AUTOREFERAT

Zbigniew A. Łagodowski

Katedra Matematyki
Wydział Elektrotechniki i Informatyki
Politechnika Lubelska

Spis treści

I Stopnie naukowe i tytuły zawodowe

1987 doktor nauk matematycznych, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Marii-Curie Skłodowskiej w Lublinie
Promotor: prof. zw. dr hab. Zdzisław Rychlik
Tytuł rozprawy: *Własności graniczne ciągów zmiennych losowych z wielowymiarowymi indeksami*

1979 magister inżynier matematyki stosowanej, kierunek: Podstawowe Problemy Techniki, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Promotor: prof. zw. dr hab. Kazimierz Szpunar
Tytuł pracy: *Stabilność stochastyczna systemów dyskretnych*

II Przebieg pracy zawodowej

2013– starszy wykładowca w Katedrze Matematyki na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej

1992–2013 adiunkt w Katedrze Matematyki na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej

1987–1991 adiunkt w Zakładzie Budowy Maszyn Rolniczych na Wydziale Techniki Rolniczej Akademii Rolniczej w Lublinie

1982–1987 asystent w Zakładzie Budowy Maszyn Rolniczych na Wydziale Techniki Rolniczej Akademii Rolniczej w Lublinie

1979–1981 asystent stażysta i asystent w Instytucie Matematyki Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

III Lista artykułów stanowiących osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki

[H1] On the necessary condition for Baum-Katz type theorem for non-identically distributed and negatively dependent random fields, *Ann. Univ. Maria Curie-Skłodowska Sect. A,* **72** (2018), 1–8.

[H2] An approach to complete convergence theorems for dependent random fields via application of Fuk–Nagaev inequality, *J. Math. Anal. Appl.* **437** (2016), 380–395.

[H3] Convergence rates in the SLLN for some classes of dependent random fields, *J. Math. Anal. Appl.* **380** (2011), 571–584. (Współautor: A. Kuczmaszewska).

[H4] On almost sure limiting behavior of weighted sum of random fields, *Acta Math. Hung.* **126** (2010), 16–22. (Współautor: P. Matuła).

[H5] SLLN for random fields under conditions on the bivariate dependence structure, *Publ. Math. Debrecen*, **76** (2010), 329–339. (Współautor: P. Matuła).

[H6] Strong laws of large numbers for $\mathbb{B}$-valued random fields, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, doi:10.1155/2009/485412 (2009), 12 p.

IV Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego zatytułowanego

WYBRANE METODY BADANIA PRAWIE PEWNEJ I KOMPLETNEJ ZBIEŻNOŚCI PÓL LOSOWYCH

1 Wstęp i motywacje badań

1.1 Motywacje badań

We wstępie do fundamentalnej monografii [104] John B. Walsh napisał, że badania pól losowych same w sobie są bardzo interesujące. Można jednak wskazać wiele powodów, nie tylko czysto matematycznych, które uzasadniają potrzebę badania praw dotyczących zmiennych losowych z multi-parametrowym indeksem. Natura zjawisk przyrodniczych, które chcemy opisywać, ma bowiem najczęściej charakter wielowymiarowy. Pola losowe pojawiają się w analizie danych biologicznych i medycznych, w fizyce i mechanice statystycznej oraz geofizyce, a w szczególności w sejsmografii i astrofizyce. Przykłady takich badań znajdziemy chociażby w publikacjach: [2], [18], [19], [20], [103], [109], [110] i [111], by wymienić tylko prace szczególnie interesujące, z zakresu obrazowania powierzchni mózgu i jego funkcjonowania.

Przykładów z innych dziedzin można jednak podać znacznie więcej. W statystyce zbieżność zmiennych losowych z wielowymiarowym indeksem stanowi podstawę do konstrukcji szeregu testów nieparametrycznych, na przykład testu Manna-Whitney'a-Wilcoxona, testu serii Walda-Wolfowitza i nieparametrycznej analizy wariancji – testu Kruskala-Wallisa. Badana prawie pewna lub kompletna zbieżność pól losowych znajduje zastosowanie w prawie pewnej zbieżności wielopróbkowych U-statystyk, w modelach regresji nieparametrycznej oraz w modelach liniowych typu EV (*Errors-in-Variables*), w których błędy są od siebie wzajemnie zależne (por. [43], [114]).

1.2 Rys historyczny

Wydaje się, że jako pierwszy problemem zbieżności rodzin zmiennych losowych z wielowymiarowymi indeksami zajmował się Norbert Wiener, który w roku 1939, w pracy „The ergodic theorem” [106], badał zbieżność sum funkcji mierzalnych, zależnych od d parametrów. Mówiąc dokładniej, rozważał on mierzalne odwzorowanie T na przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ zachowujące miarę μ oraz badał własności graniczne sum postaci

$$S_m[f] = \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \cdots \sum_{k_d=1}^{m} f \circ T^{k_1+k_2+\cdots+k_d}.$$

Dowiódł, że dla $d \geq 1$ i $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ granica

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m[f]}{m^d} \tag{1.1}$$

istnieje dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ względem μ. Ze względu na to, że rozważane przez Wienera sumy częściowe miały tę własność, iż każda z nich zawierała wszystkie poprzednie, warunki zbieżności okazały się takie same jak w przypadku klasycznej teorii ergodycznej. Kilkanaście lat później, niezależnie od siebie, Dunford w [35] i Zygmund w [116] nadali temu problemowi prawdziwie wielowymiarowy sens, przyjmując

$$S_{\mathbf{n}}[f] = \sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} f \circ T^{k_1+k_2+\cdots+k_d} \quad \text{dla} \quad \mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}^d, \tag{1.2}$$

gdzie $\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}$ oznacza, że $k_i \leq n_i$ dla każdego i ze zbioru $\{1, 2, \ldots, d\}$; te sumy nie mają już wspomnianej wyżej własności i problemu ich zbieżności nie da się sprowadzić do problemu zbieżności sum „zwykłych”. Dunford i Zygmund udowodnili, że granica

$$\lim_{\min \mathbf{n}\to\infty} \frac{S_{\mathbf{n}}[f]}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d} \tag{1.3}$$

($\min \mathbf{n}$ jest najmniejszą ze współrzędnych wektora $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$) istnieje prawie wszędzie względem miary μ, o ile funkcja f spełnia warunek

$$\int\limits_{\Omega} |f(\omega)| \left(\log^+ |f(\omega)|\right)^{d-1} d\mu < \infty, \tag{1.4}$$

gdzie $\log^+ x = \max(0, \log x)$. W szczególnym przypadku, gdy μ jest miarą probabilistyczną, a rolę f odgrywa zmienna losowa X, dla której istnieje moment

$$\mathbb{E}|X| \left(\log^+ |X|\right)^{d-1} < \infty \tag{1.5}$$

z wyniku Wienera, Dunforda i Zygmunda otrzymujemy mocne prawo wielkich liczb (MPWL) dla słabo stacjonarnego pola losowego $X_{\mathbf{k}} = T^{k_1+k_2+,\ldots,+k_d} \circ X$, mówiące o istnieniu prawie pewnej granicy

$$\lim_{\min \mathbf{n} \to \infty} \frac{\sum\limits_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{n}|} = \mathbb{E}X. \tag{1.6}$$

Jak wykazał Smythe w pracy [98], w przypadku pól niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie warunek (1.5) jest również konieczny, by zachodziło mocne prawo wielkich liczb (1.6).

Kolejny ważny krok wykonał Klaus Krickeberg, gdy w połowie lat pięćdziesiątych zaczął badać zbieżność przeliczalnie addytywnych funkcji zbioru, które w istocie są martyngałami indeksowanymi zbiorami skierowanymi. Dla ścisłości należy dodać, że Krickeberga chronologicznie wyprzedził Bochner, który w pracy [11] wprowadził pojęcie takiego martyngału.

Znaczący postęp w badaniu zbieżności niezależnych zmiennych losowych i martyngałów indeksowanych zbiorami z częściowym porządkiem zanotowano w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku, a więc 30 lat po wspomnianej pracy Wienera. Na początku lat osiemdziesiątych rozpoczęły się też badania nad innymi rodzajami zależności zmiennych losowych z wielowymiarowymi indeksami i ich własnościami granicznymi. Autorami najważniejszych prac są: Wichura [105], Cairoli [16], Walsh [104], Chatterji [21] i [22], Smythe, Shorack [98] i [97], Millet, Sucheston [85] i [86], Wong, Zakai, [107], [113] i [108], Merzbach [80], [81] i [82], Gut [48], [50] i [49], Klesov [62], [63], [64] i [65]. Badania te trwają do dziś.

1.3 Specyfika badań pól losowych

Tryby rozbieżności multiindeksu

Twierdzenia graniczne dotyczące pól losowych, to znaczy rodzin zmiennych losowych indeksowanych elementami $\mathbb{N}^d$, oznaczanych zwykle

$$\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\},$$

można rozróżniać w zależności od *trybu*, w jakim indeks $\mathbf{n}$ dąży do nieskończoności oraz reguły wyboru „wierzchołka prostokąta” wyznaczającego sumy częściowe $S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$. Dla przykładu wszystkie „wierzchołki” $\mathbf{n}$, w sumach które rozważał Wiener, leżały na „przekątnej” (na której wszystkie współrzędne indeksu są takie same); taki szczególny wybór sum sprawił, że uzyskane przez niego twierdzenia udowodnić można było metodami używanymi dla ciągów zmiennych losowych. Tryb zbieżności, który rozważali Dunford i Zygmund, wymagał już nowych narzędzi; przypomnijmy (zob. (1.3)), że w ich pracach indeksy $\mathbf{n}$, sum częściowych $S_{\mathbf{n}}$, były dowolne i dążyły do nieskończoności w tym sensie, że do nieskończoności dąży $\min \mathbf{n}$ (*mode of* min-*convergence*); jest to tryb najczęściej występujący w literaturze do dzisiaj. Taką zbieżność będziemy nazywać zbieżnością w trybie-min .

Drugi najczęściej stosowany tryb zbieżności to zbieżność, gdy $\max \mathbf{n}$ (największa ze współrzędnych wektora $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$) dąży do nieskończoności, będziemy ją nazywać zbieżnością w trybie-max (*mode of* max-*convergence*). Taki tryb zbieżności występuje we wszystkich prezentowanych wynikach niniejszego autoreferatu; jest on oczywiście mocniejszy od zbieżności w trybie-min . W niektórych pracach zbieżność w trybie-max nazywana jest zbieżnością mocną, w odróżnieniu od najczęściej stosowanej, uznawanej za standard, zbieżności w trybie-min i oznaczanej $\mathbf{n} \to \infty$ (raczej już historycznie, ale czasami nazywana też „convergence in Pringsheim's sense”, por. [87]). My przyjmujemy konwencję wprowadzoną przez Klesova w jego monografii [67] i będziemy stosować oznaczenia: lim(max) dla trybu-max i lim(min) dla trybu-min . Możliwe są oczywiście inne definicje trybu zbieżności, ale praktycznie nie są one w ogóle rozważane.

Zajmujemy się również bardzo ważnym typem zbieżności, który nie ma cech żadnego *trybu* zbieżności. Mianowicie, badamy graniczne zachowanie tylko tych sum częściowych $S_{\mathbf{n}}$, których indeksy $\mathbf{n}$ należą do nieskończonego zbioru $A \subset \mathbb{N}^d$. Taki typ zbieżności będziemy nazywać zbieżnością sektorialną. Ma ona tę interesującą cechę, że dla mocnych praw wielkich liczb wystarczą klasyczne założenia, takie jak w przypadku jednowymiarowym, mimo iż możemy tak wybrać podzbiór A, że „dosyć szczelnie wypełni” przestrzeń $\mathbb{N}^d$. Ten typ zbieżności będzie dokładniej omawiany w rozdziale piątym.

Rodzaje zbieżności

Jak wiadomo, pewne rodzaje zbieżności zmiennych losowych, w tym zbieżność słabą i według prawdopodobieństwa, można zmetryzować, a innych, takich jak zbieżność prawie pewna i kompletna – nie. W teorii pól losowych zdecydowanie większe wyzwanie stanowią twierdzenia dotyczące tej drugiej klasy rodzajów zbieżności, dla których nie możemy stosować następującego dobrze znanego lematu, podającego warunek wystarczający dla zbieżności ciągów uogólnionych.

Lemat 1.1. ([90], lemat V-1-1) *Niech T będzie zbiorem skierowanym. Ciąg uogólniony $\{x_t, t \in T\}$, elementów przestrzeni metrycznej zupełnej S, zbiega do $x \in S$, jeśli dla dowolnego rosnącego ciągu $\{\mathbf{t}_n, n \in \mathbb{N}\}$, elementów T, ciąg $\{x_{t_n}, n \in \mathbb{N}\}$ jest zbieżny do x.*

Jeżeli ograniczymy się do przypadku, który jest przedmiotem naszych rozważań, to znaczy, gdy $T = \mathbb{N}^d$; wówczas dla obu trybów: -max i -min, możemy podać warunki konieczne i wystarczające dla zbieżności elementów dowolnej przestrzeni metrycznej (por. [H1], lemat 2.2 lub [67], wniosek A.1 i A.2). Dzięki temu, niektóre zagadnienia dotyczące zbieżności pól losowych dla zbieżności metryzowalnych można, poprzez redukcję wymiaru, sprowadzić do badania zbieżności podpól (*subfields*) lub ciągów, a potem użyć standardowych narzędzi.

Drogą tą nie można jednak pójść w przypadku dowodzenia twierdzeń o zbieżności prawie pewnej czy kompletnej: przypadek ten wymaga nowych narzędzi, nowych metod i – ze względu na to, że pola losowe są bardziej złożone niż ciągi – dodatkowych założeń. W niniejszym autoreferacie będziemy zajmować się wyłącznie zbieżnościami niemetryzowalnymi: prawie pewną i kompletną. Należy jednak podkreślić, że pewne problemy są wspólne dla obu rodzajów zbieżności; wynika to na przykład z faktu, że zbieżności w trybie-max i -min nie są równoważne, pola liczbowe będące rodzinami normującymi lub wagami różnych rodzajów zbieżności, na ogół nie są prostym uogólnieniem ciągów.

Problemy zbieżności pól ze strukturą martyngałową

Nowoczesna teoria procesów stochastycznych opiera się na teorii martyngałów, która w ostatnich dziesięcioleciach została rozwinięta w takim stopniu, że stała się niezwykle ważnym narzędziem badawczym.

Zacznijmy od definicji. Załóżmy, że rodzina σ-ciał $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest filtracją na przestrzeni $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, to znaczy, że spełniony jest warunek

(F1) jeśli $\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}$ to $\mathfrak{F}_{\mathbf{k}} \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{n}} \subset \mathfrak{F}$.

(W literaturze warunek ten standardowo-historycznie oznaczany jest (F1), tak jak wyżej, podobnie (F2) i (F4), por. [17], str. 113; będziemy się tej konwencji trzymać). Całkowalną rodzinę zmiennych losowych $\{Z_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ adaptowaną do filtracji $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nazywamy polem losowym o strukturze martyngałowej (lub po prostu martyngałem), jeśli

$$\bigwedge_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}\big(Z_{\mathbf{n}} | \mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\big) = Z_{\mathbf{k}} \quad \text{p.p.}$$

Analogicznie definiujemy pojęcia nad- i podmartyngału.

Niestety okazuje się, że tak zdefiniowane martyngały o indeksach wielowymiarowych znacznie różnią się od tych klasycznych. Od strony technicznej próby dowodzenia ich własności rozbijają się często o brak narzędzia, którym są momenty Markowa, a w szczególności momenty wejścia do danego zbioru po raz pierwszy – ze względu na to, że zbiór indeksów $\mathbb{N}^d$ nie jest uporządkowany liniowo, „czas pierwszego wejścia” nie jest dobrze zdefiniowany. Ale ten brak jest skutkiem czegoś bardziej fundamentalnego: martyngałowe pola losowe są znacznie mniej regularne niż ich klasyczne odpowiedniki (martyngały indeksowane liczbami naturalnymi). Dowodzi tego chociażby przykład, który skonstruował Cairoli (zob. [16]), pokazujący, że odpowiednik klasycznej nierówności Dooba

$$\mathbb{P}(\max_{k \le n} |M_k| \ge \lambda) \le \lambda \mathbb{E}|M_n|,$$

gdzie $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ jest martyngałem z naturalną filtracją, dla pól martyngałowych nie jest prawdziwy.

Dubins i Pitman w 1980 roku (zob. [34]) skonstruowali ponadto kontrprzykład dowodzący, że dla tak zdefiniowanych martyngałów nie zachodzi odpowiednik twierdzenia, mówiącego, że warunek $\sup_{n \ge 1} \mathbb{E}\,|M_n| < \infty$ pociąga za sobą istnienie prawie pewnej granicy $(M_n)_{n \ge 1}$. Wcześniej analogiczny przykład dla martyngału indeksowanego zbiorem skierowanym podał Dieudonné [32]. Krickeberg pokazał w pracy [69], że do tego, by każdy ograniczony martyngał indeksowany zbiorem skierowanym był zbieżny (ale tylko w sensie zbieżności istotnej), konieczne jest by rozważana filtracja spełniała tak zwany topologiczny warunek Vitaliego.

Bardzo interesujące wyniki dotyczące charakteryzacji istotnej zbieżności martyngałów należą do Millet, Suchestona [85], [86] i Astbury'ego [6], którzy podali warunki konieczne i wystarczające dla tej zbieżności, w języku klasycznych momentów stopu i wielowartościowych momentów zatrzymania. Twierdzenia te korespondują z teorią Burkholdera [15] i Chatterji [21], [22], łączącą prawie pewną zbieżność z prawie pewnymi nierównościami maksymalnymi dla martyngałów z czasem dyskretnym. Podsumowanie tych wyników można znaleźć w monografii Edgara i Suchestona [36].

W przypadku martyngałów indeksowanych przez elementy przestrzeni $\mathbb{N}^d$, satysfakcjonującą teorię budować można dopiero przy założeniu warunkowej niezależności filtracji (CI, *conditional independence*), którą można zdefiniować następująco (por. [61], str. 35):

(F4) $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{F}_{\mathbf{m}})|\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}\right) = \mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{F}_{\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}})$ p.p.,

gdzie $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n} := (m_1 \wedge n_1, \ldots, m_d \wedge n_d)$. Dodajmy jeszcze, że sumy częściowe niezależnych zmiennych losowych z wielowymiarowym indeksem tworzą strukturą martyngałową względem naturalnej filtracji, która w tym przypadku spełnia warunek (F4).

1.4 Krótkie omówienie osiągniętych wyników

Moim wkładem w teorię rachunku prawdopodobieństwa są twierdzenia o granicznym zachowaniu pól losowych o następujących strukturach:

- niezależności (zmiennych losowych i elementów losowych),
- ujemnego stowarzyszenia (NA, *negative association*),
- ujemnej zależności (ND, *negative dependence*),
- asymptotycznej, parami ujemnej zależności (APND, *asymptotic pairwise negative dependence*),
- martyngałowej.

Najwięcej wyników dotyczy tej ostatniej struktury; wszystkie zostały otrzymane dla zbieżności w trybie-max, zachowując przy tym założenia momentowe takie jak dla zbieżności pól losowych w trybie-min . Przejdźmy teraz do bardziej szczegółowej prezentacji wyników.

W rozdziale drugim przedstawiamy nierówności Burkholdera i Rosenthala dla pól losowych o strukturze martyngałowej i ujemnego stowarzyszenia. Zastosowanie tych nierówności pozwoliło otrzymać twierdzenia Bauma-Katza dla pól losowych o strukturze ujemnego stowarzyszenia i martyngałowej, charakteryzujących szybkość zbieżności w prawach wielkich liczb typu Marcinkiewicza postaci

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d)^\alpha} = \frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^\alpha} \to 0 \ \text{ p.p., } \ \text{gdy} \quad \max \mathbf{n} \to \infty,$$

gdzie $|\mathbf{n}| := n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d$.

W rozdziale trzecim przedstawiamy metody dowodzenia zbieżności kompletnej opartej na nierównościach typu Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena. Nierówność ta nie ma odpowiednika dla ciągów zależnych zmiennych losowych, tym bardziej dla pól losowych ze strukturą zależności. Dowiedziona przez nas, dla niektórych pól losowych ze strukturą zależności, słabsza nierówność Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena w dalszym ciągu jest użyteczna do badania zbieżności prawie pewnej i kompletnej. Wynikiem, który pozwala zrealizować ten pomysł są nierówności Fuka-Nagaeva, my dowodzimy je dla pól losowych o strukturach: ujemnej zależności i martyngałowej. Dzięki tym wynikom otrzymujemy nierówności typu Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena dla pól losowych ze strukturami zależności wymienionymi powyżej. To z kolei pozwoliło otrzymać twierdzenia Bauma-Katza charakteryzujące szybkość zbieżności w prawach wielkich liczb typu Marcinkiewicza postaci

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot n_d^{\alpha_d}} \to 0 \ \text{ p.p., } \ \text{gdy} \quad \max \mathbf{n} \to \infty.$$

W rozdziale tym proponujemy również ogólną metodę dowodu twierdzeń typu Bauma-Katza, dla pól losowych z dowolną strukturą zależności.

Aby umiejscowić wyniki rozdziału drugiego i trzeciego, porównajmy je z istniejącą literaturą w tym zakresie. Smythe, Shorack, Gut i Klesov są autorami większości wyników dotyczących prawie pewnej zbieżności pól losowych; ale niemal wszystkie, uzyskane zostały przy założeniu: jednakowego rozkładu, struktury niezależności i metod dowodowych, nieprzenoszących się na pola losowe ze strukturą zależności i złożone ze zmiennych losowych o różnych rozkładach. Twierdzenia typu Bauma-Katza były w zasadzie wyłącznie rozwijane przez Guta i Klesova oraz ich współpracowników, Peligrad i Stadtmüllera. Najogólniejszymi wynikami były twierdzenia zawarte w pracach: [53], [92] i [67], podrozdział 13.5. My rozszerzamy cytowane wyniki na pola losowe o różnych strukturach zależności i niekoniecznie jednakowym rozkładzie. W ten sposób przyczyniamy się do powstania spójnej i zdecydowanie bardziej kompletnej rodziny twierdzeń typu Bauma-Katza dla pól losowych.

Rozdział czwarty poświęcony jest w głównej mierze przedstawieniu niektórych technik dowodowych w sytuacji braku nierówności Dooba dla pól losowych o strukturze martyngałowej. Częściowe rozwiązanie problemu osiągamy poprzez uogólnienie quasi-nierówności Hajeka-Réni'ego-Chowa, dowiedzionej przez Serflinga i Christofidesa w pracy [23] (por. tw. 2.1, str. 633). Utrzymując założenia, wcześniej cytowanego twierdzenia Serflinga i Christofidesa (tw. S-C), zmodyfikowaliśmy zdarzenie, którego prawdopodobieństwo szacujemy, przez co uzyskaliśmy narzędzie do badania prawie pewnej zbieżności pól losowych w trybie-max (tw. S-C pozwala tylko na badanie zbieżności w trybie-min). Rozszerzenie nierówności Hajeka-Réni'ego-Chowa-Serflinga - Christofidesa do pól losowych o strukturze submartyngału umożliwiło jej stosowanie do prawie pewnej zbieżności pól losowych o wartościach w przestrzeni Banacha.

W drugiej części tego rozdziału przedstawiamy nierówność Marcinkiewicza dla pól elementów losowych. Wynik ten pozwolił na otrzymanie MPWL typu Brunka-Prokhorova dla elementów losowych przyjmujących wartości w przestrzeni Banacha.

W rozdziale piątym, opartym na wynikach pracy [H4], uogólniamy bardzo interesujące ważone mocne prawo wielkich liczb, otrzymane przez Jajtego w pracy [58]. Ze względu na dużą dowolność wyboru funkcji wagowej i normującej, wynik może być postrzegany jako prawie pewna zbieżność (h, g) transformat pól losowych lub metoda (h, g) ich sumowalności. Zawarte są tam metody sumowalności takie jak: średnie Cesàro $(C, 1)$, średnie logarytmiczne, transformacje typu mocnego prawa wielkich liczb Marcinkiewicza i inne wyniki tego typu.

W drugiej części tego rozdziału dowodzimy MPWL Kołmogorowa, dla pól losowych ze strukturą zależności określoną w parach, zdefiniowaną w oparciu o pojęcie kopuły. Tak zdefiniowana struktura zawiera w sobie pola losowe (ciągi zmiennych losowych) parami ujemnie (kwadrantowo) zależne (w szczególności parami niezależne), jak również struktury określone kopułami Farlie-Gumbela-Morgersterna, Ali-Mikhaila-Haqa i rodziną kopuł Placketta. Rozważane pola losowe są powiązane z polami zmiennych losowych asymptotycznie kwadrantowo niezależnych i asymptotycznie kwadrantowo subniezależnych. W tym rozdziale podajemy również, udowodnioną w pracy [H4], brakującą wersję drugiego lematu Borela-Cantelli'ego, dla zdarzeń parami zależnych, o strukturze zależności powyżej rozważanego pola losowego; wynik niezbędny w dowodzie wymienionych mocnych praw wielkich liczb.

Wszystkie wyniki tego rozdziału zostały otrzymane dla zbieżności w trybie-max i równolegle dla zbieżności sektorialnej.

2 Nierówności maksymalne dla momentów i twierdzenia typu Bauma-Katza

Niniejszy rozdział poświęcamy udowodnionym w pracy [H3] nierównościom typu Rosenthala i Burkholdera dla pól losowych o różnych strukturach zależności oraz otrzymanym za ich pomocą twierdzeniom typu Bauma-Katza, które podają informację o szybkości zbieżności w prawach wielkich liczb typu Marcinkiewicza-Zygmunda, jak również o zbieżności kompletnej w tych prawach.

2.1 Wyniki dla pól losowych ze strukturą ujemnego stowarzyszenia

Zacznijmy od przypomnienia podstawowej definicji i pomocniczych oznaczeń. Niech $(\mathbf{n}) := \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d : \ \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}\}$.

Definicja 2.1. *Skończona rodzina zmiennych losowych* $\{X_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in (\mathbf{n})\}$ *ma strukturę ujemnego stowarzyszania, jeśli dla każdych dwóch rozłącznych, niepustych podzbiorów* S, T *zbioru* $(\mathbf{n})$ *oraz dowolnych funkcji* f *i* g,

$$f\colon \mathbb{R}^{|S\ |} \to \mathbb{R}, \qquad g\colon \mathbb{R}^{|T|} \to \mathbb{R},$$

które nie maleją względem żadnej ze swoich współrzędnych, zachodzi nierówność

$$\mathbf{cov}(f(X_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in S), g(X_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in T)) \leq 0,$$

o ile tylko występująca w tym wzorze kowariancja jest skończona.

O polu losowym $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ mówimy, że ma strukturę ujemnego stowarzyszenia, jeśli dla każdego $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, podrodziny $\{X_{\mathbf{k}}, \ \mathbf{k} \in (\mathbf{n})\}$ mają strukturę ujemnego stowarzyszenia.

Zmienne losowe ujemnie stowarzyszone pojawiają się naturalnie na przykład jako wyniki losowania bez zwracania ze skończonej populacji. Wiele znanych rozkładów wielowymiarowych, w tym: wielowymiarowy rozkład hipergeometryczny, ujemnie skorelowany rozkład normalny, rozkład wielomianowy i wielowymiarowy rozkład Dirichleta, opisują rodziny ujemnie stowarzyszonych zmiennych losowych (por. Joag-Dev i Proschan [60]).

Jednym z podstawowych narzędzi, które pozwala dowodzić twierdzeń granicznych typu Bauma-Katza, są nierówności Rosenthala. Poniższy lemat jest wersją wyniku Zhanga i Wena (por. [115], lemat A.2) przekształconą do postaci o cechach wyżej wymienionej nierówności.

Lemat 2.2. ([H3], lemat 2.1) *Dla każdego $q \geq 2$ istnieje uniwersalna stała $C = C(q)$ o tej własności, że dla każdego pola losowego $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ złożonego ze zmiennych losowych ujemnie stowarzyszonych, spełniających warunki*

$$\mathbb{E}X_{\mathbf{n}} = 0 \quad i \quad \mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^q < \infty, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d,$$

zachodzą nierówności

$$\mathbb{E}\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\big|S_{\mathbf{k}}\big|^q \leq C\left\{\Big(\log_2|\mathbf{n}|\Big)^{qd}\Big(\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}X_{\mathbf{k}}^2\Big)^{q/2} + \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}|X_{\mathbf{k}}|^q\right\}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Jak za chwilę zobaczymy, lemat ten pozwala uzupełnić twierdzenie udowodnione w pracy Peligrad i Guta [92], poświęcone przypadkowi pól losowych o jednakowym rozkładzie i strukturze ρ^*-mieszania. My osłabiamy założenie o jednakowych rozkładach i badamy również pola losowe ze strukturą ujemnego stowarzyszenia. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.3. ([H3], tw. 2.1) *Niech $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem losowym o strukturze ujemnego stowarzyszenia. Załóżmy ponadto, że dla pewnych stałych α, p i q takich, że*

$$\alpha p > 1, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad q \geq 2$$

spełnione są warunki

(i) $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha p-2}\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{P}[|X_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}|^\alpha] < \infty,$

(ii) $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha(p-q)-2}\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(|X_{\mathbf{k}}|^q\mathbb{I}[|X_{\mathbf{k}}| \leq |\mathbf{n}|^\alpha]\big) < \infty,$

(iii) $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha(p-q)-2}\big(\log_2|\mathbf{n}|\big)^{qr}\Big(\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(X_{\mathbf{k}}^2\mathbb{I}[|X_{\mathbf{k}}| \leq |\mathbf{n}|^\alpha]\big)\Big)^{q/2} < \infty,$

(iv) $\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big|\sum_{\mathbf{i}\preceq\mathbf{k}}\mathbb{E}\big(X_{\mathbf{i}}\mathbb{I}[|X_{\mathbf{i}}| \leq |\mathbf{n}|^\alpha]\big)\Big| = o(|\mathbf{n}|^\alpha).$

Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ spełniona jest nierówność

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha p-2}\mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}|S_{\mathbf{k}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|^\alpha\right) < \infty. \tag{2.1}$$

Wyniki tego typu znane są w literaturze jako twierdzenia Bauma-Katza, czasami też nazywane twierdzeniem Hsu-Robbinsa-Erdősa-Spitzera-Bauma--Katza. Potęga o wykładniku $\alpha p-2$ widoczna w szeregu występującym w tezie, wobec informacji o jego zbieżności, pozwala oszacować wielkość prawdopodobieństw $\mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{j}\preceq\mathbf{n}}|S_{\mathbf{j}}|>\varepsilon|\mathbf{n}|^{\alpha}\right)$ dla „dużych" $|\mathbf{n}|$.

Założenia poprzedniego twierdzenia są dość skomplikowane. By je zilustrować, w pracy [H3], wzorując się na znanym w literaturze pojęciu słabego średniego zdominowania, wprowadziliśmy klasę pól słabo średnio ograniczonych. W klasie tej, jak się okazuje, z twierdzenia 2.3 można wywnioskować znacznie prostszy warunek konieczny i dostateczny dla zbieżności takiej jak w (2.1). Zacznijmy jednak od wspomnianej definicji.

Definicja 2.4. ([H3], def. 1.4) *Pole losowe* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ *jest słabo średnio ograniczone (WMB, weakly mean bounded) przez zmienną losową* ξ*, jeśli istnieją takie stałe* $\kappa_1,\kappa_2>0$*, że dla wszystkich* $x>0$ *i* $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$

$$\kappa_2\mathbb{P}(|\xi|>x)\leq\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{P}(|X_{\mathbf{k}}|>x)\leq\kappa_1\mathbb{P}(|\xi|>x).$$

Jeśli spełniona jest tylko prawa nierówność, mówimy, że pole losowe jest słabo średnio zdominowane (WMD, weakly mean dominated).

Zwróćmy uwagę na fakt, że każde pole losowe złożone ze zmiennych o jednakowych rozkładach jest słabo średnio ograniczone (w przypadku tym nierówności z definicji zamieniają się na równości ze stałymi $\kappa_1=\kappa_2=1$). W klasie pól WMB zawarta jest również znacznie obszerniejsza klasa, zmiennych losowych spełniających warunek równomiernego pokrycia (RC, *regular cover*), wprowadzony przez Prussa w pracy [93] lub jego mniej restrykcyjną wersję, na przykład stosowaną w pracy [71] (por. tw. 2.1). Skoro zmienne niezależne są ujemnie stowarzyszone, następujące twierdzenie jest istotnym uogólnieniem wyniku Guta (zob. [49], tw. 3.1), który zajmował się przypadkiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie.

Twierdzenie 2.5. ([H3], tw. 2.2) *Niech* α *i* p *będą takimi stałymi, że* $\alpha p>1$ *i* $\alpha>\frac{1}{2}$*, a* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ *będzie polem ujemnie stowarzyszonych zmiennych losowych, słabo średnio ograniczonym przez zmienną losową* ξ*. Jeśli* $p\geq 1$*, zakładamy, że* $\mathbb{E}X_{\mathbf{n}}=0$*, dla każdego* $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$*. Przy tych założeniach, następujące warunki są równoważne:*

(A) $\mathbb{E}|\xi|^p\left(\log^+|\xi|\right)^{d-1}<\infty$;

(B) $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}|\mathbf{n}|^{\alpha p-2}\mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}|S_{\mathbf{k}}|>\varepsilon|\mathbf{n}|^{\alpha}\right)<\infty.$

Dodajmy, że w pracy [H3], dla pól losowych o strukturze ρ^*-mieszania otrzymujemy wyniki o postaci powyżej sformułowanych twierdzeń 2.3 i 2.5, uogólniające twierdzenia 2 i 5 z pracy Peligrad i Guta [92] na przypadek pól zmiennych losowych o niejednakowych rozkładach.

2.2 Pola ze strukturą martyngałową

W tym podrozdziale chcielibyśmy pokazać, że tezę typu (2.1) można także uzyskać dla pól ze strukturą martyngałową. Zaczniemy od lematu, który jest rodzajem nierówności Burkholdera. Obok nierówności Dooba (dla momentów rzędu $p > 1$) oraz Hájeka-Rényi'ego, jest to jedna z nielicznych nierówności maksymalnych, posiadających swoje odpowiedniki dla wspomnianych wyżej pól. Ze względu na to, że w jej sformułowaniu pojawia się pojęcie pola przyrostów, przypomnijmy (zob. [H3], str. 580), iż dla dowolnego pola $\{Z_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ istnieje takie pole $\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$, wyznaczone prawie pewnie, że

$$Z_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Pola takie są istotnym narzędziem służącym do badania pól ze strukturą martyngałową i znane są pod pojęciem pól przyrostów.

Lemat 2.6. ([H3], lemat 4.1) *Ustalmy $q > 1$. Istnieje uniwersalna stała $C = C(q,d)$ o następującej własności. Jeśli $\{(S_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem losowym o strukturze martyngałowej, którego filtracja posiada własność warunkowej niezależności (zob.* **(F4)** *w podrozdziale 1.3), a pole przyrostów $\{(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ składa się ze zmiennych całkowalnych z q-tą potęgą, to*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} |S_{\mathbf{n}}|^q\Big) \le C\, \mathbb{E}\Big(\sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}^2\Big)^{q/2}.$$

Lemat ten pozwala udowodnić twierdzenie Bauma-Katza dla pól losowych o strukturze martyngałowej. Zanim sformułujemy ten wynik musimy wprowadzić nowe oznaczenia. Będziemy je również stosować w następnych rozdziałach. Połóżmy:

- $D := \{1, 2, ..., d\}$, $\emptyset \ne J \subseteq D$ i $CJ := D \setminus J$;
- dla dowolnego $(n_1, ..., n_d) \in \mathbb{N}^d$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}^J := \bigvee_{(n_j \in \mathbb{N}, j \in CJ)} \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}$ i jeśli $J = \{j\}$, wtedy $\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}^J$ oznaczymy przez $\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}^j$;

- $\mathcal{G}_{\mathbf{n}} := \bigvee_{j=1}^{d} \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}^{j}$;

- $\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{n-1}} := \mathcal{G}_{\mathbf{n-1}} \wedge \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}$, gdzie $\mathbf{n-1} = (n_1 - 1, n_2 - 1, ..., n_d - 1)$.

Niech $\{X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem przyrostów martyngałowych pola $\{(S_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ o strukturze martngałowej, którego filtracja spełnia warunek warunkowej niezależności. Jesteśmy teraz gotowi do sformułowania zapowiadanego wcześniej wyniku.

Twierdzenie 2.7. ([H3], tw. 4.1) *Niech α, p i q będą stałymi. Załóżmy, że $\alpha p > 1$, $p > 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$ i spełniony jest warunek (i) z twierdzenia 2.3 oraz, w zależności od q, jeden z warunków:*

a) $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha(p-q)-3+q/2} \sum_{\mathbf{i} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}\Big(|X_{\mathbf{i}}|^q \mathbb{I}[|X_{\mathbf{i}}| \leq |\mathbf{n}|^\alpha]\Big) < \infty,$ *dla* $q \geq 2$;

b) $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha(p-q)-2} \sum_{\mathbf{i} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}\Big(|X_{\mathbf{i}}|^q \mathbb{I}[|X_{\mathbf{i}}| \leq |\mathbf{n}|^\alpha]\Big) < \infty,$ *dla* $1 < q < 2$.

Ponadto, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha p - 2} \mathbb{P}\Big[\max_{\mathbf{j} \preceq \mathbf{n}} \Big| \sum_{\mathbf{i} \preceq \mathbf{j}} \mathbb{E}\big(X_{\mathbf{i}} \mathbb{I}[|X_{\mathbf{i}}| \leq |\mathbf{n}|^\alpha] \big| \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{n-1}}\big)\Big| > \varepsilon |\mathbf{n}|^\alpha\Big] < \infty, \tag{2.2}$$

to zachodzi (2.1).

Przytoczone powyżej twierdzenie, jest odpowiednikiem wyniku dla pól losowych o strukturze ujemnego stowarzyszenia (por. tw. 2.3) i o strukturze ρ^*-mieszania (por. [H3], tw. 3.1). W klasie pól niezależnych zmiennych losowych, wspólnej dla wymienionych trzech struktur zależności, warunek (2.2) redukuje się do warunku (*iv*) występującego w twierdzeniu 2.2 i twierdzeniu 3.1 z pracy [H3]. Taką wersję wyniku podajemy w następującym wniosku.

Wniosek 2.8. ([H3], wniosek 4.1) *Załóżmy, że $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem niezależnych zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej. Niech α i p będą takimi stałymi, że $p \geq 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$ i $\alpha p > 1$. Załóżmy też, że zachodzi warunek (i) z twierdzenia 2.3, warunek (a) albo (b) z twierdzeniu 2.7, ze stałą $q > 1$. Wówczas założenie*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^\alpha} \max_{\mathbf{j} \preceq \mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i} \preceq \mathbf{j}} \mathbb{E}\big(X_{\mathbf{i}} \mathbb{I}[|X_{\mathbf{i}}| \leq |\mathbf{n}|^\alpha]\big) \longrightarrow 0, \quad gdy \quad \max \mathbf{n} \to \infty, \tag{2.3}$$

pociąga za sobą (2.1).

W uzupełnieniu komentarza do ostatnich dwóch wyników zauważamy, że dla warunku (2.2) wystarczy prawie pewna zbieżność szeregu

$$\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{\mathbb{E}(\mid X_{\mathbf{k}}\mid^p \mid \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{n-1}})}{|\mathbf{k}|^{\alpha p}},$$

dla warunku (2.3) zbieżność powyższego szeregu w postaci z bezwarunkową wartością oczekiwaną; ponadto, jeśli pole niezależnych zmiennych losowych o zerowych wartościach oczekiwanych spełnia WMD, to warunek (A) występujący w twierdzeniu 2.5 pociąga za sobą wszystkie założenia wniosku 2.8, które implikują tezę (2.1). Jest to treścią wniosku 4.2 podanego w pracy [H3].

3 Nierówności Fuka-Nagaeva, Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena i twierdzenia typu Bauma-Katza

Liczne wyniki uogólniające twierdzenie Bauma-Katza (B-K) dowodzone są przy użyciu metod symetryzacji/desymetryzacji oraz różnych wersji nierówności Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena (K-H-J); prace [53], [57] lub [70] to przykłady, w których używano takiego schematu dowodzenia. Nierówność ta nie ma odpowiednika dla ciągów zależnych zmiennych losowych, tym bardziej dla pól losowych ze strukturą zależności. Trudności, jakie napotykamy przy próbach jej dowiedzenia, wskazują raczej, że dla zależnych zmiennych losowych może być ona nieprawdziwa. Zaproponowana przez nas, dla pól losowych ze strukturą zależności, słabsza wersja nierówności Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena w dalszym ciągu jest użyteczna do badania zbieżności kompletnej i prawie pewnej. Kluczowym wynikiem, który pozwala zrealizować tę ideę są nierówności Fuka-Nagaeva (F-N); my dowodzimy je dla pól losowych o strukturze zależności ujemnej i martyngałowej.

Bezpośrednią inspiracją dla tych badań była chęć rozszerzenia wyników Guta i Stadtmüllera, zawartych w pracy [53], na pola losowe o różnych rozkładach i strukturach zależności.

3.1 Wyniki dla pól losowych ze strukturą martyngałową

W tym podrozdziale przedstawimy twierdzenia typu Bauma-Katza, z których otrzymujemy informację o szybkości zbieżności dla tzw. asymetrycznych mocnych praw wielkich liczb (*asymmetric SLLN*, por. [54]); tym różniące się od wyników rozdziału drugiego, że normujące pole jest postaci $|\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}|$, gdzie $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in (\frac{1}{2}, \infty)^d$ i $\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}} := (n_1^{\alpha_1}, n_2^{\alpha_2}, ..., n_d^{\alpha_d})$. Do otrzymania tego rodzaju wyników nie wystarczają nierówności Burkholdera lub Rosenthala, które stosowaliśmy z powodzeniem w rozdziale drugim; tutaj musimy użyć narzędzia znacznie doskonalszego – nierówności typu Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena. Do sformułowania zapowiedzianych wyników potrzebujemy dodatkowych pojęć i oznaczeń związanych z polami losowymi o strukturze martyngałowej. Będziemy korzystać z takich samych oznaczeń warunków, jakie są używane w literaturze (por. [12] i [61]):

(X2) $\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest adaptowana do filtracji $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$;

(X3) $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}|\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{n-1}}) \leq 0$ p.p., dla każdego $\mathbf{n} \in N^d$;

(X3') $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}|\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{n-1}}) = 0$ p.p., dla każdego $\mathbf{n} \in N^d$;

(F2) filtracja jest zupełna w $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$;

(F5) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Y|\mathfrak{F}_{\mathbf{n}})|\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}}\right] = \mathbb{E}(Y|\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{n-1}})$ p.p., dla każdego $\mathbf{n} \in N^d$ i dowolnej ograniczonej zmiennej losowej Y.

Nierówność Fuka-Nagaeva dla martyngałowych i odwróconych martyngałowych pól losowych została dowiedziona w pracach [72] i [74], dla przypadku $d = 2$ i rozszerzona w artykule [12], na przypadek $d > 2$. Autorzy tych prac formułowali założenia w oparciu o co najmniej drugi moment warunkowy. Wyniki przedstawione w pracy [H2] zostały otrzymane przy założeniach na momenty warunkowe rzędu r, $1 \leq r \leq 2$.

Niech

$$\{b^r_{\mathbf{k}},\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}, \quad \{d_{\mathbf{k}},\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}, \quad \{\lambda_{\mathbf{k}},\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\} \text{ oraz } \{m^r_{\mathbf{k}},\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$$

będą takimi rodzinami liczb dodatnich, że dla wszystkich $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ zachodzą prawie pewnie następujące nierówności:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(|X_{\mathbf{k}}|^r \mathbb{I}[|X_{\mathbf{k}}| \leq y]|\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{k-1}}) \leq b^r_{\mathbf{k}}, && \mathbb{E}(X_{\mathbf{k}} \mathbb{I}[X_{\mathbf{k}} > -y]|\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{k-1}}) \leq d_{\mathbf{k}}, \\ &\mathbb{E}(|X_{\mathbf{k}}|^r|\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{k-1}}) \leq m^r_{\mathbf{k}}, && \mathbb{E}(|X_{\mathbf{k}}| \mathbb{I}[|X_{\mathbf{k}}| > y]|\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{k-1}}) \leq \lambda_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} B^r_{\mathbf{n}} &:= \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} b^r_{\mathbf{k}}, & D_{\mathbf{n}} &:= \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}, \\ M^r_{\mathbf{n}} &:= \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} m^r_{\mathbf{k}}, & \Lambda_{\mathbf{n}} &:= \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \lambda_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wprowadzone oznaczenia i warunki pozwalają na sformułowanie twierdzenia, którego tezą są nierówności Fuka-Nagaeva dla pól losowych o strukturze martyngałowej.

Twierdzenie 3.1. ([H2], tw. 4.1) *Niech rodzina σ-ciał $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ spełnia warunki (F1),(F2) i (F4) oraz w przypadku $d > 2$ warunek (F5), natomiast pole losowe $\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ spełnia (X2), (X3) i (3.1). Jeśli ponadto, dla stałych x, y i r zachodzą warunki: $x, y > 0$, $1 \le r \le 2$, to prawdziwa jest nierówność*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} S_{\mathbf{k}} \ge x) \le{}& \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \ge y) \\ &+ e^{d-1} \exp\left\{ \frac{x}{y} - \left(\frac{x - D_{\mathbf{n}}}{y} + \frac{B^r_{\mathbf{n}}}{y^r} \right) \ln\left[\frac{xy^{r-1}}{B^r_{\mathbf{n}}} + 1 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jeśli zamiast (X3) założymy (X3') i utrzymamy pozostałe założenia, to

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| \ge x) \le{}& \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| \ge y) \\ &+ 2e^{d-1} \exp\left\{ \frac{x}{y} - \left(\frac{x - D_{\mathbf{n}}}{y} + \frac{B^r_{\mathbf{n}}}{y^r} \right) \ln\left[\frac{xy^{r-1}}{B^r_{\mathbf{n}}} + 1 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nierówności (3.3) i (3.4) nazywane są nierównościami Fuka-Nagaeva, pozwalają otrzymać narzędzie do dowodzenia twierdzeń Bauma-Katza – nierówność typu Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena, którą otrzymujemy w poniższym lemacie.

Lemat 3.2. ([H2], lemat 4.2) *Niech $\{(X_{\mathbf{n}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}),\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ spełnia założenia twierdzenia 3.1 z warunkiem (X3'), wtedy istnieje taka nieujemna stała C zależna tylko od d, że dla każdego $x > 0$ oraz $j > 0$*

$$\mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| \ge x) \le \mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| \ge \frac{x}{j} \right) + C \left(\frac{1}{x^r} M^r_{\mathbf{n}} \right)^j. \tag{3.5}$$

Zastosowanie lematu 3.2 pozwala otrzymać dwa twierdzenia. Pierwsze z nich, twierdzenie typu Bauma-Katza, które określa szybkość zbieżności w mocnym prawie wielkich liczb Marcinkiewicza z asymetrycznym normowaniem. Stanowi ono martyngałową wersją wyniku Guta i Stadtmüllera otrzymanego dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie (por. [53], tw. 1.3), jest więc istotnym uogólnieniem tego wyniku.

Twierdzenie 3.3. ([H2], tw. 4.3) *Niech* $\{(X_{\mathbf{n}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}),\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *spełnia założenia twierdzenia 3.1 i warunek WMD ze zmienną losową* ξ*, załóżmy ponadto, że dla pewnych stałych* α_1 *i* r *takich, że* $\alpha_1 r > 1,\ \alpha_1 > 1/2$ *istnieje taka stała* M *zależna tylko od* r *oraz* $\mathbf{n_0} \in \mathbb{N}^d$*, że* $\frac{1}{|\mathbf{n}|} M_{\mathbf{n}}^r \leq M$ *dla* $\mathbf{n} \not\preceq \mathbf{n_0}$*. Wówczas, jeśli*

$$\mathbb{E}|\xi|^r (\log^+ |\xi|)|^{p-1} < \infty, \tag{3.6}$$

to

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha_1 r - 2} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}| \varepsilon) < \infty, \quad \textit{dla wszystkich} \quad \varepsilon > 0, \tag{3.7}$$

gdzie α_1 *jest najmniejszą współrzędną wektora* $\boldsymbol{\alpha}$*.*

Drugie twierdzenie, które możemy otrzymać, stosując lemat 3.2, to uogólnienia wyniku Ghosala i Chandry (por. [47], tw. 1(b) i tw. 2) na pola losowe ze strukturą martyngałową, mniej restrykcyjnymi wymaganiami momentowymi oraz ogólniejszymi założeniami dotyczącymi macierzy zmiennych losowych – nawet w przypadku jednowymiarowym. Oto treść tego twierdzenia.

Twierdzenie 3.4. ([H2], tw. 4.4) *Niech* $\mathbf{k_n}$ *będzie polem takich elementów* $\mathbb{N}^d$*, że* $|\mathbf{k_n}|$ *dąży do nieskończoności, gdy* $\max \mathbf{n}$ *dąży do nieskończoności;* $\{X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}, \mathbf{i} \preceq \mathbf{k_n},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie d-wymiarową tablicą, w wierszach przyrostów martyngałowych względem* $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{n},\mathbf{i}}, \mathbf{i} \preceq \mathbf{k_n},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$*, spełniających założenia twierdzenia 3.1 z warunkiem (X3'). Ponadto, istnieją takie pola nieujemnych liczb rzeczywistych* $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *i* $\{\widetilde{M^r_{\mathbf{k_n}}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$*, że*

(i) $\displaystyle\sum_{\mathbf{j} \preceq \mathbf{k_n}} \mathbb{E}(|X_{\mathbf{n},\mathbf{j}}|^r | \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{n},\mathbf{j}-\mathbf{1}}) \leq \widetilde{M^r_{\mathbf{k_n}}}$ *p.p.*,

(ii) $\displaystyle\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{i} \preceq \mathbf{k_n}} |X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}| > \varepsilon) < \infty$, *dla wszystkich* $\varepsilon > 0$,

(iii) *istnieje taka stała* $j > 0$*, że* $\displaystyle\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}} \left(\widetilde{M^r_{\mathbf{k_n}}}\right)^j < \infty$,

to

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{l} \preceq \mathbf{k_n}} |\sum_{\mathbf{i} \preceq \mathbf{l}} X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}| > \varepsilon) < \infty, \quad \textit{dla wszystkich} \ \ \varepsilon > 0.$$

Przykłady zastosowań tego typu wyników jak twierdzenie 3.4 możemy znaleźć między innymi w pracy [47].

3.2 Wyniki dla pól losowych ze strukturą ujemnej zależności

W tym podrozdziale pokażemy, że twierdzenia Bauma-Katza z asymetrycznym normowaniem można także otrzymać dla pól losowych ze strukturą ujemnej zależności. Zanim przejdziemy do sformułowania najważniejszych wyników przypomnimy definicje pól losowych o takiej strukturze.

Definicja 3.5. *Skończona rodzina zmiennych losowych* $\{X_{\mathbf{k}},\, \mathbf{k} \in (\mathbf{n})\}$ *jest ujemnie zależna, jeśli dla dowolnych rzeczywistych* $x_{\mathbf{k}}$*, gdzie* $\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}$

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} (X_{\mathbf{k}} \leq x_{\mathbf{k}})\right] \leq \prod_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{P}(X_{\mathbf{k}} \leq x_{\mathbf{k}})$$

oraz

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} (X_{\mathbf{k}} > x_{\mathbf{k}})\right] \leq \prod_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{P}(X_{\mathbf{k}} > x_{\mathbf{k}}).$$

Nieskończone pole losowe jest ND, jeśli każda skończona rodzina jest ND. Warunek ujemnej zależności pola losowego jest oczywiście mniej restrykcyjny niż warunek ujemnego stowarzyszenia. Można pokazać (por. [60]), że klasa pól losowych ujemnie stowarzyszonych jest zawarta w klasie pól losowych ujemnie zależnych.

Przedstawienie wyników rozpoczniemy od lematu, który był kluczowy w dowodzie warunku wystarczającego w twierdzeniu 3.8, ale też bardzo dobrze wyjaśnia konieczność dodatkowych założeń w twierdzeniach typu Bauma-Katza dla pól losowych o niejednakowych rozkładach.

Lemat 3.6. ([H1], lemat 2.4) *Niech* $\{a_{\mathbf{k},\mathbf{n}},\ \mathbf{k},\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie niemalejącą w wierszach względem* $|\mathbf{n}|$, d*-wymiarową tablicą takich liczb rzeczywistych, że* $0 < a_{\mathbf{k},\mathbf{n}} \leq 1$ *oraz* $1 - a_{\mathbf{n},\mathbf{n}} = o(\frac{1}{|\mathbf{n}|})$*, wtedy*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{|\mathbf{n}|}\left(1 - \prod_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} a_{\mathbf{k},\mathbf{n}}\right) < \infty \quad \textit{implikuje} \quad \lim(\max) \prod_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} a_{\mathbf{k},\mathbf{n}} = 1. \tag{3.8}$$

Powyższy wynik jest uogólnieniem drugiej części lematu A4.2 z monografii Guta [55] i pozwala otrzymać kompletną zbieżność pola losowego $\max\limits_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, dla pól o niejednakowym rozkładzie. Lemat 3.6 został dowiedziony na potrzeby dowodu twierdzenia 3.8, ale może być uogólniony do postaci, w której rozważamy szereg $\sum\limits_{\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{n}}}(1 - \prod\limits_{\mathbf{l} \preceq \mathbf{n}} a_{\mathbf{l},\mathbf{n}})$, co pozwoli na dalsze rozszerzenia twierdzenia Bauma-Katza dla pól losowych, na przykład w kierunku twierdzenia 11.1 z rozdziału VI monografii [55].

Przejdźmy teraz do głównych wyników tego podrozdziału. Zanim to zrobimy, w celu uproszczenia wypowiedzi, połóżmy $\widehat{M_{\mathbf{n}}^r} := \sum\limits_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}|X_{\mathbf{k}}|^r$.

Lemat 3.7. ([H2], lemat 2.5) *Załóżmy, że $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem zmiennych losowych o strukturze ujemnej zależności, zerowych wartościach oczekiwanych i skończonych momentach absolutnych rzędu r, $1 \leq r \leq 2$, wtedy istnieje taka nieujemna stała C zależna tylko od d i j, że dla dowolnego $x > 0$ oraz $j > 0$, mamy*

$$\mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| > \frac{x}{j}\right) + C\left(\frac{1}{x^r}\widehat{M_{\mathbf{n}}^r}\right)^j.$$

Teza lematu 3.7 to nierówność typu Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena, dzięki której możemy dowodzić twierdzenia Bauma-Katza dla pól losowych o strukturze ujemnej zależności. Poniżej przytaczamy dwa takie twierdzenia.

Twierdzenie 3.8. ([H1], tw. 3.3; [H2], tw. 3.1) *Załóżmy, że pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ ma strukturę ujemnej zależności, zerowe wartości oczekiwane i jest słabo średnio ograniczone przez zmienną losową ξ. Jeśli ponadto dla stałych α_1 i r spełnione są warunki: $r \geq 1$, $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ i $\alpha_1 r \geq 1$ oraz*

$$\mathbb{E}|\xi|^r (\log^+ |\xi|)^{p-1} < \infty, \tag{3.9}$$

to

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha_1 r - 2} \mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| > |\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}|\varepsilon) < \infty \quad \textit{dla dowolnego} \quad \varepsilon > 0. \tag{3.10}$$

Odwrotnie,

(i) jeśli $r > 0$, $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, $\alpha_1 r \geq 2$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha_1 r - 2} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}|\varepsilon) < \infty, \tag{3.11}$$

to jest spełnione (3.9) i gdy $r \geq 1$, $\mathbb{E}\xi = 0$;

(ii) jeśli $r > 0$, $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, $\alpha_1 r \in \langle 1, 2)$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ spełnione jest (3.11), a ponadto warunek

$$\mathbb{P}(|X_{\mathbf{n}}| > |\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}|)) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{n}|}\right), \tag{3.12}$$

to zachodzi teza jak w punkcie (i).

Przedstawione powyżej twierdzenie jest kolejnym uogólnieniem wyniku Guta i Stadtmüllera (por. [53], tw. 1.3), otrzymanego dla pól niezależnych zmiennych losowych, posiadających ten sam rozkład – na pola losowe o niejednakowym rozkładzie i strukturze ujemnej zależności.

W tym miejscu warto zauważyć, że nawet dla ciągów niezależnych zmiennych losowych, ale o różnych rozkładach, w warunku koniecznym, bez dodatkowych założeń nie można osłabić nierówności $\alpha_1 r \geq 2$. Warunek (3.11), typu Bauma-Katza, jest spełniony przez ciągi zmiennych losowych, z podciągami zachowującymi się jak zmienna losowa o bardzo ciężkim ogonie, nieposiadająca żadnego momentu; korzystając z lematu 3.7, można skonstruować odpowiedni przykład. Dodatkowe założenie eliminujące takie podciągi jest więc konieczne. Wydaje się, że jednym z najsłabszych jest warunek (3.12). Z drugiej strony, jeżeli w twierdzeniu 3.8 założymy jednakowe rozkłady, to oczywiście problem znika i otrzymujemy następujące uogólnienie wyniku Guta i Stadtmüllera (por. [53], tw. 1.3) na przypadek pól o strukturze ujemnej zależności.

Twierdzenie 3.9. ([H1], tw. 3.4) *Niech $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, takim jak zmienna losowa X i strukturze ujemnej zależności. Jeśli ponadto dla stałych α_1 i r spełnione są warunki: $r \geq 1$, $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ i $\alpha_1 r \geq 1$ oraz*

$$\mathbb{E}|X|^r (\log^+ |X|)^{d-1} < \infty \quad i \quad \mathbb{E}X = 0, \tag{3.13}$$

to

$$\sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}|^{\alpha_1 r - 2} \mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| > |\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}|\varepsilon) < \infty \quad \textit{dla wszystkich} \quad \varepsilon > 0. \tag{3.14}$$

Odwrotnie, jeśli $r > 0$, $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, $\alpha_1 r \geq 1$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{\alpha_1 r - 2} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}|\varepsilon) < \infty, \tag{3.15}$$

to jest spełnione(3.9) i gdy $r \geq 1$, $\mathbb{E}X = 0$.

W dalszej części tego podrozdziału analizujemy sytuację gdy $\boldsymbol{\alpha}$ znajduje się na prawym brzegu obszaru $(\frac{1}{2}, \infty)^d$. Okazuje się, że jeśli przynajmniej jedna ze współrzędnych wektora $\boldsymbol{\alpha}$ jest równa $\frac{1}{2}$, to wystarczy, aby znaleźć się w strefie przyciągania centralnego twierdzenia granicznego i – by otrzymać zbieżność kompletną, mocne prawa wielkich liczb, twierdzenia typu Bauma-Katza – musimy poprawić normowanie. Ten przypadek wyjaśnia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.10. ([H2], tw. 3.2) *Niech $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem losowym o strukturze ujemnej zależności, słabo średnio ograniczonym przez zmienną losową ξ i zerowych wartościach oczekiwanych. Jeśli ponadto dla stałych α_1 i r spełnione są warunki: $r \geq 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ i $\alpha_1 r \geq 1$ oraz*

$$\mathbb{E}|\xi|^r \left(\log^+ |\xi|\right)^{p-1-\frac{r}{2}} < \infty, \qquad \mathbb{E}\xi^2 = \sigma^2 < \infty, \tag{3.16}$$

to

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{(r/2)-2} \mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| \geq \sqrt{\prod_{i=1}^{p} n_i \log(\prod_{i=1}^{p} n_i)} \prod_{i=p+1}^{d} n_i^{\alpha_i} \varepsilon) < \infty, \tag{3.17}$$

dla $\varepsilon > \sigma_1\sqrt{r-2}$, gdzie $p = \max\{k : \alpha_k = \alpha_1\}$ i $\sigma_1^2 = \kappa_1 \sigma^2$ (κ_1 z def. WMB).

Odwrotnie, przypuśćmy, że $r = 2$ i $p \geq 2$ albo $r > 2$, wówczas jeśli

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{(r/2)-2} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{n}}| \geq \sqrt{\prod_{i=1}^{p} n_i \log(\prod_{i=1}^{p} n_i)} \prod_{i=p+1}^{d} n_i^{\alpha_i} \varepsilon) < \infty \tag{3.18}$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$, to

$$\mathbb{E}|\xi|^r \left(\log^+ |\xi|\right)^{p-1-\frac{r}{2}} < \infty. \tag{3.19}$$

Przedstawiony powyżej wynik to uogólnienie twierdzenia dowiedzionego przez Guta i Stadtmüllera dla pól niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie (por. [53], tw. 1.4), na przypadek struktur z ujemną zależnością i różnych rozkładach.

Następne twierdzenie zostało otrzymane bezpośrednio z lematu 3.7.

Twierdzenie 3.11. ([H2], tw. 3.3) *Niech $\{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem takich elementów $\mathbb{N}^d$, że $|\mathbf{k}_{\mathbf{n}}|$ dąży do nieskończoności, gdy $\max \mathbf{n}$ dąży do nieskończoności; $\{X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}, \mathbf{i} \preceq \mathbf{k}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie d-wymiarową tablicą, w wierszach takich pól losowych ze strukturą ujemnej zależności, że $\mathbb{E}X_{\mathbf{n},\mathbf{i}} = 0$ oraz*

$\mathbb{E}|X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}|^r < \infty$ *dla* $1 \leq r \leq 2$, $\mathbf{i} \preceq \mathbf{k_n}$ *i* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$*; ponadto niech* $\{a_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie nieujemnym polem liczbowym. Wówczas, jeśli spełnione są następujące warunki:*

(i) $\displaystyle\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}\preceq\mathbf{k_n}} \mathbb{P}(|X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}| > \varepsilon) < \infty$, *dla dowolnego* $\varepsilon > 0$,

(ii) *istnieje taka stała* $j > 0$, *że* $\displaystyle\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}} \left(\sum_{\mathbf{i}\preceq\mathbf{k_n}} \mathbb{E}|X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}|^r\right)^j < \infty$,

to

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}}\mathbb{P}(|\sum_{\mathbf{i}\preceq\mathbf{k_n}} X_{\mathbf{n},\mathbf{i}}| > \varepsilon) < \infty, \qquad \textit{dla dowolnego} \quad \varepsilon > 0.$$

Powyższe twierdzenie jest rozszerzeniem wyników Sunga z pracy [101], Dehua i współautorów z pracy [33] otrzymanych dla ciągów ujemnie zależnych zmiennych losowych – na przypadek pól losowych ze strukturą ujemnej zależności.

Na koniec tego podrozdziału porównamy metody dowodowe stosowane do otrzymania wyników zamieszczonych w drugim i trzecim rozdziale. Twierdzenia Bauma-Katza z asymetrycznym normowaniem są oczywiście ogólniejszymi niż analogiczne wyniki otrzymane w rozdziale drugim, ale wymagają też dodatkowych założeń, które nie osłabiają się w przypadku jednorodnego normowania. Zatem można powiedzieć, że użyte w obu przypadkach narzędzia dowodowe: nierówności Burkholdera i Rosenthala oraz nierówność Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena są adekwatne do stawianych tez. Dokładna argumentacja tego stwierdzenia tkwi w dowodach wymienionych wyników.

3.3 Uwagi o nierówności Fuka-Nagaeva dla pól losowych ze struktura ujemnego stowarzyszenia

W tym podrozdziale (por. [H2]) dyskutujemy możliwości uogólnienia twierdzeń Bauma-Katza, otrzymanych dla ciągów ujemnie stowarzyszonych zmiennych losowych, na przypadek pól losowych ze strukturą ujemnego stowarzyszenia; w szczególności twierdzeń typu Bauma-Katza z asymetrycznym normowaniem. Podobnie jak dla struktur: martyngałowej i ujemnej zależności, tak i w tym przypadku kluczem może być nierówność Fuka-Nagaeva. Taki wynik, dla ciągów ujemnie stowarzyszonych zmiennych losowych, został dowiedziony przez Shao i opublikowany w pracy [96]. Jego dowód oparty był na metodach decouplingu; poniżej podajemy to twierdzenie porównawcze.

Twierdzenie 3.12. (Shao [96], tw. 1) *Niech $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ będzie skończonym ciągiem ujemnie stowarzyszonych zmiennych losowych a $\{X_i^*, 1 \leq i \leq n\}$ skończonym ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_i^* i X_i mają ten sam rozkład dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy, dla dowolnej wypukłej, niemalejącej funkcji rzeczywistej f*

$$\mathbb{E} f\left(\max_{1\leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i\right) \leq \mathbb{E} f\left(\max_{1\leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i^*\right), \tag{3.20}$$

pod warunkiem że wartość oczekiwana po prawej stronie nierówności istnieje.

W przypadku $d \geq 2$, Bulinski i Suquet (por. [14], tw. 2.12) pokazali, że twierdzenie porównawcze Shao dla pól losowych o strukturze ujemnego stowarzyszenia, jest nieprawdziwe.

Twierdzenie 3.13. (Bulinski, Suquet [14]) *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(1) > f(0)$ (w szczególności ściśle rosnącą). Wtedy dla dowolnego $d > 1$ istnieje pole losowe $X = \{X_{\mathbf{j}},\ \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d\}$ o strukturze ujemnego stowarzyszenia i $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ takie, że*

$$\mathbb{E} f\left(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{i}}\right) > \mathbb{E} f\left(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{i}}^*\right), \tag{3.21}$$

gdzie $X^* = \{X_{\mathbf{j}}^*,\ \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d\}$ jest niezależną wersją pola X.

Metoda Shao, w przypadku ujemnie stowarzyszonych pól losowych, nie tylko z tego powodu jest nieskuteczna. Shao stosuje nierówność maksymalną dla nieujemnego supermartyngału. Ta nierówność jest nieprawdziwa dla pól losowych, z tych samych powodów jak nierówność maksymalna Dooba (por. uwagi na str. 11).

W pracy [H2], pokazujemy, że kluczową rolę w dowodzie twierdzeń typu Bauma-Katza odgrywa nierówność Kahane'a-Hoffmanna-Jørgensena w wersji (3.5). Moim zdaniem otwiera to pewne nowe możliwości dowodu twierdzeń typu Bauma-Katza dla pól losowych o takich strukturach zależności, dla których nie potrafimy udowodnić nierówności Fuka-Nagaeva. Ogólnie rzecz ujmując, idea polega na przeniesieniu problemu na inne nierówności, które dla danej struktury już są dowiedzione lub takie, które łatwiej udowodnić. Punktem wyjścia może być, na przykład, nierówność postaci

$$\mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| > \frac{x}{j}\right) + C\left(\frac{1}{x^r} M_{\mathbf{n}}\right)^j, \tag{3.22}$$

gdzie $M_{\mathbf{n}} := \sum\limits_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{k}}$ i $\alpha_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}_+$.

Takie podejście, znane jako „general approach to SLLN", wprowadzili z dużym powodzeniem Fazekas i Klesov w pracy [41].

4 Nierówności stosowane w dowodach MPWL dla pól o wartościach w przestrzeni Banacha

W tej części autoreferatu przedstawimy niektóre nierówności pozwalające dowodzić mocne prawa wielkich liczb dla pól elementów losowych przyjmujących wartości w przestrzeni Banacha. Podamy również charakteryzację geometrii takich przestrzeni Banacha, w których zachodzi MPWL.

4.1 Nierówność Hajeka-Rényi'ego-Chowa

W tym podrozdziale przedstawiamy wyniki pochodzące z pracy [H6]. Tak jak powiedzieliśmy we wstępie klasyczna nierówność Dooba nie da się uogólnić na pola losowe, a zatem i nierówności Hajeka-Rényi'ego-Chowa (H-R-C).

Christofides i Serfling w pracy [23] udowodnili dla pola losowego o strukturze martyngałowej pewną wersję nierówności H-R-C. Analizując dowód twierdzenia 2.2 z wymienionej pracy [23], zauważyliśmy, że tezę można rozciągnąć na pola losowe o strukturze submartyngałowej.

Twierdzenie 4.1. ([H6], tw. 1.1) *Niech* $\{(Y_{\mathbf{k}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{k}}),\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie polem o strukturze submartyngałowej,* $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ *filtracją spełniającą warunek* $(F4)$ *i niech* $\{C_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie nieujemną, nierosnącą rodziną liczb rzeczywistych. Wtedy dla dowolnego* $\lambda > 0$ *mamy*

$$\begin{aligned}
\lambda\mathbb{P}\left(\sup_{\mathbf{k}\not\preceq\mathbf{m},\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} C_{\mathbf{k}}Y_{\mathbf{k}} \geq \lambda\right) &\leq \min_{1\leq s\leq r}\left\{\sum_{\mathbf{k}\not\preceq\mathbf{m},\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} (C_{\mathbf{k}} - C_{\mathbf{k};s;k_s+1})\mathbb{E}Y_{\mathbf{k}}^{+}\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k_i, i\neq s} C_{\mathbf{k};s;n_s} \int_{[\bigcup\limits_{k_s=1}^{n_s} B^{(s)}_{k_1,\ldots,k_r}]^c} Y^{+}_{\mathbf{k};s;n_s} d\mathbb{P}\right\} \qquad (4.1) \\
&\leq \min_{1\leq s\leq r}\left\{\sum_{\mathbf{k}\not\preceq\mathbf{m},\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} (C_{\mathbf{k}} - C_{\mathbf{k};s;k_s+1})\mathbb{E}Y_{\mathbf{k}}^{+}\right\},
\end{aligned}$$

gdzie $C_{\mathbf{k};s;\alpha} = C_{k_1,\ldots,k_{s-1},\alpha,k_{s+1},\ldots,k_r}$*; jeśli* $k_i > n_i$ *dla pewnego* $i = 1, 2, \ldots, d$ *to przyjmujemy* $C_k = 0$.

Twierdzenie 4.1 mimo swoich niedoskonałości działa całkiem dobrze. Przy ewentualnych niewielkich, dodatkowych założeniach można otrzymać nierówności dla pól losowych: Hajeka-Réni'ego, Kołmogorowa, ogólną postać mocnego prawa wielkich liczb Chowa (por. [23]). Utrzymując założenia wcześniej cytowanego twierdzenia 2.2, Serflinga i Christofidesa, zmodyfikowaliśmy zdarzenie, którego prawdopodobieństwo jest szacowane w nierówności Hajeka-Rényi'ego-Chowa. Dzięki temu, uzyskaliśmy narzędzie do badania prawie pewnej zbieżności w trybie-max, a nie tylko zbieżności w trybie-min, jak miało to miejsce w pracy [23]. Zatem wszystkie uzyskane przez nich wyniki pozostają prawdziwe również dla zbieżności w trybie-max, bez dodatkowych założeń. Rozszerzenie nierówności (4.1) na przypadek obejmujący póla losowe o strukturze submartyngałowej pozwala stosować ją do prawie pewnej zbieżności pól losowych o wartościach w przestrzeni Banacha $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, gdy wiemy, że normy sum częściowych $\{\|S_{\mathbf{k}}\|, \mathfrak{F}_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ są (rzeczywistym) polem losowym o strukturze submartyngałowej.

Zanim przejdziemy do omawiania następnych twierdzeń, podamy kilka pomocniczych wyników uzyskanych w pracy [H6]. Pierwszy wynik to wielowymiarowa wersja lematu Kroneckera, równoważna wersji Martikainena (por. [76], s. 435), ale postać konieczna do dowodów prawie pewnej zbieżności w trybie-max. Zauważmy, że dla $d > 1$ założenie, iż elementy tablicy $\{x_{(\mathbf{l},\mathbf{m})}, (\mathbf{l}, \mathbf{m}) \in N^d\}$ są dodatnie, jest konieczne – w odróżnieniu od przypadku jednowymiarowego.

Lemat 4.2. ([H6], lemat 2.2) *Niech* $s, t \geq 1$ *będą takimi liczbami naturalnymi, że* $s+t = d$, $\{a_{\mathbf{l}}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^s\}$ *oraz* $\{b_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^t\}$ *takimi rosnącymi (względem* $|\mathbf{l}|, |\mathbf{m}|$*) polami liczb dodatnich, że* $a_{\mathbf{l}} \to \infty$, $b_{\mathbf{m}} \to \infty$ *w trybie*-max. *Ponadto, niech* $\{x_{(\mathbf{l},\mathbf{m})}, (\mathbf{l}, \mathbf{m}) \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie tablicą liczb dodatnich o następującej własności*

$$\sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\in\mathbb{N}^d} \frac{x_{(\mathbf{l},\mathbf{m})}}{a_{\mathbf{l}} b_{\mathbf{m}}} < \infty.$$

Wtedy

$$\frac{1}{a_{\mathbf{N}_1}} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\preceq(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2)} \frac{x_{(\mathbf{l},\mathbf{m})}}{b_{\mathbf{m}}} \to 0, \quad \textit{gdy} \quad \max \mathbf{N}_1 \to \infty,$$

dla każdego $\mathbf{N}_2 \in \mathbb{N}^t$.

Kolejny lemat podaje charakteryzację geometrii przestrzeni Banacha w terminach nierówności typu Marcinkiewicza-Zygmunda dla pól elementów losowych ze strukturą niezależności. Wynik jest wnioskiem ze stwierdzenia 2.1 uzyskanego przez Woyczyńskiego w pracy [112].

W tym podrozdziale $\mathbb{E}X$ będzie oznaczać całkę Bochnera elementu losowego $X(\omega)$ o wartościach w przestrzeni Banacha $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$.

Lemat 4.3. ([H6], lemat 2.3) *Niech $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą, ośrodkową przestrzenią Banacha, wtedy dla $p, q \in \mathbb{R}$ takich, że $1 \leq p \leq 2$ i $q \geq 1$, następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathbb{B}$ jest przestrzenią Rademachera typu p;

(ii) Istnieje taka stała dodatnia C, zależna tylko od p i q, że dla dowolnego pola $\{X_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ niezależnych elementów losowych o wartościach w przestrzeni $\mathbb{B}$, o zerowych wartościach oczekiwanych, posiadających moment absolutny rzędu q, spełniona jest nierówność

$$\mathbb{E}\|\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\boldsymbol{k}}\|^q \leq C\mathbb{E}(\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \|X_{\mathbf{n}}\|^p)^{q/p}. \tag{4.2}$$

Twierdzenie 4.1 wraz z lematami 4.2 i 4.3 pozwala udowodnić następujące prawo wielkich liczb typu Brunka-Prokhorova będące częściowym uogólnieniem twierdzenia 3.1 dowiedzionego przez Woyczyńskiego w pracy [112].

Twierdzenie 4.4. ([H6], tw. 2.4) *Niech $\{X_{\mathbf{n}}, \ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie takim polem niezależnych zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Banacha $\mathbb{B}$, że $\mathbb{E}X_{\mathbf{n}} = 0$ i $\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^{pq} < \infty$ dla każdego $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ oraz*

$$\min_{1\leq s\leq d} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^{pq}}{n_s|\mathbf{n}|^{pq-q}} < \infty, \quad \textit{dla} \ \ 1 \leq p \leq 2, \ q > 1. \tag{4.3}$$

Jeśli ponadto, przestrzeń Banacha $\mathbb{B}$ jest przestrzenią Rademachera typu p, to

$$\lim(\max)\frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|} \to 0 \quad p.p. \tag{4.4}$$

Związki pomiędzy geometrią przestrzeni Banacha, szybkością zbieżności w słabym prawie wielkich liczb (SPWL) i prawem wielkich liczb Brunka-Prokhorova podaje poniższe twierdzenie, które jest odpowiednikiem dla ciągów elementów losowych (por. [112], tw. 3.2).

Twierdzenie 4.5. ([H6], tw. 2.7) *Niech p i q będą takimi stałymi, że $1 \leq p \leq 2$, $q \geq 1$, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathbb{B}$ *jest przestrzenią Rademachera typu p;*

(ii) *dla dowolnego* $\lambda > 0$ *istnieje taka stała* C_λ, *że dla dowolnego pola niezależnych elementów losowych* $\{X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *o wartościach w przestrzeni Banacha* $\mathbb{B}$, *spełniona jest nierówność*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{-1}\mathbb{P}\left(\frac{\|S_{\mathbf{n}}\|}{|\mathbf{n}|} \geq \lambda\right) \leq C_\lambda \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^{pq}}{|\mathbf{n}|^{pq-q+1}}.$$

Przedstawiona idea, oparta na twierdzeniu 4.1, może być z powodzeniem wykorzystana do badania prawie pewnej zbieżności pól losowych o wartościach w przestrzeni Banacha z martyngałową strukturą zależności; wymaga to oczywiście mocniejszych założeń na geometrię przestrzeni – p -jednostajna gładkość (lub p -wygładzalność). Na przykład, taką ścieżką zostało dowiedzione w pracy [100] mocne prawo wielkich liczb Brunka-Prokhorova, dla pól przyrostów martyngałowych (wraz z charakteryzacją geometrii przestrzeni Banacha).

4.2 Nierówność typu Marcinkiewicza

W tej części rozdziału podajemy pewną wersję nierówności Marcinkiewicza dla pól losowych, która pozwala otrzymać mocne prawa wielkich liczb typu Brunka-Prokhorova. Korzystanie z tej nierówności w dowodach MPWL, przy założeniu prawdziwości słabego prawo wielkich liczb, nie wymaga informacji o geometrii przestrzeni Banacha. Twierdzenia tego typu stanowią dobre uzupełnienie wyników poprzedniego podrozdziału.

Lemat 4.6. ([H6], lemat 2.11) *Niech* $q \geq 1$; *istnieje taka dodatnia stała* $C(q)$, *że dla dowolnego pola* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *elementów losowych ze strukturą niezależności, przyjmujących wartości w ośrodkowej przestrzeni Banacha* $\mathbb{B}$, *prawdziwe są nierówności:*

(i) *jeśli* $1 \leq q \leq 2$, *to*

$$\mathbb{E}\,|\|S_{\mathbf{n}}\| - \mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}}\||^q \leq C(q) \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^q,$$

dla $q = 2$ *można przyjąć* $C(2) = 4$;

(ii) jeśli $q > 2$, to

$$\mathbb{E}|\|S_{\mathbf{n}}\| - \mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}}\||^q \le C(q)\left[\left(\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^2\right)^{q/2} + \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^q\right].$$

Zastosowanie lematu 4.6 pozwala uogólnić wynik Acosty (por. [1], tw. 3.2) na pola elementów losowych.

Twierdzenie 4.7. ([H6], Theorem 2.12) *Niech $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ spełnia założenia lematu 4.6, $\mathbb{E}X = 0$ oraz $\|S_{\mathbf{n}}\|/|\mathbf{n}| \to 0$ wg prawdopodobieństwa w trybie*-max, *wtedy:*

(i) jeśli $1 \le q \le 2$, to $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^q}{|\mathbf{n}|^q} < \infty$ implikuje MPWL (4.4),

(ii) jeśli $q \ge 2$, to $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^q}{|\mathbf{n}|^{\frac{q}{2}+1}} < \infty$ implikuje MPWL (4.4).

5 Kilka mocnych praw wielkich liczb w sektorze

W rozważaniach o mocnych prawach wielkich liczb dla pól losowych można postawić jeszcze jedno pytanie, sygnalizowane już we wstępie. Przypuśćmy, że indeksy $\mathbf{n}$ – sum częściowych $S_{\mathbf{n}}$ są wybierane z pewnego nieskończonego podzbioru $A \subset \mathbb{N}^d$. Badając zbieżność takich sum, rozważamy więc nie wszystkie. Czy zatem można przypuszczać (por. Gabriel, [42]), że dzięki temu będziemy mogli osłabić warunek konieczny i wystarczający dla MPWL? Jest to jeden z najtrudniejszych problemów prawie pewnej zbieżności, powiązany z problemem twierdzeń granicznych dla „podciągów" (por. Klesov, [67], str. 246).

Zbieżność pola losowego indeksowanego nieskończonym zbiorem $A \subset \mathbb{N}^d$ będziemy rozumieć następująco

$$\xi_{\mathbf{n}} \to 0 \text{ p.p., gdy } \mathbf{n} \to \infty \text{ (w danym trybie zbieżności) i } \mathbf{n} \in \mathrm{A}. \tag{5.1}$$

Jeśli $\mathbf{n} \to \infty$ oznacza $\max \mathbf{n} \to \infty$, to (5.1) jest równoważne

$$\mathbb{P}\left(|\xi_{\mathbf{n}}| \ge \varepsilon \text{ i.o., } \mathbf{n} \in A\right) = 0, \text{ dla dowolnego } \varepsilon > 0,$$

gdzie

$$\{B_{\mathbf{n}} \text{ i.o.}, \mathbf{n} \in A\} := \bigcap_{\mathbf{n}\in A} \bigcup_{\mathbf{k}\not\preceq\mathbf{n}, \mathbf{k}\in A} B_{\mathbf{k}}.$$

5.1 Wyniki dla pól losowych ze strukturą niezależności

Na pytanie postawione przez Gabriela twierdzącej odpowiedzi udzielił Gut, dowodząc mocne prawa wielkich liczb dla pól niezależnych zmiennych, losowych posiadających ten sam rozkład (por. [50]); przyjmując jako nieskończony podzbiór

$$A = \mathcal{S}_\theta^d := \left\{ (i_1, ..., i_d) \in \mathbb{N}^d : \theta < \frac{i_l}{i_k} < \frac{1}{\theta}, \text{ dla wszystkich } l \neq k = 1, ..., d \right\},$$

gdzie θ jest dowolną liczbą z przedziału $(0, 1)$. Zbiór $\mathcal{S}_\theta^d$ nazwał d-wymiarowym sektorem, a rozpatrywaną zbieżność – zbieżnością sektorialną. Zauważmy, że:

- zbieżności sektorialne w trybie-max i trybie-min są równoważne;
- wobec dowolności θ, sektor nie zatraca charakteru d-wymiarowości, a zbieżność sektorialna bardzo dobrze przybliża zbieżność w $\mathbb{N}^d$ w aspekcie zastosowań statystycznych.

Gut pokazał, że warunki konieczne i wystarczające w mocnym prawie wielkich liczb Marcinkiewicza oraz prawie iterowanego logarytmu Hartmana-Wintnera, dla zbieżności sektorialnej pól niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, są dokładnie takie same jak w przypadku jednowymiarowym.

W pracy [H4] uogólniamy bardzo interesujące ważone prawo wielkich liczb, otrzymane przez Jajtego w pracy [58], na przypadek pól losowych, a w szczególności zbieżności sektorialnej. Mówiąc dokładniej, podajemy warunki konieczne i wystarczające dla zbieżności

$$\frac{1}{g(|\mathbf{n}|)} \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}, \mathbf{n}\in\mathcal{S}_\theta^d} \frac{1}{h(|\mathbf{k}|)} \xi_{\mathbf{k}} = \sigma_{\mathbf{n}} \longrightarrow \sigma \quad \text{p.p.,} \quad \text{gdy} \quad \max \mathbf{n} \to \infty, \tag{5.2}$$

gdzie $\xi_{\mathbf{k}} = X_{\mathbf{k}} - \mathbb{E}\left(X_{\mathbf{k}} \mathbb{I}[|X_{\mathbf{k}}| \leq \phi(|\mathbf{k}|)]\right)$ i $\phi(y) \equiv g(y)h(y)$.

Dla ujednolicenia oznaczeń, przyjmijmy, że $\mathcal{S}_0^d = \mathbb{N}^d$. Zatem $\mathcal{S}_\theta^d$ jest teraz określone dla wszystkich $0 \leq \theta < 1$.

Ze względu na dużą dowolność doboru funkcji wagowej i normującej, wynik może być postrzegany jako prawie pewna zbieżność (h, g) transformat pól losowych lub metoda (h, g) sumowalności tych pól.

W wypowiedzi głównego wyniku tego podrozdziału występują funkcje g, h i $\phi = g \cdot h$, o których będziemy zakładać:

(A1) g i h są dodatnie, g jest rosnącą i taką, że $\lim_{y\to\infty} g(y) = \infty$;

(A2) ϕ jest ściśle rosnąca na przedziale $\langle t, \infty)$ oraz $\phi(\langle t, \infty)) = \langle 0, \infty)$, dla pewnego $t \geq 0$;

(A3) istnieją takie stałe dodatnie C i k_0, że $\phi(y+1)/\phi(y) \leq C$;

(A4) istnieją takie stałe a i b, że

$$\begin{aligned} \phi^2(s) \sum_{k\geq s} \frac{d_\theta(k)}{\phi^2(k)} &\leq as + b, \text{ dla } s > t \text{ i } 0 < \theta < 1, \\ \phi^2(s) \sum_{k\geq s} \frac{d_\theta(k)}{\phi^2(k)} &\leq as(\log^+ s)^{d-1} + b, \text{ dla } s > t \text{ i } \theta = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$d_\theta(k) = \operatorname{card}\left\{\mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d : |\mathbf{n}| = k\right\}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Ponadto połóżmy $m_{\mathbf{k}} := \mathbb{E}\left(X_{\mathbf{k}} \mathbb{I}[|X_{\mathbf{k}}| \leq \phi(|\mathbf{k}|)]\right),\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$; możemy teraz sformułować zapowiedziany wcześniej wynik.

Twierdzenie 5.1. ([H4], tw. 1) *Niech* $\left\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\right\}$ *będzie polem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jak zmienna losowa* X, *funkcje* g, h *i* ϕ *spełniają (A1)–(A4), wtedy następujące warunki*

$$\lim(\max) \frac{1}{g(|\mathbf{n}|)} \sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d} \frac{X_{\mathbf{k}} - m_{\mathbf{k}}}{h(|\mathbf{k}|)} \longrightarrow 0 \quad p.p. \tag{5.4}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\phi^{-1}(|X|) < \infty, && \text{dla } 0 < \theta < 1, \\ &\mathbb{E}\phi^{-1}(|X|)\left(\log^+ \phi^{-1}(|X|)\right)^{d-1} < \infty, && \text{dla } \theta = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

są równoważne.

Twierdzenie 5.1 zawiera metody sumowalności takie jak: średnie Cesàro $(C, 1)$, średnie logarytmiczne, transformacje typu mocnego prawa wielkich liczb Marcinkiewicza i podobne. Metody sumowalności pól losowych były przedmiotem wielu badań; wymieńmy najważniejsze prace i ich autorów: Hoffmann-Jørgensen, Su i Taylor – [56], Gut i Stadtmüller – [52], Moricz – [88]. Przedstawione w tym podrozdziale mocne prawo wielkich liczb (5.4) stanowi uzupełnienie wyników otrzymanych w wymienionych publikacjach.

5.2 Wyniki dla pól losowych ze strukturą zależności w parach

Bardzo ważnym kierunkiem osłabiania niezależności ciągów zmiennych losowych jest założenie badanego warunku tylko dla dowolnej pary zmiennych losowych. Taka właśnie zależność będzie przedmiotem rozważań w tym podrozdziale. Z tym kierunkiem badań związane są nazwiska znanych probabilistów. Chung (por. tw. 5.2.2 w [26]), zakładając niezależność w parach, udowodnił słabe prawo wielkich liczb. Przy tym samym założeniu znacznie ogólniejszy wynik dowiódł Etemadi w [38], przedstawiając bardzo „sprytny" dowód MPWL, bez stosowania nierówności Kołmogorowa. Csörgő, Totik i Tandori w [28] i [30] pokazali, że metodę Etemadiego można stosować do zmiennych losowych o różnych rozkładach parami niezależnych, ale pokazali też, że założenie nie może być osłabione do zmiennych losowych parami nieskorelowanych. Należy też wymienić prace Martikainena [77] oraz Cuesty i Matrana [27]. Ostatnich kilkanaście lat przyniosło wyniki dotyczące ciągów zmiennych losowych parami asymptotycznie (quasi) niezależnych, można tu wymienić prace: Chena [24], Gao i współautorów [44], [45] i [46], Li [75], Chenga [25] oraz parami (quasi-asymptotycznie) zależnych, na przykład prace Matuły [78] i [79], Azarnooscha i współautorów [5]. Na bazie tych wyników powstało bardzo wiele prac dotyczących modeli ryzyka inwestycyjnego (finansowego), ubezpieczeniowego, oceny prawdopodobieństwa ruiny itp.

W dalszej części tego rozdziału, opartego na wynikach pracy [H5], będziemy rozważać pola losowe ze strukturą zależności zdefiniowaną w oparciu o pojęcie kopuły; często używanej w stochastycznych modelach finansowych, matematyce aktuarialnej. Przypomnijmy definicję (por. [89]).

Dwuwymiarową kopułą nazywamy funkcję $C : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ spełniającą następujące warunki (dwuwymiarowej dystrybuanty):

- $C(u, 0) = C(0, v) = 0$, $C(u, 1) = u$, $C(1, v) = v$
- $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$, dla $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ i $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$.

Dla dowolnych zmiennych losowych X i Y o rozkładach $F_X(x)$ i $F_Y(y)$, istnieje taka kopuła $C_{X,Y}(u,v)$, że

$$\mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right) = C_{X,Y}\left(F_X(x), F_Y(y)\right).$$

Z twierdzenia Sklara (por. [89], tw. 2.3.3) wiadomo, że funkcja $C_{X,Y}(u,v)$ jest określona jednoznacznie na produkcie zbiorów wartości dystrybuant $\mathrm{Ran}(F_{X_{\mathbf{i}}}) \times \mathrm{Ran}(F_{Y_{\mathbf{j}}})$.

Będziemy rozważać pola losowe $\left\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\right\}$, dla których dwuwymiarowa kopuła spełnia warunek

$$C_{X_{\mathbf{i}},X_{\mathbf{j}}}(u,v) - uv \leq q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} uv(1-u)(1-v), \tag{5.6}$$

gdy $(u,v) \in \mathrm{Ran}(F_{X_{\mathbf{i}}}) \times \mathrm{Ran}(F_{Y_{\mathbf{j}}})$ i $q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \geq 0$ dla każdego $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$. Zauważmy, że warunek (5.6) możemy przedstawić w następującej równoważnej postaci

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X_{\mathbf{i}} \leq s, X_{\mathbf{j}} \leq t\right) - \mathbb{P}\left(X_{\mathbf{i}} \leq s\right) \mathbb{P}\left(X_{\mathbf{j}} \leq t\right) \\ &\leq q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \mathbb{P}\left(X_{\mathbf{i}} \leq s\right) \mathbb{P}\left(X_{\,\mathbf{j}} \leq t\right) \mathbb{P}\left(X_{\mathbf{i}} > s\right) \mathbb{P}\left(X_{\mathbf{j}} > t\right), \end{aligned} \tag{5.7}$$

dla każdego $s, t \in \mathbb{R}$.

Struktura zależności określona warunkiem (5.7) zawiera w sobie pola losowe (ciągi zmiennych losowych) parami ujemnie (kwadrantowo) zależne, (w szczególności parami niezależne), jak również struktury określone kopułami Farlie-Gumbela-Morgersterna, Ali-Mikhaila-Haqa i rodziną kopuł Plucketta. Rozważane pola losowe są również powiązane z polami zmiennych asymptotycznie kwadrantowo niezależnych i asymptotycznie kwadrantowo subniezależnych.

Fundamentalną rolę w dowodach twierdzeń pełni wersja drugiego lematu Borela-Cantelli'ego, dla zdarzeń parami zależnych o strukturze zależności rozważanego pola losowego.

Lemat 5.2. ([H5], lemat 3.3) *Niech $\left\{A_{\mathbf{n}} \in \mathfrak{F},\, \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d\right\}$ będzie pewną rodziną zdarzeń określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ oraz $\left\{q_{\mathbf{i},\mathbf{j}},\, \mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathcal{S}_\theta^d\right\}$ polem liczb dodatnich, które razem spełniają warunki:*

(i) $\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d} \mathbb{P}\left(A_{\mathbf{n}}\right) = \infty$,

(ii) istnieje takie $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{S}_\theta^d$, że dla wszystkich $\mathbf{k},\mathbf{j} \in \widehat{\mathcal{S}}_\theta^d(\mathbf{n}_0)$
$\mathbb{P}\left(A_{\mathbf{k}} \cap A_{\mathbf{j}}\right) - \mathbb{P}\left(A_{\mathbf{k}}\right) \mathbb{P}\left(A_{\mathbf{j}}\right) \leq q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \mathbb{P}\left(A_{\mathbf{k}}\right) \mathbb{P}\left(A_{\mathbf{j}}\right)$,

(iii) $\sup\limits_{\mathbf{k},\mathbf{j}\in\widehat{\mathcal{S}}_\theta^d(\mathbf{n}_0)} q_{\mathbf{k},\mathbf{j}} < \infty,$

gdzie $\widehat{\mathcal{S}}_\theta^d(\mathbf{n}) := \mathcal{S}_\theta^d \setminus (\mathbf{n})$ *dla* $\mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d$.
Wówczas dla dowolnego $\mathbf{m} \not\leq \mathbf{n}_0$

$$\mathbb{P}\left(A_{\mathbf{n}}, i.o.\ \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d\right) \geq \frac{1}{1 + \sup_{\mathbf{k},\mathbf{j}\in\widehat{\mathcal{S}}_\theta^d(\mathbf{m})} q_{\mathbf{k},\mathbf{j}}}.$$

Lemat (5.2) pozwala udowodnić następujące dwa twierdzenia. Pierwsze z nich można porównać z wynikiem zawartym w pracy [68], gdzie autor zajmuje się klasą pól losowych o strukturze zależności asymptotycznie kwadrantowo sub-niezależnej, czyli węższą klasą pól losowych niż rozważane przez nas. Dodatkowo zakłada, że pole liczbowe współczynników mających wpływ na zależność w tej strukturze – $q_{\mathbf{k},\mathbf{j}}$ jest zależne od $\max|\mathbf{k}-\mathbf{j}|$, my nie czynimy żadnych założeń tego typu. Ponadto, podajemy warunki konieczne i wystarczające, zaś w pracy [68] spotykamy tylko warunek wystarczający.

Dla zwięzłości sformułowania tego twierdzenia, wprowadźmy niezbędne oznaczenia:

$$\mathcal{S}_\theta^d(\mathbf{n}) := \mathcal{S}_\theta^d \cap (\mathbf{n}), \qquad \mathcal{S}_\theta^d(|\mathbf{n}|) := \left\{\mathbf{i} \in \mathcal{S}_\theta^d : |\mathbf{i}| \leq |\mathbf{n}|\right\}.$$

Twierdzenie 5.3. ([H5], tw. 2.1) *Niech* $\left\{X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d\right\}$ *będzie polem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, strukturze zależności określonej warunkiem (5.6) i takim, że*

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{S}_\theta^d} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{S}_\theta^d(|\mathbf{j}|),\mathbf{i}\neq\mathbf{j}} |\mathbf{j}|^{-2} q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} < \infty \ \ i \sup_{\mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathcal{S}_\theta^d} q_{\mathbf{k},\mathbf{j}} < \infty. \tag{5.8}$$

Przy powyższych założeniach, następujące warunki są równoważne:

$$(i) \qquad \lim(\max)\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{S}_\theta^d(\mathbf{n})} (X_{\mathbf{k}} - m_{\mathbf{k}}) \to 0 \quad p.p., \tag{5.9}$$

$$(ii) \qquad \begin{array}{ll} \mathbb{E}\,|X|\left(\log^+|X|\right)^{d-1} < \infty, & \textit{jeśli } \theta = 0, \\ \mathbb{E}\,|X| < \infty, & \textit{jeśli } \theta \in (0,1). \end{array} \tag{5.10}$$

Bardziej klasyczna wersja tego mocnego prawa wielkich liczb dla parami zależnych zmiennych losowych spełniających warunek (5.6) może być sformułowana w następujący sposób.

Twierdzenie 5.4. ([H5], tw. 2.2) *Niech* $\left\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d\right\}$ *będzie polem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, strukturze zależności określonej warunkiem (5.6) oraz spełniającym (5.8). Wówczas, warunek (5.10) jest równoważny następującemu – istnieje taka stała c, że*

$$\lim(\max)\frac{1}{M_\theta\left(\mathbf{n}\right)}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{S}_\theta^d(\mathbf{n})} X_{\mathbf{k}} \to c,\ \ p.p., \tag{5.11}$$

gdzie $M_\theta\left(\mathbf{n}\right) := Card(\mathcal{S}_\theta^d(\mathbf{n}))$.
Jeśli (5.10) jest spełnione, to $c = \mathbb{E}X$.

Wielu autorów, zajmujących się twierdzeniami tego typu, koncentrowało się na uogólnieniach nieskończonego podzbioru $A \subset \mathbb{N}^d$. Można tu wymienić prace: Bassa, Pyke'a [7] i [8], Klesova [67] (por. tw. 9.8 uogólniające brzeg sektora do postaci funkcyjnej), Klesova i Rychlika [66], Indlekofera i Klesova [59]. We wszystkich tych pracach otrzymano mocne prawa wielkich liczb Kołmogorowa dla pól niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. W naszych badaniach stwierdzamy, że sektor jest wystarczający dla zastosowań statystycznych. Skupiamy się wyłącznie na uogólnieniu struktury pola losowego i (lub) mocnych praw wielkich liczb dla zbieżności sektorialnej.

V Lista prac naukowych niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

Prace opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora

[C1] Weak convergence of probability measures on the function space $D_d[0, \infty)$. *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.* **34** (1986), 329–335. (Współautor: Z.Rychlik)

[C2] Convergence rates in the strong law of large numbers for sums of random variables with multidimensional indices. *Proba. Math. Stat.* **7** (1986), 150–158. (Współautor: Z.Rychlik)

[C3] Rate of convergence in the strong law of large numbers for martingales. Probab. *Theory Relat. Fields* **71** (1986), 467–476. (Współautor: Z.Rychlik)

[C4] Complete convergence and convergence rates for randomly indexed sums of random variables with multidimensional indices. *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.* **33** (1985), 219–223. (Współautor: Z.Rychlik)

[C5] Some remarks on the strong law of large numbers for random fields. *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.* **32** (1984), 129–134. (Współautor: Z.Rychlik)

[C6] Opis deformacji ośrodka słomiastego pod wpływem działania zespołu podbieracza, *Prace Instytutu Technologii i Eksploatacji Maszyn Politechniki Lubelskiej*, C-3 (1983), 182–184. (Współautor: M.Panasiewicz)

Prace opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora

[D1] On the Feller strong law of large numbers for fields of B-valued random variables. *Math. Pannonica* **5**, No. 2 (1994), 249–254.

[D2] Rates of convergence in the weak law for martingale random fields. *Teor. Veroyatn. Mat. Stat./Theory Probab. Math. Stat.* **2** (1993), 119–130. (Współautor: Z. Rychlik)

[D3] Fuk's inequalities for stochastic fields of reversed martingales, *Sib. Math. J.* **32** **2** (1991), 176–179.

[D4] Weak convergence of sequences of random elements with multidimensional random indices. *Publ. Math.* **37** No.1-2 (1990), 35–40. (Współautor: Z. Rychlik)

[D5] Probabilities of moderate deviations for randomly indexed sums of random variables with multidimensional indices. *Probab. Math. Stat.* **9**, No. 1 (1988), 115–123.

[D6] Algorytm wyboru form organizacyjnych mechanizacji. *Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej w Krakowie* **268** z. 10 (1992), 167–176. (Współautor: E. Lorencowicz)

[D7] Optymalizacja zestawów maszynowych i form organizacji mechanizacji w gospodarstwach indywidualnych, *Zagadnienia Ekonomiki Rolniczej* **1-3**, (1992) 57–71. (Współautor: E. Lorencowicz)

[D8] Pewne zastosowania ETO w analizie ekonomicznej procesu mechanizacji prac polowych, *Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej w Krakowie*, **235** (1989), 97–103. (Współautor: E. Lorencowicz)

[D9] Algorytmizacja doboru zestawów ciągnikowo-maszynowych w gospodarstwach indywidualnych, *Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej w Krakowie*, **235** (1989), 81–89. (Współautor: E. Lorencowicz)

[D10] Wpływ sprężystości łanu zboża na efektywność współpracy elementów roboczych zespołu żniwnego, *Roczniki Nauk Rolniczych PAN*, **321** (1987), 55–63. (Współautorzy: A. Fijołek, A. Marciniak)

[D11] Związki pomiędzy parametrami łanu zboża a geometrią zespołu żniwnego, *Roczniki Nauk Rolniczych PAN*, **77** C-2 (1987), 129–135. (Współautorzy: M. Panasiewicz, A. Marciniak)

[D12] Równanie ruchu masy zbożowej w zespole żniwnym, *Roczniki Nauk Rolniczych PAN*, **77** C-2, (1987), 137–143. (Współautorzy: A. Marciniak, A. Turski)

[D13] Geometria zespołu żniwnego kombajnu zbożowego. Cz. II. Zagadnienia Probabilistyczne, *Roczniki Nauk Rolniczych PAN*, **77** C-2 (1987), 189–194. (Współautorzy: A. Fijołek, A. Marciniak, J. Orzechowski)

[D14] Geometria zespołu żniwnego kombajnu zbożowego. Cz.I. Zagadnienia deterministyczne, *Roczniki Nauk Rolniczych PAN*, **77** C-2 (1987), 181–187. (Współautorzy: A. Fijołek, A. Marciniak, J. Orzechowski)

[D15] Analiza kinematyczna mechanizmu napędzającego igły podające sznurek w prasie Z-224, *Maszyny i Ciągniki Rolnicze* **2** (1987). (Współautor: A. Fijołek)

VI Opis dorobku niewchodzącego w skład osiągnięcia naukowego

1 Słaba zbieżność pól elementów losowych

Ten rozdział oparty jest na wynikach uzyskanych w pracy [D4], w której zajmujemy się słabą zbieżnością pól elementów losowych o wartościach w przestrzeni metrycznej. Takie problemy pojawiają podczas badania słabej zbieżności procesów stochastycznych, procesów empirycznych lub losowo zatrzymywanych sum empirycznych utworzonych z próbek z rozkładu ciągłego z „czasem" w $\mathbb{R}^q$. W ogólniejszym kontekście takie wyniki mogą stanowić podstawy do zastosowań pól losowych w biologii, propagacji fal elektromagnetycznych rozchodzących się w ośrodku o losowych parametrach lub w badaniu przepływów turbulentnych.

Twierdzenia pochodzące z pracy [D4] uogólniają lub uzupełniają wyniki zawarte w publikacjach: [3], [4], [9], [10], [29] i [31].

1.1 Słaba zbieżność pól z losowym indeksem

Będziemy rozważać pole losowe $\{Y_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ określone na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, o wartościach w ośrodkowej przestrzeni metrycznej (S, ρ), z σ-ciałem zbiorów borelowskich $\mathfrak{B}$. Niech ponadto $\{\mathbf{N}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie d-wymiarowym polem zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, mówiąc dokładniej $\mathbf{N}_{\mathbf{n}} = (N_{\mathbf{n}}^{(1)}, N_{\mathbf{n}}^{(2)}, \ldots, N_{\mathbf{n}}^{(d)})$, gdzie $N_{\mathbf{n}}^{(i)}$ dla każdego $1 \leq i \ \leq d$ oraz $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ jest zmienną losową przyjmującą wartości naturalne.

Niech Y będzie elementem losowym o wartościach w przestrzeni metrycznej (S, ρ) o rozkładzie μ oraz

$$\lim(\min) Y_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu. \tag{1.1}$$

Podajemy warunki wystarczające (w większości przypadków również konieczne) jakie powinno spełniać pole losowe $\{Y_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$, by zagwarantować zbieżność

$$\lim(\min) Y_{N_{\mathbf{n}}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu, \tag{1.2}$$

nie nakładając żadnych warunków na zależność probabilistyczną pomiędzy polem losowym $\{Y_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ i polem losowych indeksów $\{\mathbf{N}_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$.

Jeśli założymy, że pole losowe $\{Y_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ spełnia następujący uogólniony warunek Anscombiego:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \quad \limsup_{\min \mathbf{n}\to\infty} \mathbb{P}(\max_{\mathbf{i}\in D_{\mathbf{n}}(\delta)} \rho(Y_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{n}}) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon, \tag{1.3}$$

gdzie

$$D_{\mathbf{n}}(\delta) := \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d : |k_{\mathbf{i}} - k_{\mathbf{n}}| \leq \delta k_{\mathbf{n}}\}$$

a $\{k_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest takim polem liczb nieujemnych, że $\lim(\max) k_{\mathbf{n}} \to \infty$, to warunek (1.1) jest równoważny warunkowi (1.2), jeśli

$$\lim(\min) k_{\mathbf{N}_{\mathbf{n}}}/k_{\mathbf{a}_{\mathbf{n}}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \tag{1.4}$$

dla pewnego pola liczbowego $\{\mathbf{a}_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ przyjmującego wartości w $\mathbb{N}^d$ oraz takiego, że $\min \mathbf{a}_{\mathbf{n}} \to \infty$, gdy $\min \mathbf{n} \to \infty$.

Interpretację pola liczbowego $\{k_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$, które wykorzystywaliśmy w uogólnionym warunku Anscombiego, znajdziemy we wniosku z twierdzenia 1, podanym w pracy [D4]. Mianowicie, jeżeli przyjmiemy $Y_{\mathbf{n}} := S_{\mathbf{n}}/B_{\mathbf{n}}$, gdzie $S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$ a $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest takim polem niezależnych zmiennych losowych, że $\mathbb{E} X_{\mathbf{n}} = 0$, $\mathbb{E} S_{\mathbf{n}}^2 = B_{\mathbf{n}}^2 < \infty$, oraz $B_{\mathbf{n}} \to \infty$ gdy $\min \mathbf{n} \to \infty$, wtedy (1.1) i (1.2) są równoważne, gdy w warunku Anscombiego użyjemy pola liczbowego $k_{\mathbf{n}} = B_{\mathbf{n}}^2$.

W tej części podrozdziału będziemy przedstawiać warunki wystarczające i konieczne dla zbieżności (1.2), osłabiając warunek (1.4), nakładany na pole losowe $\{\mathbf{N}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$. kosztem wzmocnienia założeń na pole losowe $\{Y_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$, o którym będziemy zakładać, że

$$\lim(\min) Y_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu \quad \text{(stabilnie)}. \tag{1.5}$$

Warunek analogiczny do warunku Anscombiego tym razem zachodzi dla dowolnego zdarzenia $A \in \mathfrak{B}$:

$$\limsup_{\min \mathbf{n}\to\infty} \mathbb{P}_A(\max_{\mathbf{i}\in D_{\mathbf{n}}(\delta)} d(Y_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{n}}) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon \mathbb{P}(A), \tag{1.6}$$

natomiast pole losowe $\{\mathbf{N_n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ musi spełniać warunek, który żąda, aby dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istniał skończony, rozłączny i mierzalny podział przestrzeni Ω na zdarzenia $\{A_1, \dots, A_M\}$ oraz takie d-wymiarowe pole liczbowe $\{\mathbf{a}_{\mathbf{n}_j} \in \mathbb{N}^d\}$, $1 \le j \le M$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, że $\min \mathbf{a}_{\mathbf{n}_j} \to \infty$, gdy $\min \mathbf{n}_j \to \infty$; i spełniona jest nierówność

$$\limsup_{\min \mathbf{n} \to \infty} \sum_{j=1}^{M} \mathbb{P}_{A_j}(|k_{\mathbf{N_n}} - k_{\mathbf{a}_{\mathbf{n}_j}}| > \delta k_{\mathbf{a}_{\mathbf{n}_j}}) \le \varepsilon, \tag{1.7}$$

gdzie $\{k_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest takim polem liczb jak w warunku Anscombiego (1.3). W pracy [D4] zwracamy uwagę, że jeśli założymy (1.5) i utrzymamy pozostałe założenia, to otrzymamy również zbieżność stabilną w (1.2). Z drugiej strony, jak pokazuje twierdzenie 3 z pracy [D4], aby otrzymać (1.2) z warunkiem (1.7), nie możemy osłabić założenia $Y_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu$ (stabilnie).

Przedstawione wyniki, w głównej mierze, uogólniały twierdzenia Aldousa zawarte w pracy [3] – do niestacjonarnych pól losowych.

1.2 Losowe funkcjonalne CTG

W tej części podrozdziału przedstawiamy funkcjonalne centralne twierdzenie graniczne, dla elementów losowych przyjmujących wartości w pewnej przestrzeni metrycznej i posiadających wielowymiarowy losowy indeks. Jeśli tą przestrzenią metryczną będzie zbiór wszystkich funkcji określonych na $T_d = \langle 0, \infty)^d$, „ciągłych z góry i posiadających granice z dołu” (por. def. w [73]), to elementy losowe o wartościach w tej przestrzeni są bardzo ważną klasą procesów stochastycznych. Wyniki dla słabej zbieżności takich elementów losowych, mogą znaleźć zastosowanie w analizie słabej zbieżności procesów empirycznych.

Wyniki, które omawiamy uogólniają główne twierdzenia zawarte w pracach: [4], [9], [10], [29] i [31]. By przedstawić je dokładniej, musimy wprowadzić kilka dodatkowych oznaczeń. Na zbiorze wszystkich funkcji „ciągłych z góry i posiadających granice z dołu” określonych na zbiorze T_d wprowadzamy metrykę ϱ (por. def. w [73]); powstałą przestrzeń metryczną oznaczamy $(D_d\,[0,\infty)\,,\varrho)$, okazuje się ona być ośrodkową i zupełną (por. [73]). W dalszej części tego podrozdziału iloczyn wektorów i pól d-wymiarowych będziemy rozumieć jako iloczyn macierzowy, to znaczy: niech $\mathbf{q}, \mathbf{t} \in T_d$ i $0 < |\mathbf{q}| < \infty$ oraz $\mathbf{p_n} = (p_{\mathbf{n}}^{(1)}, ..., p_{\mathbf{n}}^{(d)})$, gdzie $p_{\mathbf{n}}^i \in T_d$ dla $1 \le i \le d$, wtedy

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{t} := (q_1 t_1, ..., q_d t_d), \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{p_n} := (t_1 p_{\mathbf{n}}^{(1)}, ..., t_d p_{\mathbf{n}}^{(d)}).$$

Dla dowolnego, ustalonego $0 < \alpha < \infty$ definiujemy odwzorowanie

$$F_{\mathbf{q}}x(t) = |\mathbf{q}|^{-\alpha}x(q_1t_1, ..., q_dt_d),$$

określone na – i o wartościach w przestrzenni $D_d\,[0, \infty)$.

Niech $Z = Z(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in T_d$ będzie elementem losowym o wartościach w $D_d\,[0, \infty)$, $\{\mathbf{k_n} = (k_{\mathbf{n}}^{(1)}, ..., k_{\mathbf{n}}^{(d)}),\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ takim d-wymiarowym, dodatnim polem liczbowym, że $|\mathbf{k_n}| = \prod_{i=1}^{d} k_{\mathbf{n}}^{(i)} \to \infty$, gdy $\min \mathbf{n} \to \infty$ oraz $\mathbf{n} \preceq \mathbf{m}$ implikuje $|\mathbf{k_n}| \leq |\mathbf{k_m}|$. Wówczas dla ustalonego $0 < \alpha < \infty$, każdego $\mathbf{t} \in T_d$ i $\mathbf{k_n} \in T_d^+$ określamy pole elementów losowych

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) := |\mathbf{k_n}|^{-\alpha}Z(\mathbf{t} \cdot \mathbf{k_n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{1.8}$$

Dla takiego pola losowego, następujące warunki są równoważne (por. [D4], tw. 4):

(i) $\lim(\min)Y_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu$ (stabilnie),

(ii) $\lim(\min)Y_{\mathbf{N_n}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu$, dla dowolnego pola losowego $\{\mathbf{N_n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ spełniającego warunek (1.7).

Przytoczmy kilka uwag do tego wyniku, podanych w pracy [D4]:

- procesy rozważane w pracach: [9], [10] i [29] są szczególnymi przypadkami procesu określonego w (1.8);
- warunek (1.7) jest najsłabszym z możliwych, przy którym nie nakładamy żadnych warunków na strukturę zależności pomiędzy polami losowymi $\{Y_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ i $\{\mathbf{N_n},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$;
- wobec powyższej uwagi, otrzymany wynik jest najlepszym z możliwych, w rozważanym aspekcie;
- wynik uogólniał prace [9], [10] i [31];
- równoważność pozostaje prawdziwa, jeżeli rozważania ograniczymy do przestrzeni $D_d[0, 1]$.

Jako zastosowanie otrzymano następujące losowe funkcjonalne twierdzenie graniczne (por. [D4], tw. 5]).

Niech $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) := (|\mathbf{n}|)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}} X_{\mathbf{k}}$, dla $\mathbf{t} \in T_d\,[0,1]$. Jeśli $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest takim stacjonarnym, ergodycznym polem przyrostów martyngałowych względem filtracji $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{n}} = \bigvee_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \sigma(X_{\mathbf{k}}),\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$, że $\mathbb{E}X_{\mathbf{n}}^2 = 1$, wówczas

$$\lim(\min) Y_{\mathbf{N_n}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} W \quad \text{w} \quad D_d\,[0,1]\,,$$

dla dowolnego pola $\{\mathbf{N_n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ spełniającego warunek (1.7) z polem normującym $\{k_{\mathbf{n}} = |n|,\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$, gdzie W jest d-parametrowym procesem Wienera.

2 MPWL Fellera dla pól elementów losowych

W tej części autoreferatu przedstawimy uogólnienie mocnego prawa wielkich typu Fellera dla pól elementów losowych przyjmujących wartości w przestrzeni Banacha $(\mathbb{B}, \|\ \|)$, korzystając z metod obserwacji granicznego zachowania się sum elementów losowych indeksowanych pewnymi podzbiorami $\mathbb{N}^d$.

Zacznijmy od dodatkowych oznaczeń i warunków. Niech $\{a_{\mathbf{n}},\ \in \mathbb{N}^d\}$ będzie takim polem liczb dodatnich, że $a_{\mathbf{n}} \to \infty$, gdy $\max \mathbf{n} \to \infty$, dla którego istnieje wstępujący ciąg $\{D_k,\ k\ \in \mathbb{N}\}$, skończonych podzbiorów $\mathbb{N}^d$ posiadających następujące własności:

(A) niech $I_k := D_k - D_{k-1},\ k\ \geq 1$, jeśli $\mathbf{n} \in I_k$, to $(\mathbf{n}) \subseteq D_k$;

(B) istnieją takie stałe $\tau > 1$ i $C_1, C_2 > 0$, że dla dowolnego k i $\mathbf{n} \in I_k$, spełniony jest warunek $C_1 \tau^k\ \leq a_{\mathbf{n}} \leq C_2 \tau^k$;

(C) dla dowolnego k istnieje rodzina rozłącznych prostokątów E_{kl} i odpowiednia zbiór indeksów R_k takich, że $I_k = \bigcup\limits_{l \in R_k} E_{kl}$;

(D) $\nu_0 \limsup \max\limits_{\mathbf{n} \in I_k} \tau^{-k} \sum\limits_{i=1} \tau^k\ |\{t \in R_i : E_{it} \cap (\mathbf{n}) \neq 0\}| < \infty$.

Warunki (A)-(D) zostały wprowadzone przez Mikosha i Norvaisę w pracy [84]. Taką własność pola liczbowego nazwano *„weak star property”* – WSP. Warunek wydaje się dziwny i skomplikowany, ale zredukowany do jednego wymiaru „zachowuje się tak jak potrzeba”: gdy $d = 1$, rosnący do nieskończoności ciąg $\{a_{\mathbf{n}},\ \in \mathbb{N}\}$ spełnia warunek WSP i założenie (2.2) implikuje znany warunek Fellera $\sum\limits_{k\ \geq n} a_k^{-2} = O(n/a_n^2)$.

Okazuje się (por. [83]), że aby otrzymać MPWL wystarczy, aby sumy elementów losowych indeksowanych zbiorami E_{kl} spełniały określony warunek asymptotyczny (jest to też warunek konieczny).

W pracy [D1] dowodzimy (por. lemat 2.2), że jeśli $\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem niezależnych, symetrycznych elementów losowych o wartościach w przestrzeni Banacha $\mathbb{B}$ oraz spełnione są następujące dwa warunki:

(i) $|X_{\mathbf{k}}| \leq a_{\mathbf{k}},\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$;

(ii) $\lim(\max) S_{\mathbf{n}}/a_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$;

to

$$\mathbb{E}\|S_{E_{kl}}/d^k\|^p \to 0, \quad \text{gdy} \quad k \to \infty, \quad \text{jednostajnie względem} \quad l \in R_k, \tag{2.1}$$

dla każdego $p > 0$.

Stosując powyższy lemat, możemy otrzymać uogólnienie MPWL typu Fellera (por. [D1], tw. 3.1). W celu sformułowania tego wyniku, wprowadźmy oznaczenia: $M_j := card\{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d :\ a_{\mathbf{n}} \leq j\}$ i $m_j := M_j - M_{j-1}$, dla każdego $j \geq 1$. Przypuśćmy ponadto, że istnieje liczba naturalna j_0 i takie dodatnie stałe $C_3,\ C_4$, że dla każdego $j \geq j_0$

$$M_j \leq C_3 M_{j-1}, \quad \sum_{i\ \geq j} i^{-3} M_i \ \leq C_4 j^{-2} M_j. \tag{2.2}$$

Jeśli $\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem elementów losowych o jednakowym rozkładzie i wartościach w przestrzeni Banacha $(\mathbb{B}, \|\ \|)$, $\{a_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ rosnącym do nieskończoności polem liczb nieujemnych, to następujące dwa warunki

$$\lim(\max) S_{\mathbf{n}}/a_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \tag{2.3}$$

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X_{\mathbf{n}}| \geq a_{\mathbf{n}}) < \infty, \tag{2.4}$$

są równoważne poniższemu

$$\lim(\max) S_{\mathbf{n}}/a_{\mathbf{n}} \to 0 \quad \text{p.p.} \tag{2.5}$$

Powyższy wynik pozwala na wiele wniosków. Kładąc $a_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}|^{1/p}$, $1 \leq p \leq 2$ i zakładając (2.2), otrzymujemy MPWL Marcinkiewicza dla pól elementów losowych udowodnione przez Fazekasa w pracy [40].

Jeśli założymy, że $a_{\mathbf{n}} = n_1^{1/p_1} \cdot \dots \cdot n_d^{1/p_d}$, gdzie $\mathbf{1} \preceq \mathbf{p} \prec \mathbf{2}$, możemy otrzymać wnioski korespondujące z wynikami przedstawionymi w rozdziale III; to znaczy otrzymujemy warunki konieczne i wystarczające dla mocnego prawa wielkich liczb z asymetrycznym normowaniem.

Zauważmy też, że twierdzenie zachowuje swoją prawdziwość, gdy w założeniach, słabe prawo wielkich liczb zastąpimy warunkami dotyczącymi geometrii przestrzeni Banacha (por. [D1], tw. 3.2).

3 Nierówności Fuka-Nagaeva dla martyngałów i odwróconych martyngałów

Zgodnie z tytułem, w tym rozdziale powracamy do nierówności Fuka-Nagaeva dla pól losowych o strukturze martyngału i odwróconego martyngału, przedstawiając wyniki zawarte w pracach [D2] i [D3].

3.1 Nierówności Fuka-Nagaeva dla pól losowych o strukturze martyngałowej

Czym się różnią wyniki podrozdziału 3.1 w części IV i podrozdziału niniejszego? Nierówność Fuka-Nagaeva przedstawiona w tym podrozdziale obowiązuje dla wymiaru zbioru indeksów $d = 2$, momentów warunkowych rzędu $r \geq 2$ i prawdopodobieństw ogonowych wyznaczonych przez pole liczbowe $\{y_{\mathbf{k}} > 0,\ \mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}\}$.

Niech więc $\{(X_{\mathbf{n}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}),\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^2\}$ będzie polem przyrostów martyngałowych (określonych w podrozdziale 2.2 w części IV) spełniających warunek $(F4)$ i $\mathbb{E}(X_{\mathbf{k}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}}) = 0$ p.p. dla $\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}$ (por. oznaczenia w rozdziale 3 w części IV). Ponadto, istnieją takie pola liczb dodatnich $\{b^2_{y_{\mathbf{k}}},\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^2\}$ i $\{a^r_{y_{\mathbf{k}}},\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^2\}$, że dla $\mathbf{j} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}$ mamy

$$\mathbb{E}(X^2_{\mathbf{k}}\mathbb{I}(X_{\mathbf{k}} \leq y_{\mathbf{k}})|\mathfrak{F}_{\mathbf{j}}) \leq b^2_{y_{\mathbf{k}}} \text{ p.p.} \tag{3.1}$$

i

$$\mathbb{E}(X^r_{\mathbf{k}}\mathbb{I}(0 \leq X_{\mathbf{k}} \leq y_{\mathbf{k}})|\mathfrak{F}_{\mathbf{j}}) \leq a^r_{y_{\mathbf{k}}} \text{ p.p.} \tag{3.2}$$

Przy tych założeniach, jeśli

$$\max[t, \ln(\beta x y^{t-1}/A_{t,Y} + 1)] > \alpha x y/(e^t B^2_Y), \tag{3.3}$$

to

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} S_{\mathbf{k}} \geq x) \leq & \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{P}(X_{\mathbf{k}} \geq y_{\mathbf{k}}) \\ & + 4^{d-1} \exp\left\{ \frac{\beta x}{y} - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{x}{y} \ln\left[\frac{\beta x y^{t-1}}{A_{t,Y}} + 1 \right] \right\},\end{aligned} \tag{3.4}$$

gdzie $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$, $B_Y^2 := \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} b_{y_{\mathbf{k}}}^2$, $A_{r,Y} := \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} a_{y_{\mathbf{k}}}^r$ oraz $y \geq \max\{y_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \preceq \mathbf{n}\}$; jeśli w warunku (3.3) założymy nierówność z przeciwnym zwrotem, to

$$\mathbb{P}(\max_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} S_{\mathbf{k}} \geq x) \leq \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{P}(X_{\mathbf{k}} \geq y_{\mathbf{k}}) + 4^{d-1} \exp\{-\alpha^2 x^2/(2e^r B_Y^2)\}. \tag{3.5}$$

Więcej nierówności, wniosków i komentarzy podajemy w pracy [D2].

3.2 Nierówności Fuka-Nagaeva dla pól losowych o strukturze odwróconego martyngału

Ze względu na niejako „symetryczność” definicji martyngału i odwróconego martyngału, która przenosi się na wiele wyników. Tutaj pokażemy na przykładzie jednej nierówności, że ma to miejsce w przypadku pól losowych i nierówności Fuka-Nagaeva.

Niech rodzina σ-ciał $\{\mathfrak{F}'_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^2\}$ będzie malejąca (zstępująca) względem porządku „$\preceq$” w zbiorze indeksów $\mathbb{N}^2$. Rodzinę $\{(S_{\mathbf{n}}, \mathfrak{F}'_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^2\}$ nazywamy polem losowym o strukturze odwróconego martyngału, jeśli spełnia warunki adaptowania i momentowe takie jak dla struktury martyngałowej oraz:

$$\mathbb{E}(S_{\mathbf{m}}|\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}) = S_{\mathbf{n}} \;\text{ p.p. dla } \mathbf{n} \succeq \mathbf{m},$$

$$\mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{F}_{\mathbf{i}}|\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}) = \mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{F}_{\mathbf{i}\vee\mathbf{k}}) \;\text{ p.p.}, \tag{3.6}$$

gdzie $\mathbf{i} \vee \mathbf{k} := (i_1 \vee k_1, \ldots, i_d \vee k_d)$. Warunek (3.6) pełni taką samą rolę jak warunek $(F4)$ dla pól losowych o strukturze martyngałowej.

Niech $\{y_{\mathbf{k}} > 0, \mathbf{k} \succeq \mathbf{n}\}$ będzie pole liczbowym i y jest taką liczbą, że $y \geq \sup\{y_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \succeq \mathbf{n}\}\}$, wtedy warunki (3.1) i (3.2) dla $\mathbf{j} \succeq \mathbf{k} \succeq \mathbf{n}$ mają postać:

$$\mathbb{E}(X_{\mathbf{k}}^2 \mathbb{I}(X_{\mathbf{k}} \leq y_{\mathbf{k}})|\mathfrak{F}'_{\mathbf{j}}) \leq b_{y_{\mathbf{k}}}^2 \;\text{ p.p.} \tag{3.7}$$

i

$$\mathbb{E}(X_{\mathbf{k}}^r \mathbb{I}(0 \le X_{\mathbf{k}} \le y_{\mathbf{k}})|\mathfrak{F}'_{\mathbf{j}}) \le a_{y_{\mathbf{k}}}^r \quad \text{p.p.} \tag{3.8}$$

Jeśli więc spełniony jest warunek

$$\mathbb{E}(X_{\mathbf{k}}\mathbb{I}(X_{\mathbf{k}} < y)|\mathcal{G}'_{\mathbf{k}+1}) \le 0 \text{ p.p., gdzie } \mathcal{G}'_{\mathbf{k+1}} := \bigvee_{\mathbf{j} \not\geq \mathbf{k}} \mathfrak{F}'_{\mathbf{j}}$$

oraz (3.6), (3.7), (3.8) i (3.3), to otrzymujemy nierówności Fuka-Nagaeva w postaci (3.4) i (3.5), przy czym operacje sup i sumowania odbywają się po zbiorze $\{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2 : \mathbf{k} \succeq \mathbf{n}\}$ (por. [D3]).

4 Szybkość zbieżności w losowym SPWL

Zgodnie z tytułem tego podrozdziału podamy wyniki określające szybkość zbieżności w słabym prawie wielkich liczb dla pól losowych o strukturze niezależności i martyngałowej, z losowymi indeksami ich sum częściowych. Mówiąc dokładniej, określimy rząd wielkości wyrażenia

$$h(t) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} f(\mathbf{n}) \mathbb{P}\left(|S_{\mathbf{N_n}}| \ge t|\mathbf{N}_n|^{1/2} g(\mathbf{N_n})\right), \quad \text{gdy} \quad t \to 0^+, \tag{4.1}$$

gdzie $\{\mathbf{N_n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem losowym o wartościach w $\mathbb{N}^d$.

4.1 Pola losowe ze strukturą niezależności

Ze względu na obszerność sformułowania wyników, które chcemy prezentować, ich omówienie ograniczymy do ogólnej idei, pomijając detale.

Gut w pracy [51] udowodnił losową wersję twierdzenia typu Bauma-Katza. Przy założeniach zbliżonych do klasycznej wersji tego wyniku, warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r - 2} \mathbb{P}(|N_n - \lambda n| > tn) < \infty, \tag{4.2}$$

gdzie λ jest taką zmienną losową, że $\mathbb{P}(a \le \lambda \le b) = 1$ dla pewnych $0 < a < b \le \infty$, implikował

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r - 2} \mathbb{P}(|S_{N_n}| > tN_n^{\alpha}) < \infty. \tag{4.3}$$

Wynik ten był przesłanką naszych badań i został uogólniony nie tylko w kierunku pól losowych i struktury zależności, ale podajemy także rząd wielkości znacznie ogólniejszej sumy. Oznaczmy:

$$H(r,s;t) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^r (log_+|\mathbf{n}|)^s \mathbb{P}(|\mathbf{N_n}| - \lambda|\mathbf{n}|| > t|\mathbf{n}|), \tag{4.4}$$

gdzie λ jest taką zmienną losową jak w warunku (4.2).

Jeśli

$$\lim(\max) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(S_{\mathbf{N_n}} < x|\mathbf{N_n}|^{1/2}) - \Phi(x)| \to 0, \tag{4.5}$$

to przy założeniach analogicznych jak w twierdzeniu Guta z pracy [51], istnieje taka stała C zależna od funkcji: f, g, h i wymiaru zbioru indeksów – d, że

$$\liminf_{t\to 0^+} h(t)\Big\{ \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} f(\mathbf{n})\mathbb{P}\left(|S_{\mathbf{N_n}}| \geq t|\mathbf{N}_n|^{1/2} g(\mathbf{N_n})\right) + H(r,s;t)\Big\} \geq C_{f,g,h;d}$$

i

$$\limsup_{t\to 0^+} h(t)\Big\{ \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} f(\mathbf{n})\mathbb{P}\left(|S_{\mathbf{N_n}}| \geq t|\mathbf{N}_n|^{1/2} g(\mathbf{N_n})\right) - H(r,s;t)\Big\} \leq C_{f,g,h;d}.$$

Dokładna specyfikacja funkcji i założeń zawarta jest w twierdzeniu 2, podanym w pracy [D5].

4.2 Pola losowe ze strukturą martyngałową

Podobnie jak w poprzednim podrozdziale, będziemy badać asymptotykę (4.1). Tu rozważamy pole losowe $\{X_{\mathbf{n}},\, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ o strukturze przyrostów martyngałowych. Z tych samych powodów jak poprzednio podamy tylko najważniejsze fakty dotyczące wyników. Jednak nie unikniemy kilku nowych oznaczeń:

$$F_a(\alpha,r,s,u) := \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^r (log^+|\mathbf{n}|)^s \Phi\left(-t a_{\mathbf{n}}^{\alpha}(t)(\log^+ a_{\mathbf{n}}(t))^u\right),$$

$$F_b(\alpha,r,s,u) := \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^r (log^+|\mathbf{n}|)^s \Phi\left(-t b_{\mathbf{n}}^{\alpha}(t)(\log^+ b_{\mathbf{n}}(t))^u\right),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego,

$$a_{\mathbf{n}} := (a-t)\zeta_{\mathbf{n}}^2, \qquad b_{\mathbf{n}} := (b+t)\zeta_{\mathbf{n}}^2,$$
$$\zeta_{\mathbf{n}}^2 := \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \sigma_{\mathbf{k}}^2 \quad \text{i} \quad \sigma_{\mathbf{k}}^2 := \mathbb{E}X_{\mathbf{k}}^2.$$

Jeśli więc rozważane pole losowe o strukturze przyrostów martyngałowych spełnia (4.5) oraz założenia twierdzenia Fuka-Nagaeva dla martyngałów z rozdziału trzeciego w części czwartej, to

$$\liminf_{t\to 0^+} h(t)\left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^r (log_+|\mathbf{n}|)^s \mathbb{P}(|S_{N_{\mathbf{n}}}| \geq tM_{\mathbf{n}}g(M_{\mathbf{n}})) + \widetilde{H}(r,s;t)\right) \geq \liminf_{t\to 0^+} F_b(\alpha,r,s,u)h(t)$$

i

$$\limsup_{t\to 0^+} h(t)\left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^r (log_+|\mathbf{n}|)^s \mathbb{P}(|S_{N_{\mathbf{n}}}| \geq tM_{\mathbf{n}}g(M_{\mathbf{n}})) - \widetilde{H}(r,s;t)\right) \leq \limsup_{t\to 0^+} F_a(\alpha,r,s,u)h(t),$$

gdzie

$$M_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{N_n}} \sigma_{\mathbf{k}}^2,\ \widetilde{H}(r,s;t) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^r (log_+|\mathbf{n}|)^s \mathbb{P}(|M_{\mathbf{n}} - \lambda\zeta_{\mathbf{n}}| > t\zeta_{\mathbf{n}}^2)$$

i λ jest taką zmienną losową jak w warunku (4.2).

Kompletna sformułowanie wyniku zawarte jest w twierdzeniu 3, podanym w pracy [D2].

5 Zastosowania w mechanizacji rolnictwa

W tym rozdziale omawiany pokrótce tematy badawcze zawarte w pracach [D6]–[D15]. Dotyczą one dwóch problemów. Pierwszy z nich to zadanie pochodzące z ekonomiki rolnictwa, drugi to modelowanie procesów zachodzących w maszynach rolniczych lub analiza istotnych mechanizmów maszyn rolniczych.

W pracach [D6]–[D9], które powstały w wyniku realizacji zadania badawczego „System gromadzenia i przetwarzania danych dla potrzeb doskonalenia i zarządzania gospodarstwami indywidualnymi", zajmujemy się pierwszym z problemów. Zbudowano model ekonomiki gospodarstwa rolnego, który bazował na założeniach o strukturze upraw i doborze zwierząt hodowlanych (te dane używane w naszym modelu pochodziły z segmentu badań rolnych zadania badawczego). Następnie opracowano algorytm optymalizujący park maszynowy w gospodarstwie rolnym, który maksymalizował funkcję celu – dochód dyspozycyjny rolnika. Program opracowany na tej podstawie miał służyć w doradztwie dla rolników indywidualnych, miał on dostarczyć kompleksowy projekt optymalnego wykorzystania areału posiadanego przez rolnika, uwzględniając dostępne zasoby siły roboczej. Badania były prowadzone pod koniec lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku, w absolutnych początkach komputeryzacji; hasło informatyzacji jeszcze wtedy nie istniało.

Drugi problem, o którym wspominaliśmy, to zagadnienia związane z konstrukcją maszyn rolniczych. W pracy [D15] na podstawie modelu mechanicznego utworzono model matematyczny mechanizmu napędzającego igły podającej sznurek w prasie do słomy. Częstym problemem w pracy tego elementu były zacięcia sznurka, z powodu jego nierównomiernego przesuwu. Analiza pracy mechanizmu dawała konstruktorom wskazówki, dotyczące wymiarów poszczególnych elementów mechanizmu, pozwalające na poprawę stabilności jego pracy.

W pracach [D10]–[D14] zajmujemy się badaniem przemieszczania się ściętej masy łanu, zaczynając od momentu ścięcia aż po podanie jej przenośnikiem ślimakowym do zespołu omłotowego w kombajnie zbożowym „Bizon". Osobnym modelem objęto ruch masy słomiastej w zespole omłotowym tego kombajnu. Do badania zastosowano układ trzech tzw. szybkich kamer rejestrujących około 1000 klatek na sekundę (w latach osiemdziesiątych było to metoda bardzo nowoczesna), co pozwalało na rejestrację ruchu w trzech wymiarach. Naprężenia w różnych miejscach maszyny mierzono czujnikami tensometrycznymi. Modelowanie takich zjawisk jest niezwykle trudne z powodu bardzo różnych parametrów koszonego łanu: wysokości, wilgotności, zachwaszczenia, sprężystości, różnorodności koszonych roślin (na przykład zbóż i rzepaku). Trudno ująć zmienność tych cech nawet statystycznie, a w rolnictwie polskim zbierano takie plony jedną maszyną. Jednym z celów badań było określenie zakresu regulacji: listwy tnącej, nagarniacza i jego parametrów oraz ślimaka przenoszącego skoszoną masę słomiastą do zespołu omłotowego. Wyznaczenie tych parametrów mogłoby zapewnić bardziej efektywną pracę maszyny przy zbiorze roślin o różnych parametrach łanu. Dalej podjęto wstępną próbę modelowania matematycznego kolejnego procesu zachodzącego w kombajnie - procesu omłotu.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$:=$ – równe z definicji, $\stackrel{ozn}{=}$ – oznacza;
$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ – przestrzeń probabilistyczna, Ω – zbiór, $\mathfrak{F}$ – σ-ciało podzbiorów Ω, $\mathbb{P}$ – prawdopodobieństwo;
$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 \stackrel{ozn}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{N}^d := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ – produkt d zbiorów;
$\mathbf{m} \stackrel{ozn}{=} (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{n} \stackrel{ozn}{=} (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$;
$D \stackrel{ozn}{=} \{1, 2 \dots, d\}$, $\emptyset \neq J \subseteq D$ i $CJ := D \setminus J$;
$\mathbf{m} \preceq \mathbf{n} \iff m_i \leq n_i$ dla każdego $i \in D$;
$\mathbf{m} \wedge \mathbf{n} := (m_1 \wedge n_1, \dots, m_d \wedge n_d)$;
X, $X(\omega)$ – zmienne losowe określone na przestrzeni probabilistycznej;
$\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ – pole losowe;
$S_{\mathbf{n}} := \sum\limits_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$
$\min \mathbf{n} := \min\limits_{i \in D} n_i$;
$\max \mathbf{n} := \max\limits_{i \in D} n_i$;
$|\mathbf{n}| := \prod\limits_{i \in D} n_i$;
$\|\mathbf{n}\|_D := \max\limits_{i \in D} |n_i|$;
$(\mathbf{n}) := \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}\}$;
$\mathfrak{F}^J_{\mathbf{n}} := \bigvee\limits_{(n_j \in \mathbb{N}, j \in CJ)} \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}$, $\mathfrak{F}^J_{\mathbf{n}} := \sigma\{\bigcup\limits_{(n_j \in \mathbb{N}, j \in CJ)} \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}\}$;
$\mathfrak{F}^j_{\mathbf{n}} \stackrel{ozn}{=} \mathfrak{F}^J_{\mathbf{n}}$, jeśli $J = \{j\}$;
$\mathcal{G}_{\mathbf{n}} := \bigvee\limits_{j=1}^{d} \mathfrak{F}^j_{\mathbf{n}}$;
$\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{n-1}} := \mathcal{G}_{\mathbf{n-1}} \wedge \mathfrak{F}_{\mathbf{n}}$, gdzie $\mathbf{n} - \mathbf{1} := (n_1 - 1, n_2 - 1, ..., n_d - 1)$;
$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)$;
$\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}} := (n_1^{\alpha_1}, n_2^{\alpha_2}, \dots, n_d^{\alpha_d})$, $|\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}}| := n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot n_d^{\alpha_d}$;
$p := \max\{k : \alpha_k = \alpha_1\}$;
$\mathcal{S}^d_\theta = \left\{(i_1, ..., i_d) \in \mathbb{N}^d : \theta < \frac{i_l}{i_k} < \frac{1}{\theta}, \text{ dla wszystkich } l \neq k \in D\right\}$;

$d_\theta(k) = \mathrm{card}\left\{\mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d : |\mathbf{n}| = k\right\},\ k \in \mathbb{N}$;
$M_\theta(k) = \mathrm{card}\left\{\mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d : |\mathbf{n}| \leq k\right\},\ k \in \mathbb{N}$;
$\widehat{\mathcal{S}}_\theta^d(\mathbf{n}) := \mathcal{S}_\theta^d \setminus (\mathbf{n}),\ \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d$;
$\mathcal{S}_\theta^d(\mathbf{n}) := \mathcal{S}_\theta^d \cap (\mathbf{n}),\ \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d$;
$\mathcal{S}_\theta^d(|\mathbf{n}|) := \left\{\mathbf{i} \in \mathcal{S}_\theta^d : |\mathbf{i}| \leq |\mathbf{n}|\right\},\ \mathbf{n} \in \mathcal{S}_\theta^d$;
$Y_\mathbf{n} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu$ gdy $\min \mathbf{n} \to \infty$, zbieżność według rozkładu;
$\mathbf{i} \vee \mathbf{k} := (i_1 \vee k_1, \ldots, i_d \vee k_d)$;
$\mathcal{G}'_{\mathbf{k+1}} := \bigvee_{\mathbf{j} \not\geq \mathbf{k}} \mathfrak{F}'_\mathbf{j}$;

Bibliografia

[1] A. de Acosta, Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers, *Ann. Probab.* **9** (1981), 157–161.

[2] O. Ahmad, J.-C. Pinoli, On the linear combination of the Gaussian and student's t random field and the integral geometry of its excursion sets, *Statist. Probab. Lett.* **83** (2013), 559–567.

[3] D.J. Aldous, Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **83** (1978), 117–126.

[4] F.J. Anscombe, Large-sample theory of sequential estimation, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **48** (1952), 600–607.

[5] H.A. Azarnoosch, A. Bozorgnia, The strong law of large numbers for pairwise negatively dependent random variables, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.* **28** (2004), 211–217.

[6] K.A. Astbury, The order convergence of martingales indexed by directed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **265** (1981),495–510.

[7] R. Bass, R. Pyke, A strong law of large numbers for partial sum processes indexed by sets, *Ann. Probab.* **12** (1984), 268–271.

[8] R. Bass, R. Pyke, Functional law of the iterated logarithm and uniform central limit theorem for partial-sum processes indexed by sets, *Ann. Probab.* **12** (1984), 13–34.

[9] A.K. Basu, C.C.Y. Dorea, On functional central limit theorem for stationary martingale random fields, *Acta Math. Hung.* **33**(1979), 307–316.

[10] P.J. Bickel, M.J. Wichura, Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications, *Ann. Math. Stat.* **42** (1971), 1656–1670.

[11] S. Bochner, Partial ordering in the theory of martingales, *Ann. of Math.* **62** (1955), 162–169.

[12] V.M. Borodikhin, On generalization of the Nagaev-Fuk inequalities for a class of random fields, *Sib. Math. J.* **36** (1995), 1101–1107.

[13] A. Bozorgnia, R.F. Patterson, R.L. Taylor, Limit theorems for ND random variables, *Technical Report*, University of Georgia (1993).

[14] A. Bulinski, A. Shashkin, Limit theorems for associated random fields and related systems, *World Scientific*, Hackensack, NJ (2007).

[15] D.L. Burkholder, A maximal inequalities as necessary condition, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* **3** (1964), 75–88.

[16] R. Cairoli, Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin **124** (1970), 1–27.

[17] R. Cairoli, J.B. Walsh, *Acta Math.* Stochastic integrals in the plane, **134** (1975), 111–183.

[18] J. Cao, K.J. Worsley, Applications of random fields in human brain mapping, *Lecture Notes in Statistics*, Springer **159** (2001), 170–182.

[19] J. Cao, K.J. Worsley, The geometry of correlation fields with an application to functional connectivity of the brain, *Ann. Appl. Probab.* **9** (1999), 1021–1057.

[20] F. Carbonell, K.J. Worsleya, N.J. Trujillo-Barreto, M. Vega-Hernandez, The geometry of time-varying cross-correlation random fields, *Comput. Stat. Data Anal.* **53** (2009), 3291–3304.

[21] S.D. Chatterji, Comments on the martingale convergence theorem, *Symposium on Probability Methods in Analysis*, Loutraki (1967), 55–61.

[22] S.D. Chatterji, Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, *Math. Scand.* **22** (1968), 21–41.

[23] T.C. Christofides, R.J. Serfling, Maximal inequalities for multidimensionally indexed submartingale arrays, *Ann. Probab.* **18** (1990), 630–641.

[24] Y. Chen, C.Y. Kam, Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation, *Stochastic Models*, **25** (2009), 76–89.

[25] D. Cheng, Randomly weighted sums of dependent random variables with dominated variation, *J. Math. Anal. Appl.* **420** (2014), 1617–1633.

[26] K.L. Chung, A course in probability theory, 2nd ed., *Academic Press*, New York-London (1974).

[27] J.A. Cuesta, C. Matran, On the asymptotic behavior of sums of pairwise independent random variabies, *Statist. Probab. Lett.* **11** (1991), 201–210.

[28] S. Csörgő, K. Tandori, V. Totik, On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables, *Acta Math. Hung.* **42** (1983), 319–330.

[29] M. Csörgő, Z. Rychlik, Weak convergence of sequences of random elements with random indices, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **88** (1980) , 171–174.

[30] S. Csörgő, K. Tandori, V. Totik, On the convergence of series of pairwise independent random variables, *Acta Math. Hung.* **45** (1985), 445–450.

[31] C.M. Deo, A Functional Central Limit Theorem for Stationary Random Fields, *Ann. Probab.* **3** (1975), 708–715.

[32] J. Dieudonné, Sur un thèoremé de Jessen, *Fund. Math.* **37** (1950), 242–248.

[33] Q. Dehua, K.C. Chang, R. Giuliano Antonini, A.Volodin, On the strong rates of convergence for arrays of rowwise negatively dependent random variables, *Stochastic Anal. Appl.* **29** (2011), 375–385.

[34] L.E. Dubins, J. Pitman, A divergent, two-parameter, bounded martingale, *Proc. Am. Math. Soc.* **78** (1980), 414–416.

[35] N. Dunford, An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **14** (1951), 1–4.

[36] G.A. Edgar, L. Sucheston, Stopping times and directed processes, *Cambridge Univ. Press* (1992).

[37] V.A. Egorov, A generalization of the Hartman-Wintner theorem on the law of the iterated logarithm, (Russian) *Vestn. Leningr. Univ., Math.* **7** (1971), 22–28.

[38] N. Etemadi, An elementary proof of the strong law of large numbers, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* **55** (1981), 119–122.

[39] V. Fakoor, H.A. Azarnoosh, Probability inequalities for sums of negatively dependent random variables, *Pakistan J. Stat.* **12** (2005), 257–264.

[40] I. Fazekas, Marcinkiewicz strong law of large numbers for $\mathbb{B}$-valued random variables with multidimensional indices, *Proc. of 3rd Pannonian Symp. on Math. Stat.* (1983), 53–61.

[41] I. Fazekas, O.I. Klesov, A general approach to the strong laws of large numbers, *Theory Probab. Appl.* **45** (2002), 436–449.

[42] J.P. Gabriel, Loi des grands nombres, séries et martingales á deux indices, *C. R. Acad. Sci. Sér. A* **279** (1974), 169–171.

[43] A. Gadidov, Sectorial convergence of U-statistics, *Ann. Probab.* **23** (2005), 816–822.

[44] Q. Gao, N. Jin, H. Shen, Asymptotic behavior of the finite-time ruin probability with pairwise quasi-asymptotically independent claims and constant interest force, *Rocky Mt. J. Math.* **44** (2014), 1505–1528.

[45] Q. Gao, N. Jin, Randomly Weighted Sums of pairwise quasi upper-tail independent increments with application to risk theory, *Commun. Stat., Theory Methods* **44** (2015), 3885–3902.

[46] Q. Gao, Y. Yang, Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability in a general risk model with pairwise quasi-asymptotically independent claims and constant interest force, *Bull. Korean Math. Soc.* **50** (2013), 611–626.

[47] S. Ghosal, T.K. Chandra, Complete convergence of martingale arrays, *J. Theor. Probab.* **11** (1998), 621–631.

[48] A. Gut, Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers with multidimensional indices, *Ann. Probab.* **6** (1978), 469–482.

[49] A. Gut, Convergence rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables with multidimensional indices, *Ann. Probab.* **8** (1980), 298–313.

[50] A. Gut, Strong laws for independent identically distributed random variables indexed by a sector, *Ann. Probab.* **11** (1983), 569–577.

[51] A. Gut, Complete convergence and convergence rates for randomly indexed partial sums with an application to some first passage times, *Acta Math. Hung.* **42** (1983), 225–232.

[52] A. Gut, U. Stadtmüller, Cesàro summation for random fields, *J. Theor. Probab.* **23** (2010), 715–728.

[53] A. Gut, U. Stadtmüller, On the Hsu-Robbins-Erdös-Spitzer-Baum-Katz theorem for random fields, *J. Math. Anal. Appl.* **387** (2012), 447–463.

[54] A. Gut, U. Stadtmüller, An asymmetric Marcinkiewicz–Zygmund LLN for random fields, *Statist. Probab. Lett.* **79** (2009), 1016–1020.

[55] A. Gut, Probability, A Graduate Course, 2nd ed., Springer-Verlag, New York (2007).

[56] J. Hoffmann-Jørgensen, K.-L. Su, R.L. Taylor, The law of large numbers and the Ito-Nisio theorem for vector valued random fields, *J. Theor. Probab.* **10** (1997), 145–183.

[57] T.-C. Hu, A. Rosalsky, A. Volodin, A complete convergence theorem for row sums from arrays of rowwise independent random elements in Rademacher type p Banach spaces, *Stochastic Anal. Appl.* **30** (2012), 343–353.

[58] R. Jajte, On the strong law of large numbers, *Ann. Probab.* **31** (2003), 409–412.

[59] K.-H. Indlekofer, O.I. Klesov, Strong law of large numbers for multiple sums whose indices belong to a sector with function boundaries, *Theory Probab. Appl.*, **52** (2008), 711–719.

[60] K. Joag-Dev, F. Proschan, Negative association of random variables with applications, *Ann. Statist.* **11** (1983), 286–295.

[61] D. Khoshnevisan, Multiparameter processes. An introduction to random fields, *Springer Monographs in Mathematics* **xix** (2002), 584 p.

[62] O.I. Klesov, The Hájek-Rényi inequality for random fields and the strong law of large numbers, (Russian) *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.* **22** (1980), 58–66.

[63] O.I. Klesov, The three-series theorem for random fields with independent values, (Ukrainian) *Visnik Kiïv. Univ. Ser. Mat. Mekh.* **22** (1980), 35–40.

[64] O.I. Klesov, The law of the iterated logarithm for multiple sums, (Russian) *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.* **27** (1982), 60–67.

[65] O.I. Klesov, The strong law of large numbers for multiple sums of independent identically distributed random variables, *Math. Notes* **38** (1986), 1006–1014.

[66] O. Klesov, Z. Rychlik, The strong law of large numbers on partially ordered sets, *Theory Probab. Math. Stat.* **58** (1999), 35–41.

[67] O.I. Klesov, Limit theorem for multi-indexed sums of random variables, Springer-Verlag (2014).

[68] M.-H. Ko, T.-S. Kim, H.-C. Kim, Strong laws of large numbers for asymptotically quadrant independent random variables, *Commun. Korean Math. Soc.* **19** (2004), 765–773.

[69] K. Krickeberg, Convergence of martingales with a directed index set, *Trans. Amer. Math. Soc.* **83** (1956), 313–337.

[70] V. Kruglov, A. Volodin, T.-C. Hu, On complete convergence for arrays, *Statist. Probab. Lett.* **76** (2006), 1631–1640.

[71] A. Kuczmaszewska, On complete covergence in Marcinkiewicz-Zygmund type SLLN for negatively associated random variables, *Acta Math. Hung.* **128** (2010), 116–130.

[72] Z.A. Lagodowski, Fuk's inequalities for stochastic fields of reversed martingales, *Sib. Math. J.* **32** (1991), 176–179.

[73] Z.A. Łagodowski, Z. Rychlik, Weak convergence of probability measures on the function space $D_d[0,\infty)$, *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.* **34** (1986), 329–335.

[74] Z.A. Lagodowski, Z. Rychlik, Rates of convergence in the weak law for martingale random fields, *Theory Probab. Math. Stat.* **2** (1993), 119–130.

[75] J. Li, On pairwise quasi-asymptotically independent random variables and their applications, *Statist. Probab. Lett.* **83** (2013), 2081–2087.

[76] A.I. Martikainen, Order of growth of a random field, *Math. Notes* **39** (1986), 431–437.

[77] A. Martikainen, On the asymptotic behavior of sums of pairwise independent random variabies, *Statist. Probab. Lett.* **25** (1995), 21–26.

[78] P. Matuła, A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables, *Statist. Probab. Lett.* **15** (1992), 209–213.

[79] P. Matuła, On some families of AQSI random variables and related strong law of large numbers, *Appl. Math. E-Notes* **5** (2005), 31–35.

[80] E. Merzbach, Stopping for two-dimensional stochastic processes, *Stochastic Processes Appl.* **10** (1980), 49–63.

[81] E. Merzbach, Extension and continuity of the stochastic integral in the plane, *Notes Sem. Proc. Aleatoires et Applic. Telecommunications* **5** (1981), 79–88.

[82] E. Merzbach, M. Zakai, Stopping a two-parameter weak martingale, *Probab. Theory Relat. Fields* **76** (1987), 499–507.

[83] T. Mikosh, On the strong law of large numbers for random fields, *Vestnik Leningrad. Univ., ser. Mat., Mech., Astr.* **19** (1984), 82–85.

[84] T. Mikosh, R. Norvaisa, Strong laws of large numbers for fields of Banach space valued random variables, *Probab. Theory Relat. Fields* **74** (1987), 241–253.

[85] A. Millet, L. Sucheston, Characterization of Vitali conditions with overlap in terms of convergence of classes of amarts, *Can. J. Math.* **31** (1979), 1033–1046.

[86] A. Millet, L. Sucheston, A Characterization of Vitali Conditions in Terms of Maximal Inequalities, *Ann. Probab.* **8** (1980), 339–349.

[87] F.C. Móricz, U. Stadtmüller, Summability of double sequences by weighted mean methods and Tauberian conditions for convergence in Pringsheim's sense, *Int. J. Math. Math. Sci.* **65–68** (2004), 3499–3511.

[88] F.C. Móricz, Tauberian theorems for Cesàro summamble double sequences, *Stud. Math.* **110** (1994), 83–96.

[89] R.B. Nelsen, An introduction to copulas, Springer-Verlag, New York (1999).

[90] J. Neveu, Discrete Parameter Martingales, revised ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1975).

[91] M. Peligrad, Maximum of partial sums and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 1181–1189.

[92] M. Peligrad, A. Gut, Almost-sure results for class of dependent random variables, *J. Theor. Probab.* **12** (1999), 87–104.

[93] A.R. Pruss, Randomly sampled Riemann sums and complete convergence in the law of large numbers for a case without identical distribution, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996) 919–929.

[94] A. Rosalsky, L.V. Than, Strong and weak laws of large numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type p Banach spaces, *Stochastic Anal. Appl.* **24** (2006), 1097–1117.

[95] G. Roussas, Asymptotic normality of random fields of positively or negatively associated processes, *J. Multivariate Anal.* **50** (1994), 152–173.

[96] Q.M. Shao, A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables, *J. Theor. Probab.* **13** (2000), 343–356.

[97] G.R. Shorack, R.T. Smythe, Inequalities for $\max|S_k|/b_k$ where $\mathbf{k} \in N^r$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **54** (1976), 331–336.

[98] R.T. Smythe, Strong law of large numbers for r-dimensional arrays of random variables, *Ann. Probab.* **1** (1973), 164–170.

[99] R. Smythe, Sums of independent random variables on partially ordered sets, *Ann. Probab.* **2** (1974), 906–917.

[100] T.C. Son, D.H. Thang, The Brunk-Prokhorov strong law of large numbers for fields of martingale differences taking values in a Banach space, *Statist. Probab. Lett.* **83** (2013), 1901–1910.

[101] S.H. Sung, On Complete convergence for arrays of dependent random variables, *Commun. Stat., Theory Methods* **41** (2012), 1663–1674.

[102] S.H. Sung, A.I. Volodin, T.-Ch. Hu, More on complete convergence for arrays, *Statist. Probab. Lett.* **71** (2005), 303–311.

[103] J.E. Taylor, K.J. Worsley, Random fields of multivariate test statistics, with applications to shape analysis, *Ann. Stat.* **36** (2008), 1–27.

[104] J.B. Walsh, Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. *Lectures in probability and statistics*, Springer (1986), 329–491.

[105] M. Wichura, Inequalities with applications to the weak convergence of Random processes with multi-dimensional time parameters, *Ann. Math. Stat.* **40** (1969), 681–687.

[106] N. Wiener, The ergodic theorem, *Duke Math. J.* **5** (1939), 1–18.

[107] E. Wong, M. Zakai, Weak martingales and stochastic integrals in the plane, *Ann. Probab.* **4** (1976), 570–586.

[108] E. Wong, M. Zakai, Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* 29 (1974), 109–122.

[109] K.J. Worsley, J. Cao, T. Paus, M. Petrides, A.C. Evans, Applications of random field theory to functional connectivity, *Hum. Brain Mapping* **6** (1998), 364–367.

[110] K.J. Worsley, K.J. Friston, A test for a conjunction, *Statist. Probab. Lett.* **47** (2000), 135–140.

[111] K.J. Worsley, Brain mapping data: classification, principal components and multidimensional scaling, *New Developments in Psychometrics*, Proceedings of the International Meeting of the Psychometric Society, Springer, Japan **2003**, 585–592.

[112] W.A. Woyczynski, On Marcinkiewicz strong law of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence, *Probab. Math. Stat.* **1** (1980), 117–131.

[113] M. Zakai, Some classes of two-parameter martingales, *Ann. Probab.* **9** (1981), 255–265.

[114] L. Zhang, Y. Miao, J. Mu, J. Xu, Complete convergence for weighted sums of mixingale sequences and statistical applications, *Commun. Stat., Theory Methods* **46** (2017), 10692–10701.

[115] L.X. Zhang, J. Wen, A weak convergence for negatively associated fields, *Statist. Probab. Lett.* **53** (2001), 259–267.

[116] A. Zygmund, An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **14** (1951), 103–110.

[117] X. Yang, K.-A. Fu, A Hoffmann–Jørgensen inequality of NA random variables with applications to the convergence rate, *Math. Inequal. Appl.* **16** (2013), 313–328.