różnych twierdzeń opisujących zachowanie w nieskończoności funkcji (X, η)-harmonicznych i dla prostoty są one sformułowane w artykule źródłowym jako jeden rezultat (zob. [H3, Theorem 4.3]). Jednak w tym autoreferacie, dla większej przejrzystości, zaprezentujemy je niezależnie. Zaznaczmy, że wyniki te wymagają wzmocnienia naszego założenia bazowego (A3). W całej pracy [H3] założenie (A3) formułowane jest dla $R > 0$, ale dla dowodów tych twierdzeń musimy dodatkowo założyć, że istnieje stała $C > 0$ spełniająca

$$\sup_{\substack{x,y \in B(0,s) \\ |x-y| \geq s/8}} G_{B(0,s)}(x,y) \leq \frac{C}{\Psi(1/s) s^d}, \qquad s \geq 1, \tag{28}$$

gdzie $\Psi(r) := \sup_{|\xi| \leq r} \psi(\xi)$ (zob. [H3, (2.19)]). Warunek ten pełni w naszych badaniach rolę założenia technicznego. W ostatnich latach nastąpił ogromny postęp w teorii potencjału procesów Markowa ze skokami i aktualnie wiadomo, że warunek ten jest spełniony dla bardzo szerokiej klasy procesów Lévy'ego (np. dla procesów izotropowo-unimodalnych [36, Theorems 1.2-1.3]). W naszym przypadku wiadomo, że gdy istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$, dla których

$$\sup_{|x| \geq r} p_t(x) \leq C_1 \, t \, \frac{\Psi(1/r)}{r^d}, \qquad t > 0, \quad r \geq 1, \tag{29}$$

oraz

$$p_t(0) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t\psi(z)} dz \leq C_2 \left(\Psi_*^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^d, \quad t \geq 1, \tag{30}$$

gdzie $\Psi_*^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Psi(r) = s\}$, $s \geq 0$, to warunek (28) jest spełniony [H3, Lemma 2.2].

Pierwsze z naszych twierdzeń dotyczy klasy procesów, których intensywności skoków speniają następujący warunek:

$$\begin{aligned} &\text{istnieje } C > 0 \text{ takie, że dla wszystkich } r \geq 1 \text{ mamy} \\ &\nu(x-y) \leq C\nu(x), \text{ o ile } |y| \leq r \text{ oraz } |x| \geq 2r. \end{aligned} \tag{31}$$

Można sprawdzić, że przy założeniu (A1.a) warunek (31) jest automatycznie spełniony, jeśli profil g ma *własność podwajania* (ang. *doubling*), tzn. istnieje stała $\widetilde{C} > 1$ taka, że $g(r/2) \leq \widetilde{C}g(r)$, $r \geq 1$. Jest to zatem typowa własność gęstości Lévy'ego, których profile zanikają w nieskończoności wielomianowo.

Twierdzenie 21 ([H3, Theorem 4.3 (1)]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3) (dla $R > 0$). Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}^0$. Jeśli dodatkowo warunki (28) i (31) są spełnione i $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ jest funkcją własną operatora H odpowiadającą wartości własnej $\lambda < 0$, to istnieją $C, R > 0$ (zależne od procesu i λ), dla których*

$$|\varphi(x)| \leq C \|\varphi\|_\infty \nu(x), \quad |x| \geq R.$$

Gdy gęstość miary Lévy'ego zanika w nieskończoności szybciej niż wielomianowo (w szczególności nie spełnia warunku (31)), to analiza zachowania funkcji własnych φ operatora H dla małych $|\lambda|$ jest bardziej skomplikowana. Kolejny uzyskany przez nas wynik dotyczy sytuacji, gdy

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \nu(dx) < \infty \tag{32}$$

i wymaga pewnej dodatkowej regularności gęstości przejścia procesu:

$$\begin{aligned} &\text{istnieją } C \geq 1 \text{ oraz } R > 0 \text{ takie, że } p(t,x) \leq Cp(t,y) \\ &\text{dla wszystkich } t > 0 \text{ i } |x| \geq |y| \geq R \text{ spełniających } |x-y| \leq 1. \end{aligned} \tag{33}$$

Przy założeniu (32) mamy $\Psi(r) \asymp r^2$, dla r bliskich 0. Warunek (30) jest więc teraz zawsze spełniony i (28) redukuje się do (29).

Warunek dostateczny w naszym następnym twierdzeniu będzie wyrażony przy pomocy dwóch funkcji, które opisują system dalekich skoków wyjściowego procesu Lévy'ego: dla $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 \leq \infty$ określamy

$$K_1^X(s_1) := \sup_{|x| \geq s_1} \frac{\int_{|x-y|>s_1, |y|>s_1} \nu(x-y)\nu(y)dy}{\nu(x)} \tag{34}$$

oraz

$$K_2^X(s_1, s_2, s_3) := \inf\{C \geq 1 : \nu(x-y) \leq C\,\nu(x), \ |y| \leq s_1, \ s_2 \leq |x| < s_3\}. \tag{35}$$

Będziemy zakładać, że

$$\text{istnieje } \kappa_1 \geq 2 \text{ takie, że } \lim_{s\to\infty} K_1^X(\kappa_1 s)\, K_2^X(s, \kappa_1 s, \infty) = 0 \tag{36}$$

oraz

$$\text{istnieje } \kappa_2 < \infty \text{ takie, że dla każdego } s_1 \geq 1 \text{ mamy } \limsup_{s \to \infty} K_2^X(s_1, s, \infty) \leq \kappa_2. \tag{37}$$

Szersza dyskusja własności funkcji K_1^X i K_2^X wraz z interpretacją heurystyczną obydwu warunków (36) i (37) została zawarta w [H3, Section 2.2]. Dodajmy, że funkcja $K_1^X(s)$ okazała się być także bardzo cennym narzędziem w naszej pracy [P9], gdzie zbadaliśmy asymptotykę przestrzenną w nieskończoności jąder ciepła dla jednorodnych operatorów nielokalnych.

Twierdzenie 22 ([H3, Theorem 4.3 (2)]). *Niech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3) (dla $R > 0$) oraz* (29), (32)-(33). *Niech ponadto $V \in \mathcal{K}_{\pm}^0$. Jeśli warunki* (36)-(37) *są spełnione i $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ jest funkcją własną operatora H odpowiadającą wartości własnej $\lambda < 0$, to istnieją $C, R > 0$ (zależne od procesu i λ), dla których*

$$|\varphi(x)| \leq C \left\|\varphi\right\|_{\infty} \nu(x), \quad |x| \geq R.$$

W [H3, Section 4.3] zawarliśmy bardziej szczegółową dyskusję otrzymanych oszacowań dla różnych typów intensywności skoków i zilustrowaliśmy je przykładami. Ta ilustracja pokazuje, że gdy intensywność dalekich skoków procesu zanika wolniej niż wykładniczo, to tempo zaniku funkcji własnych H odpowiadających ujemnym wartościom własnym jest dominowane w nieskończoności przez tę intensywność (por. [H3, Corollaries 4.1-4.2 oraz Remarks 4.2-4.3]). Gdy jednak rząd zaniku ν w nieskończoności jest wykładniczy lub szybszy, to dominacja ta ulega przełamaniu i pojawia się zmiana jakościowa tego tempa względem ν. W przypadku wykładniczym, o ile proces ma własność bezpośredniego skoku, występuje dychotomia, która została odnotowana we wspomnianej już pracy [20] dla procesu relatywistycznego [H3, Corollary 4.3]. Dokładniej, $|\lambda|$ jest dostatecznie duża względem wyjściowego procesu, to zanik funkcji własnej jest nadal dominowany przez ν. Jeśli jednak λ jest wartością własną stanu podstawowego (tzn. $\lambda = \lambda_0$), która leży blisko spektrum istotnego $[0, \infty)$ operatora H, to tempo zaniku jest wolniejsze, a jego rząd zależy istotnie od $|\lambda|$ (zob. też opis heurystyczny mechanizmu powstawania tej dychotomii w [H3, s. 651, drugi akapit]). Dodajmy, że istotność założenia (36)-(37) w Twierdzeniu 21 została przetestowana w [H3, Proposition 4.2] dla pewnej klasy procesów.

Omówimy teraz krótko dowody powyższych oszacowań górnych. Za każdym razem, stosując reprezentację [H3, (4.5)], sprowadzamy problem do znalezienia górnego oszacowania dla pewnej szczególnej funkcji (X, η)-harmonicznej określonej w [H3, (3.13)], dla pewnego $\eta \in (0, |\lambda|)$. Metody szacowania takich funkcji wypracowane w [H1] okazały się jednak niewystarczające do uzyskania takich wyników w przypadku potencjałów z klasy $\mathcal{K}_{\pm}^0$. Argument w pracy [H3] oparty jest na nowym pomyśle, który prowadzi do Lematu 23 sformułowanego poniżej.

Przypomnijmy, że funkcje K_1^X, K_2^X zostały zdefiniowane w (34)-(35). Dla $s_1 \geq 1$ oraz $s_2 \geq 2s_1$ określamy

$$h_1(X, s_1, s_2) = K_2^X(s_1, s_2, \infty) \left[C\left(X, \frac{s_1}{16}\right) \left(\widetilde{C}(X, s_1) \left|B(0, s_1)\right| + \mathbb{E}^0[\tau_{B(0,2s_1)}] \right) + 1 \right],$$

$$h_2(X, s_1) = C\left(X, \frac{s_1}{16}\right) \left[C\left(X, s_1\right) \widetilde{C}(X, s_1) + \mathbb{E}^0[\tau_{B(0,2s_1)}] \sup_{|y| \geq \frac{s_1}{4}} \nu(y) \right] + \sup_{|y| \geq \frac{s_1}{16}} \nu(y),$$

gdzie

$$C(X,s) = \inf_{f \in \mathcal{B}} \|Lf_s\|_\infty, \qquad f_s(x) = f(x/s), \qquad s > 0,$$

$$\mathcal{B} = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}^d) : f(x) = 1 \text{ dla } x \in B(0,1/2), f(x) = 0 \text{ dla } x \in B(0,1)^c \text{ i } 0 \leq f \leq 1 \right\},$$

oraz

$$\widetilde{C}(X,s_1) := \sup_{\substack{x,y \in B(0,s_1) \\ |x-y| \geq s_1/8}} G_{B(0,s_1)}(x,y) + \frac{\mathbb{E}^0[\tau_{B(0,2s_1)}]}{|B(0,\frac{s_1}{4})|} \left(K_2^X \left(\frac{s_1}{4}, \frac{s_1}{2}, s_1 \right) \right)^2.$$

Oznaczmy też na moment przez C_1 stałą ustalającą porównywalność w założeniu (A1.a).

Lemat 23 ([H3, Lemma 3.2]). *Niech $\eta > 0$ i niech $\{X_t\}_{t \geq 0}$ będzie symetrycznym procesem Lévy'ego o nieskończonej mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, który spełnia założenia (A1)-(A3) (dla $R > 0$). Załóżmy, ponadto, że istnieją $r_1 \geq 1$, $r_2 \geq 2r_1$ oraz $r_3 > r_2$ takie, że*

$$2\, C_1^4\, h_1(X, r_1, r_2)\, K_1^X(r_2) + h_2(X, r_1)\, |B(0, r_2)|\, K_2^X(r_2, r_3, \infty) < \eta. \qquad (38)$$

Wówczas dla każdej ograniczonej funkcji $f \geq 0$, która jest (X,η)-harmoniczna w zbiorze $\overline{B}(0,r)^c$, dla pewnego $r > 0$, istnieją $C_2, R > 0$ (zależne od procesu i η), dla których

$$f(x) \leq C_2 \|f\|_\infty \nu(x), \qquad |x| \geq R.$$

Struktura warunku (38) jest zdeterminowana przez oszacowanie supremów funkcji (X,η)-harmonicznych w [H3, Lemma 3.1], które jest z kolei wersją górnego oszacowania w [15, Lemma 3.2 (b)] wyspecjalizowaną do zastosowania w przypadku procesu, którego trajektorie są zabijane z intensywnością daną przez potencjał V taki, że $V(x) \to 0$, gdy $|x| \to \infty$. Zrozumienie tej struktury w naszym przypadku oraz uzyskanie oszacowań w tych dwóch lematach (tj. [H3, Lemmas 3.1-3.2]) było jednym z dwóch najbardziej technicznych kroków w pracy [H3]. Trzeba zaznaczyć, że praca [42] (dotycząca dość obszernej klasy procesów Fellera) również zawiera pewne oszacowania funkcji harmonicznych w nieskończoności. Nie mogliśmy jednak zastosować tych wyników w naszych badaniach ze względu na duże ograniczenia na tempo zaniku intensywności skoków rozważanych tam procesów.

Dowód Twierdzenia 20 odwołuje się bezpośrednio do Lematu 23, podczas gdy dowody Twierdzeń 21 i 22 wymagają pewnego przygotowania. Krokiem pośrednim są tu odpowiednio [H3, Theorem 3.2] (dające górne oszacowanie funkcji (X,η)-harmonicznych w przypadku (31)) oraz [H3, Theorem 3.3] (dające górne oszacowanie od razu dla funkcji zdefiniowanej przez [H3, (3.13)] przy założeniu (32)-(33)). Dowód ostatniego z tych twierdzeń to druga najbardziej techniczna część omawianej pracy. Zastosowanie Lematu 23 (a dokładniej subtelna struktura funkcji po lewej stronie nierówności w warunku (38)) wymaga tu pewnej regularyzacji gęstości miary Lévy'ego.

Na koniec tego rozdziału wspomnijmy, że techniki dowodowe oparte na Lemacie 23 mogą być także zastosowane do uzyskiwania podobnych wyników dla klasy potencjałów $\mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$ (np. Twierdzenia 7). Zostało to przedyskutowane w [H3, Section 4.5].

V. Oszacowania jąder ciepła

W tym rozdziale zaprezentujemy wyniki uzyskane w pracy [H2]. Są to dokładne oszacowania gęstości przejścia dla procesów Lévy'ego z własnością bezpośredniego skoku dla ograniczonego horyzontu czasowego. Praca ta powstała jako druga w prezentowanym tu cyklu artykułów.

Nie dotyczy ona bezpośrednio własności półgrup Feynmana–Kaca, ale motywacje do uzyskania tych wyników (a co ważne, także nadzieja na ich uzyskanie) wypłynęły wprost z pracy [H1]. Własność bezpośredniego skoku okazała się założeniem strukturalnym w [H1] i nasze dalsze badania półgrup Feynmana–Kaca wymagały pewnej ogólnej systematycznej wiedzy o własnościach takich procesów. Dla przykładu, wyniki z pracy [H2] były ważne dla naszych rozważań w [H3], szczególnie w przypadku miar Lévy'ego, które mają skończony drugi moment. Umożliwiają one sprawdzenie, że założenie (A1) oraz pewna dodatkowa informacja o zachowaniu profilu g blisko 0 implikują pozostałe założenia (A2)-(A3) oraz warunki (28), (33), nawet w przypadku, gdy proces jest nieizotropowy [H3, Proposition 3.2].

W pracy [H2] zajmujemy się nieco inną klasa procesów Lévy'ego niż w [H1], [H3] i [H4]: zakładamy, że $A \equiv 0$ i $b \in \mathbb{R}^d$ jest dowolnym wektorem. Oznacza to, że wykładnik Lévy'ego-Chinczyna procesu $\{X_t\}_{t \geq 0}$ przyjmuje postać (por. (1))

$$\psi(\xi) = -i\xi \cdot b + \int \left(1 - e^{i\xi \cdot y} + i\xi \cdot y \mathbb{1}_{B(0,1)}(y)\right) \nu(dy), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{39}$$

Zawsze zakładamy, że $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$. Nasze najogólniejsze oszacowanie dopuszcza sytuację, gdy miara Lévy'ego ν nie jest symetryczna i absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Jednak najmocniejszy wynik charakteryzacyjny, który zostanie zaprezentowany jako pierwszy, wymaga, by ν była symetryczna i miała gęstość.

Oznaczmy

$$\Psi(r) = \sup_{|\xi| \leq r} \Re\psi(\xi), \quad r > 0.$$

Zauważmy, że Ψ jest funkcją ciągłą i niemalejącą. Ponadto, skoro $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$, to $\sup_{r>0} \Psi(r) = \infty$. Dodatkowo, niech $\Psi^{-1}(s) = \sup\{r > 0 : \Psi(r) = s\}$, $s > 0$. Wygodnie jest także przyjąć oznaczenia

$$h(t) := \frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}, \qquad b_r := \begin{cases} b - \int_{r \leq |y| < 1} y \, \nu(dy) & \text{gdy} \quad r < 1, \\ b & \text{gdy} \quad r = 1, \\ b + \int_{1 \leq |y| < r} y \, \nu(dy) & \text{gdy} \quad r > 1 \end{cases} \tag{40}$$

oraz $\nu_r(x) = \nu(x)\mathbf{1}_{\{|x| \geq r\}}$, $r > 0$.

Poniższe twierdzenie charakteryzuje pewien typ oszacowań jąder $p_t(x)$ w przypadku, gdy miara Lévy'ego jest symetryczna i absolutnie ciągła, a jej gęstość ma profil nierosnący.

Twierdzenie 24 ([H2, Theorem 1]). *Niech $\nu(dx) = \nu(x)dx$ będzie miarą Lévy'ego taką, że $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$, $\nu(y) = \nu(-y)$ oraz $\nu(x) \asymp f(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, dla pewnej nierosnącej funkcji $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Załóżmy ponadto, że $b \in \mathbb{R}^d$. Wówczas następujące warunki (1) i (2) są równoważne.*

(1) *Istnieje $r_0 > 0$ oraz stałe $C, \widetilde{C} > 0$ takie, że*

(a) $\nu_{r_0} * \nu_{r_0}(x) \leq C\nu(x)$, $|x| \geq 2r_0$,

(b) $\Psi(1/|x|) \leq \widetilde{C}|x|^d \nu(x)$, $0 < |x| \leq 2r_0$.

(2) *Istnieje $t_0, \theta > 0$ oraz stałe $C_1 - C_4$, takie, że dla wszystkich $t \in (0, t_0]$ mamy*

$$C_1 \left[h(t)\right]^{-d} \leq p_t(x + tb) \leq C_3 \left[h(t)\right]^{-d}, \quad t \in (0, t_0], \quad |x| \leq \theta h(t),$$

oraz

$$C_2 \, t \, \nu(x) \leq p_t(x + tb) \leq C_4 \, t \, \nu(x), \quad t \in (0, t_0], \quad |x| \geq \theta h(t).$$

Powyższy wynik daje dokładne dwustronne oszacowania dla małych czasów w szerokiej podklasie półgrup procesów Lévy'ego z własnością bezpośredniego skoku, którymi zajmowaliśmy się w pozostałych pracach [H1], [H3] oraz [H4] z omawianego tu cyklu artykułów. Są to w szczególności relatywistyczne i temperowane procesy stabilne [H2, Example 2]. Co ważne, jest to także wynik charakteryzacyjny, który pokazuje, że poza tą klasą procesów zachowanie $p_t(x)$ jest inne [H2, Example 5].

Zaznaczmy, że poszukiwanie dokładnych oszacowań i przybliżeń asymptotycznych dla jąder ciepła należy obecnie do głównego nurtu badań nad własnościami operatorów nielokalnych i ich półgrup ewolucyjnych (w ostatnich latach uzyskano bardzo wiele niezwykle mocnych i użytecznych oszacowań [12, 22, 43, 44, 45, 53]). Nasze rezultaty także wpisują się w ten trend. Co ciekawe, uzyskana przez nas charakteryzacja dotyczy także procesów, których miary Lévy'ego mają skończony drugi moment (oznacza to, że $|\Re\psi(\xi)| \leq C|\xi|^2$ dla małych ξ). Ten przypadek nie był jak dotąd dobrze zbadany. Dodajmy, że dokładne oszacowania z pracy [H2] były nam niezbędne do uzyskania jeszcze dokładniejszych wyników asymptotycznych w pracy [P9], która będzie omówiona poniżej.

Zauważmy, że warunki (1.a) i (1.b) dotyczą rozłącznych zakresów x. Dowód powyższego twierdzenia także składa się z dwóch części, odpowiednio dla małych i dużych $|x|$ (por. [H2, Theorems 2-3]). Naszym najważniejszym wkładem jest wykazanie, że przy pewnej dodatkowej wiedzy o zachowaniu $\Re\psi$ w nieskończoności (odpowiedni warunek jest sformułowany w postaci założenia **(E)** poniżej), jednostajna porównywalność $p_t(x+tb) \asymp t\nu(x)$ dla małych t i dużych x jest równoważna warunkowi (1.b), a więc własności bezpośredniego skoku (por. (A1.c)). Jest to treścią [H2, Theorem 3]. Zasadniczym krokiem jest tu dowód, że własność bezpośredniego skoku rzeczywiście pociąga oszacowanie $p_t(x+tb) \leq Ct\nu(x)$ dla małych t i dużych x. Uzyskaliśmy znacznie ogólniejszą wersję tego wyniku [H2, Theorem 4]. Dopuszcza ona niesymetryczne miary Lévy'ego, które mogą być nawet singularne względem miary Lebesgue'a. Sformułujemy teraz założenia potrzebne do zaprezentowania tego twierdzenia.

(E) Istnieją $C > 0$ oraz $t_p > 0$ takie, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t\Re\psi(\xi)}|\xi|\, d\xi \leq C\,[h(t)]^{-d-1}, \quad t \in (0, t_p].$$

(D) Istnieje funkcja nierosnąca $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$, liczba $\gamma \in [0,d]$ oraz stała $C > 0$ takie, że

$$\nu(A) \leq Cf(\mathrm{dist}(A,0))(\mathrm{diam}(A))^{\gamma},$$

dla każdego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^d$, który spełnia $\mathrm{dist}(A,0) > 0$.

Symbol $\mathrm{diam}(A)$ oznacza tu średnicę zbioru A, a $\mathrm{dist}(A,0)$ jego odległość od 0. Ostatnie założenie uogólnia naturalnie własność bezpośredniego skoku (A1.c) (zob. [H2, Lemma 3]).

(C) Istnieją stałe $C, \widetilde{C} > 0$ oraz $r_0 > 0$ takie, że dla wszystkich $|x| \geq 2r_0$ i $r \in (0, r_0]$ mamy

$$\int_{|x-y|>r_0,\ |y|>r} f(|y-x|)\,\nu(dy) \leq C\,\Psi(1/r)\,f(|x|) \quad \text{i} \quad f(r) \leq \widetilde{C}\Psi(1/r)r^{-\gamma},$$

dla f i γ spełniających warunek dominacji **(D)**.

Twierdzenie 25 ([H2, Theorem 4]). *Niech ν będzie miarą Lévy'ego taką, że $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ i niech założenia **(E)**, **(D)** oraz **(C)** będą spełnione dla pewnego t_p, majoranty f oraz γ i r_0. Wówczas istnieje stała $C > 0$ taka, że*

$$p_t(x + tb_{h(t)}) \leq C\, t\, [h(t)]^{\gamma - d} f(|x|), \quad |x| > 4r_0, \ t \in (0, t_0],$$

gdzie $t_0 := t_p \wedge \frac{1}{\Psi(1/r_0)}$.

Powyższe twierdzenie może być zastosowane do wyznaczenia górnego oszacowania dla półgrup pochodzących od tzw. produktowych oraz dyskretnych miar Lévy'ego [H2, Examples 2-3].

Dowód Twierdzenia 25 wykorzystuje pewną ogólną metodę, która opiera się na oszacowaniach półgrup miar poissonowskich postaci

$$\bar{P}_t^r = e^{-t|\bar{\nu}_r|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \bar{\nu}_r^{n*}}{n!}, \quad t, r > 0,$$

gdzie $\bar{\nu}_r(dy) = \mathbf{1}_{B(0,r)^c}(y)\, \nu(dy)$ [H2, Lemma 4]. Podejście to było zastosowane we wcześniejszych pracach Bogdana i Sztonyka [16] i Sztonyka [68]. W ogólności rozważane przez nas miary Lévy'ego nie mają własności podwajania i uzyskanie dokładnych oszacowań wymagało istotnych modyfikacji tej metody, w tym zlokalizowania miar na kulach o stałym promieniu.

Jednym z głównych kroków było wyznaczenie dokładnych oszacowań dla splotów obciętych miar Lévy'ego, które są następnie dziedziczone przez półgrupy.

Lemat 26 ([H2, Lemma 2]). *Niech ν będzie miarą Lévy'ego taką, że $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ i niech założenia **(D)** oraz **(C)** będą spełnione dla pewnej majoranty f oraz liczb γ i r_0.*

(a) Istnieje stała $C > 0$ (zależna od r_0) taka, że

$$\int_{|x-y|>r_0} f(|y - x|) \bar{\nu}_r^{n*}(dy) \leq (C\Psi(1/r))^n f(|x|), \quad |x| \geq 3r_0, \quad r \in (0, r_0], \ n \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

(b) Dla każdego ograniczonego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^d$, dla którego $\operatorname{dist}(A, 0) \geq 3r_0$, mamy

$$\bar{\nu}_r^{n*}(A) \leq \widetilde{C}^n [\Psi(1/r)]^{n-1} f(\operatorname{dist}(A, 0))\, (\operatorname{diam}(A))^\gamma, \quad r \in (0, r_0], \ n \in \mathbb{N}, \tag{42}$$

z pewną stałą $\widetilde{C}$ zależną od r_0 oraz $\lceil \operatorname{diam}(A)/r_0 \rceil$.

Dokładność powyższych oszacowań górnych jest przez nas rozumiana w ten sposób, że jeśli założenia **(C)** i **(D)** są spełnione z profilem f, to odpowiednie ograniczenia są dziedziczone przez sploty miar Lévy'ego z tym samym profilem f, a nie tylko z pewną jego dylatacją.

W dowodzie Twierdzenia 25 ważne są też obserwacje z [H2, Lemma 1], które wynikają bezpośrednio z założenia **(C)**.

Dowód Lematu 26 jest indukcyjny. Własność (a) jest naturalnym uogólnieniem warunku **(C)** i wynika z faktu, że pierwsza nierówność z tego warunku może być efektywnie iterowana przy pomocy **(D)**. Własność (b) jest natomiast uogólnieniem warunku **(D)** do dowolnego splotu. Argument jest tu bardziej subtelny i polega na sprawdzeniu kroku indukcyjnego dla $\operatorname{dist}(A, 0) \geq 3r_0 - r_0/2^n$ zamiast $\operatorname{dist}(A, 0) \geq 3r_0$. Wykorzystuje on uzyskaną wcześniej własność (a). Lemat 26 uogólnia więc parę naszych kluczowych założeń **(C)** i **(D)** na dowolne sploty.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Poza czterema pracami, stanowiącymi jednotematyczny cykl publikacji, po uzyskaniu stopnia doktora opublikowałem jeszcze dziesieć artykułów, jeden jest aktualnie w druku, a kolejne dwa zostały wysłane do redakcji. Łącznie jestem autorem lub współautorem 21 artykułów. Liczba cytowań, według bazy Web of Science (na dzień 03.01.2019), jest równa 91 (62 bez autocytowań) zaś h-indeks (indeks Hirscha) wynosi 6. Sumaryczny *impact factor* czasopism dla czterech publikacji wchodzących w skład *osiągnięcia naukowego*, według listy Journal Citation Reports wynosi 4,022, a sumaryczny *impact factor* czasopism dla wszystkich publikacji wynosi 18,577, zob. Tablicę 1.

Tablica 1: Impact factor czasopism według listy Journal Citation Report zgodnie z rokiem opublikowania (lub z roku 2017 dla publikacji z 2018 roku).

praca	czasopismo	data publikacji	impact factor
[H1]	Annals Probab.	2015	1,734
[H2]	J. Anal. Math.	2017	0,592
[H3]	Potential Anal.	2017	0,852
[H4]	J. Spectr. Th.	2018	0,844
[P1]	J. Evol. Eq.	2013	0,643
[P2]	Rev. Math. Phys.	2013	1,448
[P3]	CAIM	2014	–
[P4]	Stoch. Proc. Appl.	2015	1,193
[P5]	J. Math. Anal. Appl.	2015	1,014
[P6]	Phys. Rev. E	2017	2,284
[P7]	J. Math. Anal. Appl.	2016	1,064
[P8]	Stoch. Proc. Appl.	2018	1,051
[P9]	Trans. Amer. Math. Soc.	2018	1,496
[P10]	Potential Anal.	2018	0,852
[P11]	Commun. Contemp. Math.	2018	1,155 [2]
[D1]	Stoch. Proc. Appl.	2012	0,953
[D2]	Studia Math.	2012	0,549
[D3]	Potential Anal.	2010	0,853
[M1]	Prob. Math. Stat.	2010	–
		Suma:	18,577

Lista pozostałych prac po uzyskaniu stopnia doktora:

[P1] K. Kaleta, P. Sztonyk, *Upper estimates of transition densities for stable dominated semigroups*, Journal of Evolution Equations 13 (3), 633-650 (2013)

[P2] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Małecki, *One-dimensional quasi-relativistic particle in the box*, Reviews in Mathematical Physics 25 (8), 1350014 (2013)

[P3] J. Lőrinczi, K. Kaleta, S.O. Durugo, *Spectral and analytic properties of non-local Schrödinger operators and related jump processes*, Communications in Applied and Industrial Mathematics 6 (2), 534 (2014)

[2] praca [P11] została przyjęta do druku w listopadzie 2018

[P4] K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba, *Integrated density of states for Poisson-Schrödinger perturbations of subordinate Brownian motions on the Sierpiński gasket*, Stochastic Processes and their Applications 125 (4), 1244-1281 (2015)

[P5] K. Kaleta, P. Sztonyk, *Estimates of transition densities and their derivatives for jump Lévy processes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 431 (1), 260-282 (2015)

[P6] K. Kaleta, J. Lőrinczi, *Transition in the decay rates of stationary distributions of Lévy motion in an energy landscape*, Physical Review E 93, 022135 (2016)

[P7] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Małecki, *Asymptotic estimate of eigenvalues of pseudo-differential operators in an interval*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 439 (2), 896-924 (2016)

[P8] K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba, *Lifschitz singularity for subordinate Brownian motions in presence of the Poissonian potential on the Sierpiński gasket*, Stochastic Processes and their Applications 128 (11), 3897-3939 (2018)

[P9] K. Kaleta, P. Sztonyk, *Spatial asymptotics at infinity for heat kernels of pseudo-differential operators*, Transactions of the American Mathematical Society, published online, https://doi.org/10.1090/tran/7538

[P10] K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba, *The quenched asymptotics for nonlocal Schrödinger operators with Poissonian potentials*, Potential Analysis, published online, https://doi.org/10.1007/s11118-018-9747-x

[P11] K. Kaleta, J. Lőrinczi, *Typical long time behaviour of ground state transformed jump processes*, Communications in Contemporary Mathematics, w druku (2018), tekst dostępny na arXiv:1806.10657

[Pre1] K. Kaleta, J. Lőrinczi, *Zero-energy bound state decay for nonlocal Schrödinger operators*, 1-35, wysłana (2018), tekst dostępny na arXiv:1804.04245

[Pre2] K. Kaleta, M. Olszewski, K. Pietruska-Pałuba, *Reflected Brownian motion on simple nested fractals*, 1-37, wysłana (2018), tekst dostępny na arXiv:1804.04228

Mój dorobek naukowy dopełniają jeszcze cztery publikacje (trzy pierwsze weszły w skład rozprawy doktorskiej, a ostatnia powstała na podstawie pracy magisterskiej). Te prace nie będą omówione poniżej.

[D1] K. Kaleta, J. Lőrinczi, *Fractional $P(\phi)_1$-processes and Gibbs measures*, Stochastic Processes and their Applications 122 (10), 3580-3617 (2012)

[D2] K. Kaleta, *Spectral gap lower bound for the one-dimensional fractional Schrödinger operator in the interval*, Studia Mathematica 209, 267-287 (2012)

[D3] K. Kaleta, T. Kulczycki, *Intrinsic ultracontractivity for Schrödinger operators based on fractional Laplacians*, Potential Analysis 33 (4), 313-339 (2010)

[M1] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, *Boundary Harnack inequality for α-harmonic functions on the Sierpiński triangle*, Probability and Mathematical Statistics 30 (2), 353-368 (2010)

Przedstawię teraz wyniki uzyskane w pracach [P1]-[P11] oraz [Pre1]-[Pre2].

Asymptotyka przestrzenna jąder ciepła w nieskończoności

W pracy [P9] zbadaliśmy asymptotykę przestrzenną w nieskończoności jąder ciepła dla szerokiej podklasy nielokalnych operatorów pseudoróżniczkowych L postaci (3). Dokładniej, podaliśmy warunki dostateczne, przy których można wyznaczyć granice ilorazów $\frac{p_t(r\theta-y)}{t\,\nu(r\theta)}$, $t \in T$, $\theta \in E$, $y \in \mathbb{R}^d$, gdzie ν jest gęstością miary Lévy'ego, $T \subset (0,\infty)$ jest zbiorem ograniczonym, a E jest podzbiorem sfery jednostkowej $\mathbb{S}^{d-1}$, $d \geq 1$. Poniżej przez $\Gamma_E := \{y : y/|y| \in E\}$ oznaczać bedziemy stożek uogólniony wyznaczony przez zbiór $E \subset \mathbb{S}^{d-1}$. Zakładamy, że $A \equiv 0$ lub $\inf_{|\xi|=1} \xi \cdot A\xi > 0$, a $\nu(dx) = \nu(x)dx$ i istnieje nierosnący profil f, który dominuje gęstość $\nu(x)$ (f musi być dostatecznie dobrze dopasowany do ν w otoczeniu zera) i spełnia warunek:

$$K(r) := \sup_{|x|>1} \frac{\int_{\substack{|x-y|>r \\ |y|>r}} f(|x-y|)f(|y|)dy}{f(|x|)} \searrow 0, \qquad \text{gdy } r \to \infty. \tag{43}$$

Dodatkowo zakładamy, że istnieje niepusty i ograniczony zbiót $T \subset (0,\infty)$ i stała $C > 0$ takie, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t(\Re\psi(\xi)-\xi\cdot A\xi)}|\xi|d\xi \leq C\left(\Psi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{d+1}, \quad t \in T,$$

gdzie $\Psi(r) = \sup_{|\xi|\leq r} \Re(\psi(\xi) - \xi \cdot A\xi)$ oraz $\Psi^{-1}(s) = \sup\{r > 0 : \Psi(r) = s\}$, dla $r, s > 0$. Wówczas nasze główne twierdzenie [P9, Theorem 1] orzeka, że jeśli dla pewnych $E \subset \mathbb{S}^{d-1}$ oraz $\kappa \geq 0$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\nu(r\theta - y)}{\nu(r\theta)} = e^{\kappa(\theta\cdot y)}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in E, \tag{44}$$

oraz $\inf_{x\in\Gamma_E} \frac{\nu(x)}{f(|x|)} > 0$, to dla wszystkich $t \in T$, $\theta \in E$ oraz $y \in \mathbb{R}^d$ mamy też

$$\lim_{r\to\infty} \frac{p_t(r\theta - y)}{t\,\nu(r\theta)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad \kappa = 0, \\ e^{-t\widetilde{\psi}(\kappa\theta)+\kappa(\theta\cdot y)}, & \text{gdy} \quad \kappa > 0, \end{cases} \tag{45}$$

gdzie

$$\widetilde{\psi}(\xi) = -\xi \cdot b - \xi \cdot A\xi + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(1 - e^{\xi\cdot y} + \xi \cdot y \mathbb{1}_{B(0,1)}(y)\right) \nu(y)\, dy$$

jest wykładnikiem Laplace'a procesu Lévy'ego generowanego przez L (gdy $\kappa > 0$, to warunki (43) i (44) implikują, że $\widetilde{\psi}(\xi)$ jest dobrze określona dla $\xi = \kappa\theta$ [P9, Lemma 2]). Gdy granica w (44) jest jednostajna w $(\theta, y) \in E \times D$, dla każdego zbioru zwartego $D \subset \mathbb{R}^d$, to (45) jest także jednostajna w $(t, \theta, y) \in T \times E \times B(0, \varrho)$, dla $\varrho > 0$. Jako wniosek uzyskujemy dokładne dwustronne oszacowania jąder p_t w stożkach Γ_E, z dala od 0 [P9, Corollary 2]. Podobne wyniki zachodzą dla gęstości absolutnie ciągłych komponent złożonych procesów Poissona [P9, Theorem 2, Corollary 2].

Nasza metoda jest nowa i opiera się na zastosowaniu funkcji $K(r)$, która została wprowadzona w pracy [H3] (przyp. definicję (34) powyżej). Warunek (43) uzwarca zbieżność w naszych dowodach. Znane dotychczas metody nie pozwalały uzyskiwać takich wyników dla miar Lévy'ego zlokalizowanych wykładniczo w nieskończoności. Nasze podejście pozwala policzyć granicę (45) np. dla relatywistycznych półgrup stabilnych (zob. dyskusję przykładów w [P9, Section 6]).

Procesy stochastyczne na fraktalach i w ośrodkach losowych

W cyklu prac [P4] i [P8] zbadaliśmy pewne własności spektralne uogólnionych losowych operatorów Schrödingera H_ω, które odpowiadają subordynowanym ruchom Browna (zarówno dyfuzyjnym jak i skokowym) ewoluującym w środowisku losowym pochodzącym od punktowego procesu Poissona na trójkącie Sierpińskiego $\mathcal{G}$. Dokładniej, operator H_ω jest generatorem półgrupy Feynmana–Kaca takiego procesu z niezależnym potencjałem losowym $V(x,\omega) = \int_\mathcal{G} W(x,y)\mu^\omega(dy)$, gdzie W jest dwuargumentowym profilem nieujemnym na $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, a $\mu^\omega(dy)$ jest losową miarą Poissona na $\mathcal{G}$ o intensywności $\nu m(dx)$, $\nu > 0$ (m oznacza tu $\log 3/\log 2$-wymiarową miarę Hausdorffa na $\mathcal{G}$).

W pracy [P4] wykazaliśmy istnienie tzw. całkowej gęstości stanów (ang. *integrated density of states*; w skrócie IDS) operatora H_ω dla dość ogólnej klasy subordynowanych dyfuzji [P4, Assumption 2.1 i Example 2.1] i wprowadzonej przez nas rodziny profilów dwuargumentowych W [P4, (W1)-(W3) na s. 1262 oraz Section 4], która zawiera funkcje singularne i o nieograniczonym nośniku (tak ogólne potencjały nie były dotychczas rozważane na fraktalach nawet w przypadku dyfuzyjnym). Gęstość stanów l uzyskaliśmy jako wspólną nielosową granicę empirycznych miar losowych niesionych przez spektra generatorów procesów zabijanych oraz odbijanych na coraz większych komórkach fraktalnych $\mathcal{G}_n \nearrow \mathcal{G}$, $n \to \infty$ [P4, Theorems 3.1-3.2]. Zabijanie oraz odbijanie procesu odpowiada nakładaniu warunków typu Dirichleta i Neumanna dla operatorów.

W pracy [P8], przy nieco bardziej restrykcyjnych, ale dość naturalnych założeniach na proces (a dokładniej, na subordynator; zob. (L1) na s. 3906 oraz (U1)-(U3) na s. 3913), zbadaliśmy zachowanie asymptotyczne IDS w prawostronnym otoczeniu $0 = \inf \operatorname{spec} H_\omega$. Wykazaliśmy, że dystrybuanta tej miary ma *osobliwość typu Lifschitza*, tzn. $-\log l([0,\lambda]) \approx \lambda^{-\gamma}$ dla pewnego $\gamma > 0$, gdy $\lambda \to 0^+$ [P8, Theorems 3.3 i 4.4]. Jako produkt uboczny, uzyskaliśmy także oszacowania dla funkcjonałów Feynmana–Kaca, uśrednionych względem procesu i ośrodka dla dużych czasów. Obiekty te mogą być interpretowane jako (średnie względem ośrodka) prawdopodobieństwa przeżycia procesów, których trajektorie zabijane są przez potencjały losowe do chwili t. Zidentyfikowane przez nas zachowania asymptotyczne zależą od tempa zaniku $W(x,y)$, gdy $|x-y| \to \infty$, oraz własności dystrybucyjnych dalekiego zasięgu procesu (opisanych formalnie przez zachowanie asymptotyczne wykładnika Laplace'a subordynatora w otoczeniu zera). Podkreślmy, że nasze wyniki identyfikują pewne *istotne przejście jakościowe* we własnościach asymptotycznych IDS oraz uśrednionych funkcjonałów, które obrazują który z tych dwóch czynników ma decydujący wpływ na te własności.

Kluczowym narzędziem wykorzystywanym przez nas w obydwu omawianych pracach są tzw. procesy odbijane w komórkach $\mathcal{G}_n$, $n \geq 1$. W przypadku dyfuzyjnym taki proces został skonstruowany w pracy [56], poprzez projekcję ruchu Browna z nieograniczonego trójkąta $\mathcal{G}$ na $\mathcal{G}_n$. W przypadku skokowym taki proces uzyskujemy bardzo naturalnie przez subordynację odbijanej dyfuzji na $\mathcal{G}_n$. Dzięki tej szczególnej konstrukcji, możliwe było zidentyfikowanie relacji pomiędzy procesami odbijanymi na kolejnych poziomach $\mathcal{G}_n$ i $\mathcal{G}_{n+1}$, co pozwoliło uzyskać monotoniczność dla uśrednionych funkcjonałów Feynmana–Kaca procesów odbijanych w komórkach $\mathcal{G}_n$ z potencjałami speriodyzowanymi względem ośrodka (tzw. periodyzacja w sensie Sznitmana) (zob. [P4, nierówność (3.8)]). Był to kluczowy krok w dowodzie istnienia IDS (zbieżność transformat Laplace'a w [P4, Theorems 3.1]) oraz w dowodzie oszacowań górnych ([P8, Lemma 4.4] i jego dalsze zastosowania). Innym ważnym argumentem jest udowodniona przez nas abstrakcyjna wersja twierdzenia A. S. Sznitmana, która pozwala oszacować wartość własną stanu postawowego operatora Schrödingera przez wartość własną stanu podstawowego pewnego operatora z warunkiem Dirichleta [P8, Theorem A.1].

Opisane powyżej wyniki i metody bardzo mocno zależą od specyficznej geometrii trójkąta Sierpińskiego (np. istnienie odpowiedniego ciągu procesów odbijanych). Chcemy jednak uzyskać ich odpowiedniki dla bardziej skomplikowanych geometrycznie przestrzeni fraktalnych. W pracy [Pre2] opisaliśmy bardzo ogólną klasę fraktali zagnieżdżonych (ang. nested fractals), dla której istnieje naturalna projekcja, która pozwala skonstruować pożądany ciąg procesów na komórkach rzędu n [Pre2, Definitions 3.1-3.3 oraz Theorems 4.1-4.2].

Nielokalny Paraboliczny Model Andersona (PAM)

W pracy [P10] zajmowaliśmy się symetrycznymi, mocno fellerowskimi procesami Lévy'ego ze skokami $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ewoluującymi w ośrodku losowym w $\mathbb{R}^d$ indukowanym przez (niezależny od procesu) potencjał losowy typu poissonowskiego postaci $V^\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^d} W(x-y)\mu^\omega(dy)$, gdzie W jest profilem nieujemnym na $\mathbb{R}^d$, a $\mu^\omega(dy)$ jest losową miarą Poissona o intensywności ρdx, z parametrem $\rho > 0$. W ogólności nie wymagaliśmy absolutnej ciągłości miary Lévy'ego, ale zawsze zakładaliśmy, że symbol ψ spełnia $\mathrm{e}^{-t_0\psi(\cdot)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dla pewnego $t_0 > 0$, co daje dużą regularność gęstości $p_t(x)$ dla dużych czasów. Nasze główne wyniki to oszacowania asymptotyczne dla zmiennej losowej

$$u^\omega(t,x) := \mathbf{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\,\mathrm{d}s}\right], \tag{46}$$

gdy $t \to \infty$, prawie na pewno względem ω, tj. względem ośrodka losowego (ang. *quenched* behaviour). Asymptotyka zmiennej $u^\omega(t,x)$ po uśrednieniu względem ośrodka (ang. *annealed*) dla procesów Lévy'ego ze skokami została zbadana w dużej ogólności przez Donskera i Varadhana oraz Okurę. Asymptotytka prawie pewna, którą zajęliśmy się w omawianej pracy, była otwartym problemem przez prawie 40 lat (nawet w przypadku skokowego izotropowego procesu stabilnego). Zaznaczmy, że wielkość $u^\omega(t,x)$ jest prawdopodobieństwem przeżycia do chwili t procesu startującego z x, którego trajektorie są zabijane z intensywnością zdeterminowaną przez potencjał V^ω. Jest ona rozwiązaniem probabilistycznym zagadnienia parabolicznego $\partial_t u = -H_\omega u$, $u(0,x) \equiv 1$, gdzie $H_\omega := -L + V^\omega$ jest nielokalnym losowym operatorem Schrödingera opartym na generatorze L procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Nasze pierwsze główne wyniki to [P10, Theorems 3.1 i 4.1], które dają dość ogólne oszacowania górne i dolne. Pierwszy z tych wyników wymaga pewnej informacji o tempie zaniku ogonów rozkładu zmiennych X_t i o zachowaniu asymptotycznym IDS operatora H_ω. Drugie twierdzenie wymaga pewnej informacji o zachowaniu wartości własnej stanu podstawowego dla procesu zabijanego w dużych kulach oraz założenia, że nośnik W jest ograniczony. W [P10, Section 5] najpierw udawadniamy szereg wyników pomocniczych, które pozwalają sprawdzać ogólne założenia z poprzednich twierdzeń dla pewnej szerokiej klasy procesów, a następnie wykorzystujemy te rezultaty do wyznaczenia profili asymptotycznych $\eta(t)$ oraz jawnych stałych $C_1, C_2 > 0$, które spełniają

$$-C_1 \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\log u^\omega(t,x)}{\eta(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\log u^\omega(t,x)}{\eta(t)} \leq -C_2,$$

prawie na pewno względem ω, dla dowolnego ustalonego $x \in \mathbb{R}^d$. Wyniki te zilustrowaliśmy dla klasy izotropowych procesów unimodalnych w [P10, Table 1]. Na uwagę zasługuje fakt, że udało nam się zidentyfikować dwa *przejścia jakościowe* tempa wzrostu funkcji η, które zależą od tempa zaniku intensywności dalekich skoków procesu (zob. bardziej szczegółową dyskusję [P10, s. 6]). W szczególności, gdy tempo zaniku tej intensywności jest rzędu co najmniej $e^{-c|x|^\beta}$, $c, \beta > 0$ (np. relatywistyczne procesy stabilne), to $C_1 = C_2$, tzn. policzyliśmy granicę

$\lim_{t\to\infty}\frac{\log u^{\omega}(t,x)}{\eta(t)}$, prawie na pewno względem ω. Profil $\eta(t)$ jest w tym przypadku taki sam, jak dla ruchu Browna. Co ciekawe, nie jest to prawdą dla dowolnych miar Lévy'ego, które mają skończony drugi moment.

Procesy skokowe warunkowane przez stan podstawowy

W pracy [P11] badaliśmy zachowanie asymptotyczne procesów warunkowanych przez stan podstawowy (związanych z nielokalnymi operatorami Schrödingera $H = -L + V$), startujących ze swoich rozkładów stacjonarnych $\mu(dx) = \varphi_0^2(x)dx$. Analogiczny problem został zbadany przez Rosena i Simona w jednym wymiarze dla klasycznego operatora Schrödingera $-\Delta + V$ w przypadku, gdy potencjał V jest wielomianem parzystego stopnia [59]. Ze względu na ograniczenia natury technicznej nasze rozważania ograniczają do analizy fluktuacji śladów trajektorii dla czasów naturalnych. Pierwsze wyniki to oszacowanie rzędu fluktuacji (twierdzenie typu LIL) [P11, Corollary 3.1] (wynikające bezpośrednio z odpowiedniego testu całkowego typu Kołmogorowa [P11, Theorem 3.1]) uzyskane w dość dużej ogólności (jedynym warunkiem jest tu istnienie niezdegenerowanego stanu podstawowego, który gwarantuje istnienie procesu warunkowanego). Drugim wynikiem jest ogólna reguła porównawcza w [P11, Theorem 3.2]. Dalsze rozdziały, [P11, Sections 4.2-4.3 i 4.4], zawierają bardziej szczegółowe wersje tych wyników, wyspecjalizowane do analizy przypadków procesów z własnością bezpośredniego skoku z potencjałami $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{\infty}$ oraz $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{0}$. Kluczowe znaczenie mają tu nasze oszacowania funkcji własnej stanu podstawowego z prac [H1] i [H3], które pozwalają na uchwycenie bezpośredniej zależności profilów asymptotycznych od potencjału i intensywności skoków wyjściowego procesu Lévy'ego.

Praca [P6], opublikowana w czasopiśmie fizycznym, zawiera szerszą dyskusję naszych wyników dotyczących lokalizacji stanów podstawowych dla nielokalnych operatorów Schrödingera w odniesieniu do procesów warunkowanych. Celem tej pracy było zakomunikowanie i rozpowszechnienie tych rezultatów wśród specjalistów pracujących w obrębie fizyki statystycznej.

Stany o zerowej energii i zero-rezonanse operatorów Schrödingera

W pracy [Pre1] rozważaliśmy problem podobny do tego w [H3], ale w sytuacji krytycznej, tzn. gdy wartość własna $\lambda = 0$. Dokładniej, zbadaliśmy własności lokalizacyjne (oszacowanie tempa zaniku w nieskończoności) rozwiązań równania $H\varphi = 0$, dla nielokalnych operatorów Schrödingera $H = -L + V$, gdzie L jest generatorem symetrycznego procesu Lévy'ego spełniającego założenia (A1)-(A3), a $V \in \mathcal{K}_{\pm}^{0}$. Z powodu ograniczeń natury technicznej musieliśmy też zakładać, że gęstość miary Lévy'ego ma własność podwajania. Gdy $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, to φ jest funkcją własną operatora H odpowiadającą zerowej wartości własnej. Ponieważ 0 leży na brzegu spectrum istotnego H, nie jest to już izolowana wartość własna. Istnieją też rozwiązania $\varphi \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ takie, że $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, dla pewnego $p > 2$, które nazywane są *zero-rezonansami* (ang. *zero-resonances*). Kluczowym argumentem jest tu jeszcze bardziej subtelna wersja Lematu 23, która pozwala uzyskiwać oszacowania funkcji (X, V)-harmonicznych, uwzględniając tempo zaniku samego potencjału V w nieskończoności. W [Pre1, Section 3] udowodniliśmy pewne, dostatecznie dokładne górne i dolne oszacowania samopoprawiające, które dopasowane są do oszacowań początkowych funkcji (X, V)-harmonicznych otrzymanych we wspomnianym lemacie. Pozwoliło nam to uzyskać oszacowania górne dla $|\varphi|$ (oraz dolne w przypadku, gdy $\varphi > 0$), które w niektórych przypadkach są dokładne. Odnotowaliśmy też dwa *przejścia jakościowe* tempa zaniku $|\varphi|$ w nieskończoności, które zależą od zachowania funkcji $\Psi(1/|x|)/V(x)$ oraz całkowalności ilorazu $\nu(x)/V(x)$ w nieskończoności (dyskusja wraz z przykładami i interpretacją heurystyczną zostały zawarte w [Prel, Section 6]).

Oszacowania półgrup fellerowskich, w tym procesów Lévy'ego

W pracy [P1] udowodniliśmy oszacowanie górne dla jąder całkowych półgrup fellerowskich, które opisują ewolucję niejednorodnych przestrzennie skokowych procesów Markowa w $\mathbb{R}^d$, tzw. procesów typu Lévy'ego [17]. Intensywności skoków $f(x,y)$ rozważanych procesów muszą spełniać pewne warunki regularności (w tym mieć pewne własności symetrii). Najważniejsze z nich to istnienie dostatecznie gładkiego profilu ϕ i stałych $M, c > 0$ takich, że

$$f(x,y) \le M\frac{\phi(|x-y|)}{|x-y|^{d+\alpha}}, \quad x \neq y, \quad \text{oraz} \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|>r}\frac{f(x,y)}{\phi(|x-y|)}dy \ge cr^{-\alpha}, \quad r \in (0,1),$$

dla pewnego $\alpha \in (0,2)$. Zakładamy, że ϕ jest funkcją dostatecznie gładką, stałą w otoczeniu zera i zanikającą dostatecznie regularnie w nieskończoności. W szczególności $\phi(r)r^{-d-\alpha}$ musi spełniać warunek splotowy jak w założeniu (A1.c).

Główny wynik to następujące oszacowanie dla jąder całkowych (gęstości prawdopodobieństw przejścia) rozważanych półgrup: istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ takie, że

$$p(t,x,y) \le C_1 e^{C_2 t}\min\left(t^{-d/\alpha}, \frac{t\phi(|x-y|)}{|x-y|^{d+\alpha}}\right), \quad x,y\in\mathbb{R}^d, \quad t>0.$$

Co ciekawe, rezultat ten pokrywa też sytuację, gdy $\phi(r)$ jest rzędu $e^{-cr}r^{\gamma}$, dla pewnych $c > 0$ i $\gamma \ge 0$ (np. niejednorodne przestrzennie procesy typu-relatywistycznego i temperowane). Dodajmy, że przy naszych założeniach powyższe ograniczenie jest dokładne dla małych t w tym sensie, że funkcja występująca po prawej stronie wyznacza ostre dwustronne oszacowanie dla gęstości przejścia izotropowego procesu Lévy'ego o mierze Lévy'ego $\nu(dx) = C\phi(|x|)|x|^{-d-\alpha}dx$, który majoryzuje rozważany proces Markowa.

Praca [P5] zawiera górne i dolne oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia oraz oszacowania górne na ich pochodne względem argumentu przestrzennego dla dość szerokiej klasy procesów Lévy'ego ze skokami. Pierwszy wynik, [P5, Theorem 1], daje oszacowanie górne przy pewnych założeniach na wykładnik Lévy'ego-Chinczyna oraz na miarę Lévy'ego. Rezultat ten można zastosować dla szerszej klasy procesów, niż omawiane powyżej wyniki z pracy [H2], ale daje on na ogół istotnie mniej dokładne oszacowania. Drugie twierdzenie, [P5, Theorem 2], daje oszacowania dolne dla gęstości procesu przy znajomości dolnego oszacowania jego miary Lévy'ego na kulach. Co ważne, wynik ten ma charakter lokalny. Oszacowania górne dla pochodnych gęstości przejścia zostały uzyskane w [P5, Theorem 3].

Asymptotyka Weyla dla operatorów nielokalnych

Praca [P2] dotyczy pewnych subtelnych własności hamiltonianu opisującego energię jednowymiarowej cząstki quasi-relatywistycznej w nieskończonej studni potencjału. Podstawowym celem badań był opis struktury spektrum operatora $(-h^2c^2d^2/dx^2 + m^2c^4)^{1/2}$ z warunkami Dirichleta położonymi poza ustalonym przedziałem prostej rzeczywistej (tzw. zewnętrzne warunki Dirichleta). Symbol c oznacza tu prędkość światła, m – masę cząstki, a $\hbar$ jest zredukowaną stałą Plancka. Uzyskane wyniki to wzory asymptotyczne typu Weyla dla kolejnych wartości własnych λ_n tego operatora (z których wynika jednokrotność wszystkich wartości własnych), gdy $n \to \infty$, a także jednostajne oszacowania norm L^∞ i L^2 wszystkich funkcji własnych zależne od długości przedziału. W pracy [P7] wyniki te zostały uogólnione na przypadek operatorów postaci $\phi(-\Delta)$, gdzie ϕ jest zupełną funkcją Bernsteina taką, że $\lambda\phi(\lambda) \to \infty$, gdy $\lambda \to \infty$. Metody dowodowe w tych pracach opierają się na nowych technikach zaproponowanych przez Kwaśnickiego [49], które polegają na aproksymacji funkcji własnych rozważanych operatorów przez *uogólnione* funkcje własne.

Literatura

[1] L. Acuña Valverde, R. Bañuelos: *Heat content and small time asymptotics for Schrödinger Operators on $\mathbb{R}^d$*, Potential Analysis 42 (2), 457-482, 2015.

[2] S. Agmon: *Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second-Order Elliptic Equations: Bounds on Eigenfunctions of N-Body Schrödinger Operators*, Princeton University Press, 1983, 2nd ed. 2014.

[3] B. Alziary, P. Takáč: *Intrinsic ultracontractivity of a Schrödinger semigroup in $\mathbb{R}^N$*, J. Funct. Anal. 256, 2009, 4095-4127.

[4] R. Bañuelos: *Intrinsic ultracontractivity and eigenfunction estimates for Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. 100, 1991, 181-206.

[5] R. Bañuelos, B. Davis: *Heat kernel, eigenfunctions, and conditioned Brownian motion in planar domains*, J. Funct. Anal. 84, 1989, 188-200.

[6] J. Bertoin: *Lévy Processes*, Cambridge University Press, 1996.

[7] R.M. Blumenthal, R.K. Getoor: *Markov Processes and Potential Theory*, Springer, 1968.

[8] K. Bogdan, T. Byczkowski: *Potential theory for the α-stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domain*, Studia Math. 133 (1), 1999, 53-92.

[9] K. Bogdan, T. Byczkowski: *Potential theory for Schrödinger operator based on fractional Laplacian*, Probab. Math. Statist. 20, 2000, 293-335.

[10] K. Bogdan, T. Byczkowski, T. Kulczycki, M. Ryznar, R. Song, Z. Vondraček: *Potential Analysis of Stable Processes and its Extensions* (ed. P. Graczyk, A. Stós), Lecture Notes in Mathematics 1980, Springer, 2009.

[11] K. Bogdan, B. Dyda, P. Kim: *Hardy inequalities and non-explosion results for semigroups*, Potential Anal. 44 (2), 2016, 229-247.

[12] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar: *Density and tails of unimodal convolution semigroups*, J. Funct. Anal, 266, 2014, 3543-3571.

[13] K. Bogdan, W. Hansen, T. Jakubowski: *Localization and Schrödinger Perturbations of Kernels*, Potential Anal. 39, 2013, 13-28.

[14] K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki: *Estimates and structure of α-harmonic functions*, Probab. Theory Relat. Fields 140 (3–4), 2008, 345-381.

[15] K. Bogdan, T. Kumagai, M. Kwaśnicki: *Boundary Harnack inequality for Markov processes with jumps*, Trans. Amer. Math. Soc. 367(1), 2015, 477-517.

[16] K. Bogdan, P. Sztonyk: *Estimates of potential kernel and Harnack's inequality for anisotropic fractional Laplacian*, Studia Math. 181 (2), 2007, 101-12.

[17] B. Bötcher, R.L. Schilling, J. Wang, Lévy matters. III. Lévy-type processes: construction, approximation and sample path properties. With a short biography of Paul Lévy by Jean Jacod. LNM, 2099. Lévy Matters. Springer, Cham, 2013.

[18] K. Burdzy, T. Kulczycki: *Stable processes have thorns*, Ann. Probab. 31, 2003, 170-194.

[19] R. Carmona: *Pointwise bounds for Schrödinger eigenstates*, Commun. Math. Phys. 62, 1978, 65-92.

[20] R. Carmona, W.C. Masters, B. Simon: *Relativistic Schrödinger operators: asymptotic behaviour of the eigenfunctions*, J. Funct. Anal. 91, 1990, 117-142.

[21] X. Chen, J. Wang: *Intrinsic contractivity properties of Feynman-Kac semigroups for symmetric jump processes with ifnite range jumps*, J. Front. Math. China 10 (4), 2015, 753-776.

[22] Z.-Q. Chen, P. Kim, T. Kumagai: *Global heat kernel estimates for symmetric jump processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 363, 2011, 5021-5055.

[23] Z.-Q. Chen, R. Song: *Intrinsic ultracontractivity and conditional gauge for symmetric stable processes*, J. Funct. Anal. 150, 1997, 204-239.

[24] Z.-Q. Chen, R. Song: *General gauge and conditional gauge theorems*, Ann. Probab. 30 (3), 2002, 1313-1339.

[25] K.L. Chung, Z. Zhao: *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, Springer, 1995.

[26] B. Davis: *Intrinsic ultracontractivity and the Dirichlet Laplacian*, J. Funct. Anal. 100 (1), 1984, 162-180.

[27] I. Daubechies, E.H. Lieb: *One-electron relativistic molecules with Coulomb interaction*, Commun. Math. Phys. 90, 1983, 497-510.

[28] E.B. Davies, B. Simon: *Ultracontractivity and heat kernels for Schrödingers operators and Dirichlet Laplacians*, J. Funct. Anal. 59, 1984, 335-395.

[29] M. Demuth, J.A. van Casteren: *Stochastic spectral theory for selfadjoint Feller operators. A functional analysis approach*, Probability and its Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[30] C. Fefferman, R. de la Llave: *Relativistic stability of matter (I)*, Rev. Mat. Iberoamericana 2, 1986, 119-213.

[31] R.L. Frank, E.H. Lieb, R. Seiringer, *Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators*, J. Amer. Math. Soc. 21 (4), 2008, 925–950.

[32] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, de Gruyter, Berlin (1994).

[33] P. Garbaczewski: *Relativistic problem of random flights and Nelson's stochastic mechanics*, Phys. Lett. A 164, 1992, 6-16.

[34] P. Garbaczewski: *Lévy flights and Levy-Schrödinger semigroups*, Cent. Eur. J. Phys. 8, 2010, 699-708.

[35] P. Garbaczewski, J.R. Klauder, R. Olkiewicz: *Schrödinger problem, Lévy processes and noise in relativistic quantum mechanics*, Phys. Rev. E 51, 1995, 4114-4131.

[36] T. Grzywny, M. Kwaśnicki: *Potential kernels, probabilities of hitting a ball, harmonic functions and the boundary Harnack inequality for unimodal Lévy processes*, Stoch. Proc. Appl. 128 (1), 2018, 1-38.

[37] I.W. Herbst: *Spectral theory of the operator* $(p^2+m^2)^{1/2} - Ze^2/r$, Comm. Math. Phys. 53 (3), 1977, 285-294.

[38] F. Hiroshima, J. Lőrinczi: *Lieb-Thirring bound for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian*, Commun. Stoch. Anal. 6, 2012, 589-602.

[39] F. Hiroshima, T. Ichinose, J. Lőrinczi: *Path integral representation for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian*, Rev. Math. Phys. 24, 2012, 1250013.

[40] N. Ikeda, S. Watanabe: *On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes*, J. Math. Kyoto Univ. 2-1, 1961, 79-95.

[41] N. Jacob: *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes: Markov Processes and Applications*, vols. 1-3, Imperial College Press, 2003-2005.

[42] P. Kim, R. Song, Z. Vondraček: *Scale invariant boundary Harnack principle at infinity for Feller processes*, Potential Anal. 47 (3), 2017, 337-367.

[43] V. Knopova: *Compound kernel estimates for the transition probability density of a Lévy process in* $\mathbb{R}^n$, Theory Probab. Math. Statist. 89, 2014, 57-70.

[44] V. Knopova, A. Kulik: *Intrinsic small time estimates for distribution densities of Lévy processes*, Random Oper. Stoch. Equ. 21, 2013, 321-344.

[45] V. Knopova, R. Schilling: *Transition density estimates for a class of Lévy and Lévy-type processes*, J. Theoret. Probab. 25, 2012, 144-170.

[46] T. Kulczycki: *Gradient estimates of q-harmonic functions of fractional Schrödinger operator*, Potential Anal. 39 (2013), no. 1, 69-98.

[47] T. Kulczycki, B. Siudeja: *Intrinsic ultracontractivity of the Feynman–Kac semigroup for relativistic stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 358, 2006, 5025-5057.

[48] M. Kwaśnicki: *Intrinsic ultracontractivity for stable semigroups on unbounded open sets*, Potential Anal. 31, 2009, 57-77.

[49] M. Kwaśnicki: *Spectral analysis of subordinate Brownian motions in half-line*, Studia Math. 206 (3), 2011, 211-271.

[50] E.H. Lieb, R. Seiringer: *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2009.

[51] E.H. Lieb, H.-T. Yau, *The stability and instability of relativistic matter*, Comm. Math. Phys. 118 (2), 1988, 177-213.

[52] J. Lőrinczi, J. Małecki: *Spectral properties of the massless relativistic harmonic oscillator*, J. Diff. Equations 253, 2012, 2846-2871.

[53] A. Mimica: *Heat kernel estimates for subordinate Brownian motions*, Proc. Lond. Math. Soc. 113, 2016, 627-648.

[54] E. Nelson: *A quartic interaction in two dimensions*, in: Mathematical Theory of Elementary Particles, R. Goodman, I. Segal (eds.), MIT Press, 1966, pp. 69-73

[55] E. Nelson: *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1967.

[56] K. Pietruska-Pałuba: *The Lifschitz singularity for the density of states on the Sierpiński gasket*, Probab. Theory Related Fields 89 (1), 1991, 1-133.

[57] N. Privault, J.-C. Zambrini: *Markovian bridges and reversible diffusion processes with jumps*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 40, 2004, 599-633.

[58] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 4*, Academic Press, 1980.

[59] J. Rosen, B. Simon, *Fluctuations in $P(\phi)_1$ processes*, Ann. Probab. (4) (2) (1976), 155-174.

[60] M. Ryznar: *Estimates of Green function for relativistic α-stable process*, Potential Anal. 17, 2002, 1-23.

[61] K.I. Sato: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge Univ. Press, 1999.

[62] R.L. Schilling, Z. Vondraček, Absolute continuity and singularity of probability measures induced by a purely discontinuous Girsanov transform of a stable process, Trans. Amer. Math. Soc. 369, 2017, 1547-1577.

[63] R.L. Schilling: *Growth and Hölder conditions for the sample paths of Feller processes*, Probab. Theory Relat. Fields 112, 1998, 565-611.

[64] K. Schmüdgen: *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics 265, Springer 2012.

[65] B. Simon: *Schrödinger semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. 7, 1982, 447-526.

[66] B. Simon: *Functional Integration and Quantum Physics*, AMS Chelsea Publishing, 2004.

[67] B. Simon: *Exponential Decay of Quantum Wave Functions*, nieopublikowany artykuł przeglądowy, http://math.caltech.edu/simon/Selecta/ExponentialDecay.pdf

[68] P. Sztonyk, *Transition density estimates for jump Lévy processes,* Stochastic Process. Appl. 121, 2011, 1245-1265.

[69] M. Takeda, M. Wada: *Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes*, Math. Nachr. 289 (16), 2016, 2069-2082.

[70] R.A. Weder: *Spectral properties of one-body relativistic spin-zero Hamiltonians*, Ann. IHP A20(2), 1977, 211-220.

Kamil Kaleta