Autoreferat

1 Imię i nazwisko: Jerzy Legut

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne:

- Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, Politechnika Wrocławska, 1984 (czerwiec) Temat rozprawy doktorskiej: *Gry sprawiedliwego podziału.*
  Promotor: prof. dr hab. Rastislav Telgarsky
- Magister inżynier matematyki, specjalność: matematyka stosowana, Politechnika Wrocławska, 1981 (lipiec), dyplom z wyróżnieniem. Temat pracy magisterskiej: *Gry sprawiedliwego podziału i twierdzenie Lapunowa.*
  Promotor: prof. dr hab. Rastislav Telgarsky

3 Zatrudnienie w jednostkach naukowych.

- Politechnika Wrocławska, Wydział Matematyki,
  - 2017 - adiunkt
  - 2016-2017 starszy wykładowca
- Politechnika Wrocławska, Wydział Podstawowych Problemów Techniki,
  - 1987-1994 adiunkt
  - 1984-1987 wykładowca
  - 1981-1984 asystent

4 Ogólny opis dorobku naukowego

Moje dotychczasowe badania mają cztery części składowe:

- wykorzystanie teorii gier do problemów sprawiedliwego podziału,
- zastosowania wyników sprawiedliwego podziału w ekonomii matematycznej,
- badanie własności obrazu bezatomowej miary wektorowej oraz ich wykorzystanie w teorii sprawiedliwego podziału,
- metody optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej i ich zastosowania w teorii sprawiedliwego podziału oraz teorii decyzji.

Główne wyniki dwóch pierwszych części mojej działalności naukowej uzyskano w latach 1984-1994. Większość tych wyników opublikowano w artykułach będących w bazie czasopism JCR (Journal Citation Reports). Niektóre z nich były prezentowane na dwóch międzynarodowych konferencjach poświęconych teorii gier w USA (1988, 1991). Byłem również zapraszany przez różne uniwersytety (z USA, Izraelu, Holandii) do wygłaszania wykładów na temat moich wyników uzyskanych w tamtym czasie. Nawiązałem także współpracę z matematykami z Holandii specjalizującymi się w teorii gier, w wyniku której zostały napisane i opublikowane dwa wspólne artykuły.

Po dwudziestu latach przerwy w mojej działalności naukowej wróciłem do pracy nad problemami sprawiedliwego podziału. Skoncentrowałem się na badaniach, których tematyka została ujęta w dwóch ostatnich wyżej wymienionych punktach. Moja rozprawa habilitacyjna dotyczy osiągnięć uzyskanych w tym obszarze. Te wyniki zostały opublikowane w 7 artykułach, z których trzy znajdują się w bazie Journal Citation Reports (JCR). Szacowana [1] łączna punktacja wszystkich artykułów napisanych przeze mnie oraz ze współautorami wynosi około 375 według systemu punktacji MNiSW. W tej liczbie łączna punktacja prac stanowiących osiągnięcie naukowe wynosi 125. Liczba cytowań wszystkich moich artykułów wynosi 32 według Web of Science (w tej liczbie nie ma autocytowań).

Badania naukowe dotyczące tematyki podziału przestrzeni mierzalnej kontynuuję wspólnie z innymi autorami. Najnowsze wyniki tych badań zostały zawarte w trzech nieopublikowanych jeszcze artykułach ([35, 36, 37]).

5 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.).

(a) Tytuł:

Metody optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej

(b) Lista publikacji składających się na osiągnięcie naukowe

H1. Legut J. and Wilczyński M.: *How to obtain a range of a nonatomic vector measure in* $\mathbb{R}^2$, J. Math. Anal. Appl. 394, 102-111 (2012)

H2. Dall'Aglio M., Legut J., Wilczyński M.: *On Finding Optimal Partitions of a Measurable Space*, Mathematica Applicanda, vol. 43(2), 193-206 (2015)

H3. Legut J.: *Optimal Fair Division for Measures with Piecewise Linear density Functions,* International Game Theory Review, vol. 19, No. 2, 175009, (2017)

H4. Legut J.: *Connecting two points in the range of a vector measure*, Colloquium Mathematicum, vol. 153, No. 2, 163-167 (2018)

H5. Legut J.: *How to obtain an equitable optimal fair division* Ann. Oper. Res. published on line, https://doi.org/10.1007/s10479-018-3053-2 , (2018)

H6. Legut J.: *On a method of obtaining an approximate solution of an exact fair division problem,* Mathematica Applicanda, vol. 46 (2), 245-256 (2018)

[1] Ponieważ punktacja czasopism opublikowanych przed 2010 r. nie jest dostępna, wziąłem pod uwagę w moich obliczeniach najwcześniejsze dostępne dane na ten temat.

H7. Jóźwiak I. and Legut J.: *Minimax decision rules for identifying an unknown distribution of a random variable,* Proceedings of 39th International Conference on Information Systems Architecture and Technology, ISAT 308-317 (2018)

(c) Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Spis treści

5.1 Streszczenie głównych wyników uzyskanych w publikacjach składających się na osiągnięcie naukowe

Najważniejsze osiągnięcia naukowe dotyczą metod wyznaczania optymalnych partycji przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$, gdy dane są bezatomowe miary $\{\mu_i\}_{i=1}^n$. Rozpatrywane są różne pojęcia optymalności. Poniżej przedstawiam krótkie omówienie wyników uzyskanych w każdej pracy. Bardziej wyczerpujące omówienie znajduje się w rozdziale 5.2.
W artykule **[H1]** przedstawiono konstruktywną metodę wyznaczania obrazu dwuwymiarowej miary bezatomowej. Autorzy pokazali, jak uzyskać funkcję, która opisuje brzeg wypukłego i zwartego obrazu miary wektorowej danej przez funkcje gęstości. Według mojej wiedzy, jest to pierwszy taki wynik dotyczący konstrukcji obrazu miary wektorowej dla dowolnych funkcji gęstości. Ta konstrukcja może być zastosowana w teorii sprawiedliwego podziału do wyznaczania różnych typów partycji. W pracy przedstawiono kilka przykładów ilustrujących omawianą metodę oraz jej zastosowania.
W pracy **[H2]** zaprezentowano pewien algorytm wyznaczania przybliżonych optymalnych partycji przedziału jednostkowego $[0, 1)$ według danych bezatomowych miar $\{\mu_i\}_{i=1}^n$. Algorytm ten polega na aproksymacji funkcji gęstości funkcjami prostymi. Optymalna partycja dla miar zdefiniowanych przez gęstości będące funkcjami prostymi jest wyznaczana przy pomocy programowania liniowego. Autorzy wykorzystali tę metodę do oszacowania wartości optymalnej podziału dla dowolnych funkcji gęstości. W pracy przedstawiony jest przykład ilustrujący metodę przybliżonego wyznaczania podziałów optymalnych. Ponadto oszacowano minimalną liczbę cięć odcinka $[0, 1)$ wystarczającą do uzyskania podziałów optymalnych dla funkcji prostych.
Z kolei w pracy **[H3]** wykorzystano metodę programowania nieliniowego do wyznaczania optymalnego podziału odcinka $[0, 1)$ pomiędzy n graczy, których preferencje opisane są za pomocą bezatomowych miar probabilistycznych $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ zdefiniowanych przez kawałkami liniowe (PWL) funkcje gęstości. Przedstawiony algorytm może być również wykorzystany do wyznaczania przybliżonego optymalnego podziału dla miar zdefiniowanych przez funkcje gęstości, które mogą być aproksymowane przez funkcje PWL. W pracy podano również minimalną liczbę cięć wystarczającą do uzyskania podziałów optymalnych.
W pracy **[H4]** rozważałem pewne własności obrazu bezatomowej miary wektorowej $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ zdefiniowanej na mierzalnych podzbiorach $\mathcal{B}$ odcinka jednostkowego $[0, 1]$. Niech $\mathcal{U}(k)$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów będących sumą nie więcej niż k parami rozłącznych podprzedziałów $[0, 1]$. Pokazałem, że jeśli $A \in \mathcal{U}(k)$, to odcinek łączący punkt $(0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ oraz punkt $\mu(A)$ jest zawarty w zbiorze $\mu(\mathcal{U}(n + k - 1))$. Co więcej, okazuje się, że jeśli $B, C \in \mathcal{U}(k)$, to odcinek łączący punkt $\mu(B)$ oraz punkt $\mu(C)$ jest zawarty w zbiorze $\mu(\mathcal{U}(2n + 4k - 3))$. Wykorzystałem tą własność do przedstawienia jeszcze jednego dowodu słynnego twierdzenia Lapunowa dotyczącego wypukłości obrazu bezatomowej miary wektorowej. W pracy **[H4]** omówiono również przypadek dwuwymiarowy dla specyficznych miar oraz zaprezentowano pewne wnioski.
W artykule **[H5]** wykorzystałem metody programowania nieliniowego do wyznaczenia równomiernie optymalnego podziału odcinka jednostkowego $[0, 1)$ pomiędzy n graczy. W

tym przypadku preferencje graczy są opisane przez bezatomowe miary probabilistyczne zdefiniowane przez funkcje gęstości posiadające kawałkami ściśle monotoniczne ilorazy wiarogodności (SMLR). Przykładowo wielomiany dodatniego stopnia mają tą własność. W pracy przedstawiłem przykład ilustrujący opisaną metodę dla trzech graczy.
W pracy **[H6]** zaproponowałem algorytm wyznaczania przybliżonego rozwiązania problemu ściśle sprawiedliwego podziału odcinka jednostkowego $[0, 1]$. Podział $P = \{A_i\}_{i=1}^n$ nazywamy ściśle sprawiedliwym, jeśli $\mu_i(A_j) = 1/n$ dla każdego $i, j = 1, ..., n$ oraz $\cup_i A_i = [0, 1]$. Taki podział jest optymalny w sensie teorii sprawiedliwego podziału, tzn. jest jednocześnie proporcjonalny, wolny od zazdrości oraz równomierny. W pracy przedstawiłem iteracyjny algorytm oparty na twierdzeniu Alona [1]. Ponadto przedstawiłem przykład ilustrujący ten algorytm dla trzech graczy.
Artykuł **[H7]** został opublikowany w materiałach z konferencji indeksowanej w Web of Science. Dotyczy on zastosowania teorii optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej w teorii decyzji. Autorzy rozważali dwuwymiarowy przypadek zagadnienia identyfikacji nieznanego rozkładu zmiennej losowej oraz rozwiązali problem wyznaczenia minimaksowej reguły decyzyjnej dla pewnych rozkładów prawdopodobieństwa zdefiniowanych na kwadracie jednostkowym.

5.2 Wstęp

5.2.1 Definicja α-optymalnych podziałów

Podamy najpierw podstawowe definicje, twierdzenia oraz motywacje dla rozwijania teorii sprawiedliwego podziału.

Niech $\{\mu_i\}_{i=1}^n$, $(n > 1)$, będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$. Partycją (podziałem) $P = \{A_i\}_{i=1}^n$ tej przestrzeni nazywamy rodzinę $\mathcal{B}$-mierzalnych, parami rozłącznych zbiorów $A_1, \ldots, A_n$, których suma jest równa $\mathcal{X}$. Oznaczmy przez $\mathscr{P}$ zbiór wszystkich mierzalnych partycji $P = \{A_i\}_{i=1}^n$ zbioru $\mathcal{X}$. Niech

$$S_n = \{s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n, s_i > 0,\, i \in I,\, \sum_{i=1}^n s_i = 1\},$$

będzie $(n-1)$-wymiarowym otwartym sympleksem oraz niech $\overline{S}_n$ oznacza domknięcie tego zbioru w $\mathbb{R}^n$. Niech $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_n$ oraz $I := \{1, ..., n\}$.

Definicja 5.1. Partycję $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ nazywamy α-optymalną, jeśli spełnia następującą równość:

$$v^\alpha(\vec{\mu}) := \min_{i \in I} \left[\frac{\mu_i(A_i^*)}{\alpha_i}\right] = \sup_{P \in \mathscr{P}} \min_{i \in I} \left[\frac{\mu_i(A_i)}{\alpha_i}\right]. \tag{5.1}$$

Liczba $v^\alpha(\vec{\mu})$ oznacza największą możliwą wartość wyrażenia $\min_{i \in I}\left[\frac{\mu_i(A_i^*)}{\alpha_i}\right]$, która może być osiągnięta dla miary wektorowej $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ przy podziale obiektu $\mathcal{X}$ dla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_n$.

Liczbę $v^\alpha(\vec{\mu})$ (lub v^α w skrócie) nazywamy *α-optymalną wartością* problemu podziału przestrzeni mierzalnej.

Definicja 5.2. Partycję $P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ nazywamy *równomiernie optymalną* (lub krótko *optymalną*), jeśli jest α-optymalna dla $\alpha = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in S_n$.

Liczbę $v = v^\alpha(\vec{\mu})/n$ nazywamy *wartością optymalną* dla równomiernie optymalnego podziału, tj. dla podziału α-optymalnego, gdzie $\alpha = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in S_n$.

Istnienie α-optymalnych podziałów wynika z następującego twierdzenia Dvoretzky'ego, Walda i Wolfowitza [18]:

Twierdzenie 5.3. *Jeśli $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ są skończonymi miarami bezatomowymi zdefiniowanymi na przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$, to zbiór $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ jest wypukły i zwarty w $\mathbb{R}^n$, gdzie odwzorowanie $\vec{\mu}$: $\mathscr{P} \to \mathbb{R}^n$ zdefiniowane jest następująco*

$$\vec{\mu}(P) = (\mu_1(A_1), \ldots, \mu_n(A_n))\,, P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}.$$

5.2.2 Ogólna postać α-optymalnych podziałów

Ogólna postać α-optymalnego podziału może być pomocna w pewnych sytuacjach do znalezienia konstruktywnych metod optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej. Możemy założyć, że wszystkie bezatomowe miary $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ są absolutnie ciągłe względem tej samej miary ν (np. $\nu = \sum_{i=1}^n \mu_i$). Oznaczmy przez $f_i = d\mu_i/d\nu$ pochodne Radona-Nikodyma:

$$\mu_i(A) = \int_A f_i \, d\nu, \; A \in \mathcal{B}, \; i \in I.$$

Dla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_n$, $p = (p_1, ..., p_n) \in \overline{S}_n$ oraz $i \in I$, zdefiniujmy następujące zbiory mierzalne:

$$B_i(p) = \bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} \left\{x \in \mathcal{X} : p_i\alpha_i^{-1} f_i(x) > p_j \alpha_j^{-1} f_j(x)\right\},$$

$$C_i(p) = \bigcap_{j=1}^{n} \left\{x \in \mathcal{X} : p_i\alpha_i^{-1} f_i(x) \geqslant p_j \alpha_j^{-1} f_j(x)\right\}.$$

Legut i Wilczyński [33] korzystając z minimaksowego twierdzenia Siona (por. [2]) udowodnili następujące:

Twierdzenie 5.4. *Dla dowolnego $\alpha \in S_n$ istnieje $p^* \in \overline{S}_n$ oraz α-optymalna partycja $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n$ spełniająca następujące warunki:*

(i) $B_i(p^*) \subset A_i^* \subset C_i(p^*)$,

(ii) $v^\alpha(\vec{\mu}) = \dfrac{\mu_1(A_1^*)}{\alpha_1} = \dfrac{\mu_2(A_2^*)}{\alpha_2} = \ldots = \dfrac{\mu_n(A_n^*)}{\alpha_n}$.

Co więcej, dowolna partycja $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n$, która spełnia warunki (i) oraz (ii) jest α-optymalna.

Legut i Wilczyński [33] udowodnili również, że

$$v^\alpha(\vec{\mu}) = \max\left\{t \geqslant 1 : t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \; \vec{\mu}(\mathscr{P})\right\}.$$

Twierdzenie 5.4 podaje ogólną postać α-optymalnych podziałów, ale niestety w przypadku dowolnych funkcji gęstości f_i, $i \in I$, wyznaczenie liczb $p_1^*, ..., p_n^*$, nie jest łatwe.

5.2.3 Zastosowania α-optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej

Zastosowania w teorii sprawiedliwego podziału

Problem α-optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$ może być interpretowany jako problem sprawiedliwego podziału obiektu $\mathcal{X}$ (np. tortu). Przypuśćmy, że grupa ponumerowanych graczy $I = \{1, ..., n\}$ jest zainteresowana w sprawiedliwym podziale tortu, tj. w taki sposób, żeby każdy z nich otrzymał kawałek tortu, który dla każdego z nich jest przynajmniej wart $1/n$ wartości całego tortu. Każda miara μ_i, $i \in I$, opisuje indywidualną ocenę i-tego gracza wartości zbiorów należących do $\mathcal{B}$. W literaturze teorii sprawiedliwego podziału rozważane są różne kryteria sprawiedliwości.

Definicja 5.5. Podział $P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ nazywamy:

- proporcjonalnym (proportional), jeśli $\mu_i(A_i) \geqslant 1/n$ dla każdego $i \in I$,
- wolnym od zazdrości (envy-free), jeśli $\mu_i(A_i) \geqslant \mu_i(A_j)$ dla każdego $i, j \in I$,
- ściśle sprawiedliwym (exact), jeśli $\mu_i(A_j) = 1/n$ dla każdego $i, j \in I$,
- równomiernym (equitable), jeśli $\mu_i(A_i) = \mu_j(A_j)$ dla każdego $i, j \in I$.

Problemy sprawiedliwego podziału są rozważane w wielu wariantach uwzględniających różne kryteria sprawiedliwości oraz rodzaje obiektów, które mają być podzielone. Analizowane są różne preferencje graczy oraz kryteria oceniające jakość podziałów. W literaturze dotyczącej teorii sprawiedliwego podziału dominują następujące trzy kierunki:

- dowodzenie istnienia partycji obiektu $\mathcal{X}$ spełniającej ustalone kryteria (np. Dubins i Spanier [16], Legut i Wilczyński [33, 34], Sagara [45], Weller [54]),
- szukanie procedur lub algorytmów uzyskiwania sprawiedliwych podziałów oraz zastosowanie ich w praktyce (np. Brams i Taylor [5, 6], Brams, Taylor i Zwicker [7, 8], Woodall [55]),
- wyznaczanie najlepszego oszacowania dla optymalnej wartości v i α-optymalnej wartości $v^{\alpha}(\vec{\mu})$ oraz znalezienie algorytmów uzyskiwania α-optymalnych podziałów (np. Dall'Aglio i Di Luca [15, 14], Dall'Aglio, Legut i Wilczyński [H2], Elton, Hill i Kertz, [19], Legut [28], [H3], [H5]).

Legut [29, 30] analizował problem sprawiedliwego podziału tortu dla nieskończonej i przeliczalnej liczby graczy, a także zaproponował model sprawiedliwego podziału, w którym uczestniczy nieprzeliczalna liczba graczy. Wyniki uzyskane w teorii sprawiedliwego podziału znajdują szerokie zastosowanie w ekonomii, między innymi w modelowaniu wymiany i alokacji różnorodnych towarów (por. [31, 32, 40, 46]).

Znanych jest wiele algorytmów uzyskiwania podziałów proporcjonalnych (por. [6]). Prostą i dobrze znaną metodą uzyskania podziału proporcjonalnego dla dwóch graczy jest reguła: "jeden dzieli, drugi wybiera". W roku 1944 Steinhaus zadał pytanie, czy ta reguła może być rozszerzona w podziale tortu pomiędzy n graczy dla $n > 2$. Sam znalazł rozwiązanie dla $n = 3$, a następnie Banach i Knaster (por. [26], [50], [51], [52]) pokazali, że rozwiązanie dla $n = 2$ może być uogólnione na dowolną liczbę graczy. Ich wynik został później zmodyfikowany przez Dubinsa i Spaniera [16]. Z kolei Fink [20] podał algorytm, w którym liczba graczy nie musi być znana. Brams i Taylor [5] odkryli ciekawą metodę uzyskania partycji wolnej od zazdrości, w której żaden z graczy nie jest zainteresowany żadnym kawałkiem tortu przydzielonemu innemu graczowi.

Problem proporcjonalnego sprawiedliwego podziału staje się bardziej realistyczny, jeśli założymy, że gracze nie mają takiej samej pozycji w grze, ale muszą podzielić tort według ustalonych z góry indywidualnych udziałów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, gdzie $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$. W tym przypadku gracze są zainteresowani wyznaczeniem partycji $P = \{A_i\}_{i=1}^n$ spełniającej dla każdego $i \in I$, nierówności:

$$\mu_i(A_i) \geqslant \alpha_i. \tag{5.2}$$

Wśród podziałów spełniających warunki (5.2) chcemy wyznaczyć taką partycję $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n$, która maksymalizuje wyrażenie $\min_{i\in I} \left[\frac{\mu_i(A_i)}{\alpha_i}\right]$. Oznacza to, że należy znaleźć α-optymalną wartość $v^\alpha(\vec{\mu})$ zdefiniowaną przez (5.1) oraz efektywną metodę wyznaczania α-optymalnych partycji. Pierwsze oszacowanie wartości optymalnej v zostało uzyskane przez Eltona, Hilla i Kertza w [19], a następnie Legut [28] uogólnił ich wynik dla dowolnego α podając lepsze oszacowanie dla v^α. Ciekawy algorytm uzyskania oszacowania wartości α-optymalnej został znaleziony przez Dall'Aglio i Di Luca [15]. W literaturze sprawiedliwego podziału znanych jest niewiele metod uzyskiwania optymalnych partycji. Przykładowo Dall'Aglio i Di Luca [14] znaleźli algorytm wyznaczający partycje w przybliżeniu optymalne poprzez konstrukcję pewnej gry. Większość znanych metod uzyskiwania optymalnych partycji została znaleziona przez autora tej rozprawy.

Zastosowania do identyfikacji nieznanego rozkładu zmiennej losowej

Problem optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$ może być traktowany również jako problem klasyfikacji (por. [21, 24], [H7]). Przypuśćmy, że ciągła zmienna losowa X ma jeden ze znanych rozkładów opisanych funkcjami gęstości $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+,\ i \in I$, nie wiemy jednak, która z tych gęstości opisuje prawdziwy rozkład tej zmiennej. Rozpatrujemy problem klasyfikacji (por. [21]), w którym na podstawie jednej obserwacji $X(\omega)$ (realizacji zmiennej losowej X) mamy zdecydować, jaki jest jej prawdziwy rozkład.

Definicja 5.6. Partycję $P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ utożsamiamy z następującą *regułą decyzyjną*: jeśli $X(\omega) \in A_i$, to do opisu rozkładu X wybieramy funkcję gęstości f_i.

Naszym celem jest zminimalizowanie (prawdopodobieństw błędnej klasyfikacji)

$$\max_{i\in I} \mathbb{P}(X \notin A_i |\, \mathrm{dist} X = f_i),$$

po wszystkich mierzalnych partycjach $P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$. Definiujemy

$$R = \inf \left\{ \max_{i\in I} \mathbb{P}(X \notin A_i |\, \mathrm{dist} X = f_i) : \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P} \right\},$$

minimalne ryzyko błędnej klasyfikacji. Wtedy otrzymamy (por. [24],[H7])

$$R = \inf \left\{ \max_{i\in I} (1 - \mu_i(A_i)) : \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P} \right\} = 1 - \sup \left\{ \min_{i\in I} \mu_i(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P} \right\}.$$

W powyższych wyrażeniach zapis "dist$X = f_i$" oznacza, że rozkład zmiennej losowej X opisany jest przez funkcję gęstości f_i.

Definicja 5.7. Partycję $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ nazywamy minimaksową regułą decyzyjną, gdy

$$R = 1 - \min_{i \in I} \mu_i(A_i^*).$$

Łatwo zauważyć, że minimaksowa reguła decyzyjna $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ jest jednocześnie równomiernym optymalnym podziałem w sensie Definicji 5.2.

5.3 Metody optymalnego podziału odcinka jednostkowego pomiędzy dwóch graczy

Zaprezentujemy metodę wyznaczania α-optymalnej wartości $v^\alpha(\vec{\mu})$ oraz α-optymalnej partycji przestrzeni mierzalnej $\{[0,1], \mathcal{B}\}$ w oparciu o własności obrazu dwuwymiarowej miary wektorowej $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$. Dla $P = \{A_i\}_{i=1}^2 \in \mathscr{P}$ (por. Twierdzenie 5.3) będziemy oznaczać $\vec{\mu}(P) = (\mu_1(A_1), \mu_2(A_2))$ natomiast dla zbioru $A \in \mathcal{B}$ będziemy przyjmować $\vec{\mu}(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A))$. Zdefiniujmy obraz miary wektorowej $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ następująco:

$$\vec{\mu}(\mathcal{B}) = \{(\mu_1(A), \mu_2(A)) \in [0,1]^2 : \ A \in \mathcal{B}\}.$$

Ze słynnego twierdzenia Lapunowa [39] wynika, że zbiór $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ jest zwarty i wypukły. Przedstawimy teraz metodę wyznaczania obrazu $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ posiadającego własności opisane w Twierdzeniu 5.3. Wiadomo, że zbiór $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ otrzymuje się poprzez symetryczne przekształcenie zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ względem prostej $x = \frac{1}{2}$, tzn.:

$$\vec{\mu}(\mathscr{P}) = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 : (1-x, y) \in \ \vec{\mu}(\mathcal{B})\right\}. \tag{5.3}$$

Z własności zbioru $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ wynika, że jego brzeg może być opisany przy pomocy pewnej niemalejącej funkcji $G : [0,1] \to [0,1]$, takiej że:

$$\vec{\mu}(\mathscr{P}) = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 : 1 - G(x) \leqslant y \leqslant G(1-x)\right\}. \tag{5.4}$$

Pokażemy, jak wyznaczyć tą funkcję. Zbiór $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ jest zwarty, więc dla każdego $t \in [0,1]$ istnieje zbiór $D(t) \in \mathcal{B}$ spełniający równość:

$$\mu_2(D(t)) = \max\{\mu_2(A) : \mu_1(A) = t, \ A \in \mathcal{B}\}.$$

Niech X_1 i X_2 oznaczają zmienne losowe posiadające funkcje gęstości f_1 i f_2. Od tej pory w celu uproszczenia notacji będziemy rozważać otwarty przedział jednostkowy $(0,1)$ zamiast $[0,1]$. Oznaczmy przez F_1 i F_2 dystrybuanty tych zmiennych losowych. Niech $\mathbb{I}_A$ będzie indykatorem zbioru $A \in \mathcal{B}$. Legut i Wilczyński [H1] korzystając z lematu Neymana-Pearsona odkryli, jak przy pewnych założeniach znaleźć funkcję G opisującą zbiór $\vec{\mu}(\mathscr{P})$.

Własność 5.8. *Niech* $\{x : f_2(x) > 0\} \subset \{x : f_1(x) > 0\} = (0,1)$ *oraz* $r(x) = (f_2(x)/f_1(x))\,\mathbb{I}_{\{f_1(x)>0\}}$, $x \in (0,1)$. *Wtedy:*

1. Jeśli funkcja $r(x)$ jest malejąca względem x na $(0,1)$, to $D(x) = \big(0, F_1^{-1}(x)\big)$ i $G(x) = F_2(F_1^{-1}(x))$.

2. Jeśli funkcja $r(x)$ jest rosnąca względem x na $(0,1)$, to $D(x) = \big(F_1^{-1}(1-x), 1\big)$ i $G(x) = 1 - F_2(F_1^{-1}(1-x))$.

3. Jeśli funkcja $r(x)$ jest symetryczna względem $x_0 = 1/2$ i jest malejąca na $(0,1/2)$, to $D(x) = \big(0, F_1^{-1}(x/2)\big) \cup \big(F_1^{-1}(1-x/2), 1\big)$ i $G(x) = F_2\left(F_1^{-1}(x/2)\right) + 1 - F_2\left(F_1^{-1}(1-x/2)\right)$.

4. Jeśli funkcja $r(x)$ jest symetryczna względem $x_0 = 1/2$ i jest rosnąca na $(0,1/2)$, to $D(x) = \left(F_1^{-1}\left(\frac{1-x}{2}\right), F_1^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right)$ i $G(x) = F_2\left(F_1^{-1}(\frac{1+x}{2})\right) - F_2\left(F_1^{-1}(\frac{1-x}{2})\right)$.

Legut i Wilczyński [H1] znaleźli również metodę wyznaczania funkcji G w przypadku ogólniejszych funkcji gęstości f_1, f_2. Zdefiniujmy zbiór

$$\mathscr{R}(f_1, f_2) = \left\{\left(\int_A f_1\,dt, \int_A f_2\,dt\right) \;:\; A \in \mathcal{B}\right\}.$$

Oczywiste jest, że $\mathscr{R}(f_1, f_2) = \vec{\mu}(\mathcal{B})$. Legut i Wilczyński [H1] pokazali, że dla dowolnych funkcji gęstości f_1, f_2 zdefiniowanych na $\{(0,1), \mathcal{B}\}$ istnieją funkcje gęstości f_1^*, f_2^* na $\{(0,1), \mathcal{B}\}$ takie, że

1. f_1^* jest gęstością rozkładu jednostajnego na $(0,1)$,
2. f_2^* jest nierosnąca na $(0,1)$,
3. $\mathscr{R}(f_1, f_2) = \mathscr{R}(f_1^*, f_2^*)$.

Zdefiniujmy funkcję $\overline{H} : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\begin{aligned}\overline{H}(y) &= \mathbb{P}\left(f_2(X_1) \;>\; y f_1(X_1)\right) = \mu_1(\{x \,:\, f_2(x) > y f_1(x)\}) \\ &= \int\limits_{\{x\,:\,f_2(x)>yf_1(x)\}} f_1(x)\,dx. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Oznaczmy przez f_1^* gęstość rozkładu jednostajnego na $(0,1)$, tzn. $f_1^*(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Niech

$$f_2^*(x) = \overline{H}^{\,-1}(x),\; x \in (0,1),$$

gdzie

$$\overline{H}^{\,-1}(x) = \inf\{y \geqslant 0 \,:\, \overline{H}(y) \leqslant x\} \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1. \tag{5.6}$$

Legut i Wilczyński [H1] udowodnili następujące:

Twierdzenie 5.9. *Niech f_1, f_2 będą probabilistycznymi gęstościami na $\{(0,1), \mathcal{B}\}$ oraz niech f_1^* i f_2^* będą odpowiadającymi im gęstościami zdefiniowanymi wyżej. Wtedy $\mathscr{R}(f_1, f_2) = \mathscr{R}(f_1^*, f_2^*)$. Ponadto*

$$\mathscr{R}(f_1^*, f_2^*) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\; 1 - G(1-x) \leqslant y \leqslant G(x)\right\},$$

gdzie funkcja $G : [0,1] \to [0,1]$ *ma postać*

$$G(x) = \int_{\{t: f_1(t)=0\}} f_2(t)\,dt + \int_0^x f_2^*(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Powyższe twierdzenie może być wykorzystane do wyznaczenia obrazu $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ przez określenie jego brzegów (5.4), gdzie funkcja G jest zdefiniowana przez (5.7). Legut i Wilczyński [H1] zastosowali Twierdzenie 5.9 do wyznaczania α-optymalnej wartości oraz α-optymalnych podziałów w przypadku dwuwymiarowym. Udowodnili następujące:

Twierdzenie 5.10. *Niech* μ_1, μ_2 *będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi na* $\{(0,1), \mathcal{B}\}$ *z odpowiadającymi im gęstościami* f_1, f_2 *oraz niech* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in S_2$. *Wtedy* $v^\alpha = \dfrac{x_\alpha}{\alpha_1}$, *gdzie* x_α *jest pierwiastkiem równania* $\dfrac{\alpha_2\, x}{\alpha_1} = G(1-x)$. *Ponadto* α-*optymalny podział ma postać* $\{\mathcal{X} \setminus A_2^\alpha, A_2^\alpha\}$, *gdzie* A_2^α *jest dowolnym zbiorem takim, że* $\mu_1(A_2^\alpha) = 1 - x_\alpha$ *oraz*

$$\{x : f_2(x) > y_\alpha f_1(x)\} \subset A_2^\alpha \subset \{x : f_2(x) \geqslant y_\alpha f_1(x)\}, \tag{5.8}$$

gdzie $y_\alpha = \overline{H}^{\,-1}(1 - x_\alpha)$.

Następujący przykład ilustruje zastosowanie powyższego twierdzenia.

Przykład 5.11. Rozważmy dwie gęstości f_1, f_2, gdzie f_1 jest gęstością rozkładu jednostajnego na $(0,1)$ a gęstość f_2 zdefiniowana jest następująco:

$$f_2(x) = \mathbb{I}_{(0,\frac{1}{2})}(x)(-8x(x-1)) + \mathbb{I}_{[\frac{1}{2},1)}(x)8(x-1)^2.$$

Wykorzystując Twierdzenie 5.9 wyznaczamy funkcję G (por. (5.7)):

$$G(x) = x + \frac{1}{6}\left(1 - 4(x-1)x\right)^{3/2} - \frac{1}{6}, \tag{5.9}$$

opisującą brzeg zbioru $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ za pomocą (5.4). Znajdziemy α-optymalną partycję dla $\alpha = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Z równania

$$2x = G(1-x) = 1 - x + \frac{1}{6}(1 + 4x(1-x))^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}$$

wyznaczamy $x_\alpha \approx 0.433$, gdzie G jest zdefiniowana przez (5.9). Stąd,

$$v^\alpha(\vec{\mu}) = \frac{x_\alpha}{\alpha_1} \approx \frac{0,433}{1/3} = 1,299,$$

i uzyskujemy przybliżoną postać α-optymalnej partycji $P^\alpha = \{A_1, A_2\}$, gdzie

$$A_1 \approx [0, 0.114) \cup (0.681, 1], \quad A_2 \approx [0.114, 0.681].$$

$\square$

W dalszej części tego rozdziału będziemy rozważać podziały domkniętego odcinka jednostkowego $[0,1]$. Jednym z ciekawszych zagadnień w teorii sprawiedliwego podziału jest określenie minimalnej liczby cięć wystarczającej do uzyskania partycji, która jest optymalna w pewnym sensie (por. [3, 5, 44]). W przypadku dwuwymiarowym liczba ta może być łatwo wyznaczona, ponieważ postać zbioru A_2^α (por. (5.8)) zależy od liczby zmian znaku funkcji $f_2(x)-y_\alpha f_1(x)$, $x\in[0,1]$ (por. Twierdzenie 5.10). Legut i Wilczyński [H1] pokazali następującą własność:

Własność 5.12. *Niech $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in S_2$ i $k\in\mathbb{N}$ będą ustalone. Wtedy istnieją miary μ_1,μ_2^k na $\{[0,1],\mathcal{B}\}$, dla których minimalna liczba cięć potrzebnych do uzyskania α-optymalnej partycji jest równa $2k$.*

Określenie minimalnej liczby cięć odcinka $[0,1]$ dla uzyskania podziałów $P=\{A_1,A_2\}$ spełniających warunki optymalności może być wyrażone również za pomocą minimalnej liczby poprzedziałów, których suma daje A_1 i A_2. Legut [H4] badał pewne własności obrazu bezatomowej miary wektorowej $\vec{\mu}=(\mu_1,...,\mu_n)$ zdefiniowanej na mierzalnych podzbiorach odcinka jednostkowego $[0,1]$. Niech $\mathcal{U}(k)$ oznacza rodzinę zbiorów będących sumą nie więcej niż k parami rozłącznych podprzedziałów $[0,1]$. Legut [H4] wykorzystał twierdzenie Stromquista i Woodalla [53], aby udowodnić następujące:

Twierdzenie 5.13. *Niech $A,B\in\mathcal{U}(k)$, $k\in\mathbb{N}$. Wtedy,*

$$\langle\vec{\mu}(A),\vec{\mu}(B)\rangle\subset\ \vec{\mu}\left(\mathcal{U}(2n+4k-3)\right).$$

$\langle\vec{\mu}(A),\vec{\mu}(B)\rangle$ oznacza domknięty odcinek łączący punkty $\vec{\mu}(A)$ i $\vec{\mu}(B)$. Legut [H4] wykorzystał Twierdzenie 5.13 do przedstawienia jeszcze jednego dowodu twierdzenia Lapunowa o wypukłości obrazu bezatomowej miary wektorowej. Następująca własność może być wykorzystana w szczególnych przypadkach do oszacowania minimalnej liczby cięć odcinka $[0,1]$ niezbędnej do wyznaczenia α-optymalnych partycji.

Własność 5.14. *Załóżmy, że dla pewnego $k\in\mathbb{N}$ wszystkie punkty ekstremalne obrazu $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ należą do zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{U}(k))$. Wtedy $\vec{\mu}\,(\mathcal{B})=\vec{\mu}(\mathcal{U}(2n+4k-3))$.*

Jak wcześniej wspomniano zbiór $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ otrzymuje się przez przekształcenie zbioru $\vec{\mu}\,(\mathcal{B})$. Z Własności 5.14 wynika, że punkty ekstremalne zbioru $\vec{\mu}(\mathscr{P})$ mogą być skonstruowane przez partycje $P=\{A_1,A_2\}$, w których jeden ze zbiorów A_1,A_2 jest sumą nie więcej niż k parami rozłącznych podprzedziałów odcinka $[0,1]$. Tak więc jest możliwe wyznaczenie α-optymalnej partycji $P^\alpha=\{A_1^\alpha,A_2^\alpha\}$, w której jeden ze zbiorów A_1^α,A_2^α jest sumą nie więcej niż $2n+4k-3$ parami rozłącznych podprzedziałów odcinka $[0,1]$.

5.4 Metody optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej dla miar zdefiniowanych przez różne funkcje gęstości

W tym rozdziale przedstawimy metody wyznaczania optymalnych partycji przestrzeni mierzalnej $\{[0,1),\mathcal{B}\}$ dla dowolnej skończonej liczby bezatomowych miar probabilistycznych $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ zdefiniowanych za pomocą różnych funkcji gęstości f_i, $i\in I$:

- funkcji prostych,
- funkcji kawałkami liniowych,
- funkcji posiadających kawałkami ściśle monotoniczne ilorazy wiarogodności (SMLR).

5.4.1 Funkcje proste

Załóżmy, że miary $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ zdefiniowane na $\{[0,1),\mathcal{B}\}$ są określone za pomocą gęstości będących funkcjami prostymi, tzn.:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}\mathbb{I}_{[a_j,a_{j+1})}(x),$$

gdzie $\{[a_j,a_{j+1})\}_{j=1}^m$ jest podziałem odcinka $[0,1)$ takim, że:

$$[0,1) = \bigcup_{j=1}^{m}[a_j,a_{j+1}),\ \ a_1 = 0,\ a_{m+1} = 1,\ \ a_{j+1} > a_j,\ \ j = 1,2,...,m, \tag{5.10}$$

oraz $h_{ij} \geqslant 0$, $i \in I$, $j = 1,...,m$, są liczbami takimi, że

$$\int_0^1 f_i dx = 1, \qquad \text{dla każdego} \quad i \in I.$$

Dla dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant n-1$ przez $\mathscr{P}(k)$ oznaczmy rodzinę wszystkich partycji przedziału $[0,1)$, które mogą być wyznaczone za pomocą nie więcej niż k cięć. Przez cięcia rozumiemy punkty $\{c_1,...,c_k\}$ takie, że $0 < c_1 < c_2 < ... < c_k < 1$. Podziały należące do rodziny $\mathscr{P}(k)$ uzyskuje się z sumowania podprzedziałów $\{[c_r,c_{r+1})\}_{r=1}^k$, gdzie $c_0 = 0$ i $c_{k+1} = 1$. Dall'Aglio, Legut i Wilczyński [H2] udowodnili następujące:

Twierdzenie 5.15. *Niech $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in S_n$. Wtedy dla miar $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ istnieje α-optymalna partycja $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}(mn-1)$.*

Dowód powyższego twierdzenia jest konstruktywny i wykorzystuje metody programowania liniowego. Niech liczby z^* i $[x_{ij}^*]_{n\times m}$ będą rozwiązaniem następującego zadania programowania liniowego:

$$\max z \tag{5.11}$$

z ograniczeniami

$$z = \frac{1}{\alpha_i}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}h_{ij}(a_{j+1}-a_j),\ \ i = 1,2,...,n,$$

względem zmiennych z, $[x_{ij}]_{n\times m}$ spełniających następujące warunki:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = 1,2,...,m;$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ \ \text{dla każdego } i \in I,\ \ j = 1,2,...,m.$$

Skonstruujemy partycję $P = \{A_i^*\}_{i=1}^n$ odcinka $[0,1)$ spełniającą warunki:

$$\frac{\mu_i(A_i^*)}{\alpha_i} = z^* \quad \text{dla} \quad i \in I.$$

Dla $j = 1, 2, ..., m$ możemy znaleźć podprzedziały $\{[b_i^{(j)}, b_{i+1}^{(j)})\}_{i=1}^n$ przedziałów $[a_j, a_{j+1})$, dla których zachodzą równości:

$$[a_j, a_{j+1}) = \bigcup_{i=1}^n [b_i^{(j)}, b_{i+1}^{(j)}),$$

gdzie $b_i^{(j)} \in [a_j, a_{j+1})$ są liczbami spełniającymi następujące warunki:

$$\frac{b_{i+1}^{(j)} - b_i^{(j)}}{a_{j+1} - a_j} = x_{ij}^*, \ i \in I$$

oraz $b_1^{(j)} = a_j, b_{n+1}^{(j)} = a_{j+1}$.

Jeśli $x_{ij}^* = 0$ dla pewnego $i = 1, 2, ..., n$, to definiujemy $b_{i+1}^{(j)} = b_i^{(j)}$ i przyjmujemy w tym przypadku, że $[b_i^{(j)}, b_{i+1}^{(j)}) = \emptyset$. Zdefiniujmy partycję $P = \{A_i^*\}_{i=1}^n$ następująco

$$A_i^* = \bigcup_{j=1}^m [b_i^{(j)}, b_{i+1}^{(j)}), \ i = 1, 2, ..., n.$$

Dall'Aglio, Legut i Wilczyński [H2] pokazali, że partycja zdefiniowana powyżej jest α-optymalna i może być uzyskana poprzez nie więcej niż $nm - 1$ cięć odcinka jednostkowego $[0,1)$. Przedstawiona metoda może być wykorzystana do wyznaczania przybliżonych α-optymalnych partycji dla miar z dowolnymi funkcjami gęstości, które mogą być aproksymowane za pomocą funkcji prostych. Przykład ilustrujący taką metodę został zaprezentowany przez Dall'Aglio, Leguta i Wilczyńskiego [H2].

5.4.2 Funkcje kawałkami liniowe

W tym rozdziale pokażemy, jak wyznaczać równomiernie optymalne partycje odcinka $[0,1)$ dla miar zdefiniowanych przez kawałkami liniowe funkcje gęstości. Niech więc funkcje gęstości $f_i : [0,1) \to \mathbb{R}_+$, $i \in I$, będą zdefiniowane następująco:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^m (c_{ij}x + d_{ij}) \mathbb{I}_{[a_j, a_{j+1})}(x), \quad \int_0^1 f_i(x)\, dx = 1, \quad i \in I, \tag{5.12}$$

gdzie $\{[a_j, a_{j+1})\}_{j=1}^m$ jest podziałem odcinka $[0,1)$ takim, że

$$[0,1) = \bigcup_{j=1}^m [a_j, a_{j+1}), \ \ a_1 = 0, \ a_{m+1} = 1, \ a_{j+1} > a_j \ j = 1, ..., m. \tag{5.13}$$

Ponieważ $f_i(x) \geqslant 0$, więc

$$c_{ij}x + d_{ij} \geqslant 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a_j, a_{j+1}), \, i \in I, \, j = 1, ..., m.$$

Będziemy rozważać miary probabilistyczne $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ zdefiniowane następująco

$$\mu_i(A) = \int_A f_i dx, \text{ dla } A \in \mathcal{B},\ i \in I. \tag{5.14}$$

Do konstrukcji podziałów optymalnych będziemy wykorzystywać sumy podprzedziałów lewostronnie domkniętych i prawostronnie otwartych. Weźmy pod uwagę podział każdego przedziału $[a_j, a_{j+1})$, $j = 1, ..., m$, na n podprzedziałów wykonany za pomocą cięć w takich punktach $x_k^{(j)}, k = 1, ..., n-1, j = 1, ..., m,$, dla których

$$[a_j, a_{j+1}) = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)}),$$

gdzie $x_0^{(j)} = a_j$, $x_n^{(j)} = a_{j+1}$, $x_{k+1}^{(j)} \geqslant x_k^{(j)}$, $k = 1, ..., n-1$, $j = 1, ..., m$.
Gdy $x_{k-1}^{(j)} = x_k^{(j)}$ dla pewnego $k = 1, ..., n$, to przyjmujemy, że $[x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)}) = \emptyset$. Dla uproszczenia zapisu będziemy oznaczać $B_{kj} := [x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)})$, $k = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.
Od tej pory konstrukcję optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej $\{[0,1), \mathcal{B}\}$ będziemy rozważać jako optymalny podział odcinka $[0, 1)$ pomiędzy n graczy.
Skonstruujemy przyporządkowanie każdego podprzedziału B_{kj} każdemu graczowi $i \in I$.
Niech p_j, q_j, $j = 1, ..., m$ będą liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $0 \leqslant p_j \leqslant q_j \leqslant n$ oraz równości:

$$\#\{i : i \in I, c_{ij} < 0\} = p_j,$$
$$\#\{i : i \in I, c_{ij} = 0\} = q_j - p_j,$$
$$\#\{i : i \in I, c_{ij} > 0\} = n - q_j,$$

gdzie $\#A$ oznacza liczbę elementów skończonego zbioru A. Dla każdego przedziału $[a_j, a_{j+1})$, $j = 1, ..., m$, rozważamy permutacje $\sigma_j : I \to I, j = 1, ..., m$ poprzez następujące warunki:

1. Jeśli $p_j > 0$, to definiujemy $\sigma_j(k) \in \{i : i \in I, c_{ij} < 0\}$ dla $k = 1, ..., p_j$ w taki sposób, że
$$\frac{d_{\sigma_j(k)j}}{c_{\sigma_j(k)j}} \geqslant \frac{d_{\sigma_j(k+1)j}}{c_{\sigma_j(k+1)j}}, \quad k = 1, ..., p_j - 1. \tag{5.15}$$

2. Jeśli $q_j - p_j > 0$, to definiujemy $\sigma_j(k) \in \{i : i \in I, c_{ij} = 0\}$ dla $k = p_j + 1, ..., q_j$ w taki sposób, że
$$\sigma_j(k) \leqslant \sigma_j(k+1), \quad k = p_j + 1, ..., q_j - 1. \tag{5.16}$$

3. Jeśli $n - q_j > 0$, to definiujemy $\sigma_j(k) \in \{i : i \in I, c_{ij} > 0\}$ dla $k = q_j + 1, ..., n$ w taki sposób, że
$$\frac{d_{\sigma_j(k)j}}{c_{\sigma_j(k)j}} \geqslant \frac{d_{\sigma_j(k+1)j}}{c_{\sigma_j(k+1)j}}, \quad k = q_j + 1, ..., n - 1. \tag{5.17}$$

Permutacje σ_j, $j = 1, ..., m$, definiują wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie podprzedziałów $B_{ij} \subset [a_j, a_{j+1})$, $i \in I, j = 1, ..., m$, każdemu graczowi $i \in I$, w taki sposób, że i-ty gracz otrzymuje podprzedział $B_{\sigma_j^{-1}(i)j}$. Ostatecznie otrzymujemy partycję $\{B_i\}_{i=1}^n$ przedziału jednostkowego zdefiniowaną następująco:

$$B_i = \bigcup_{j=1}^m B_{\sigma_j^{-1}(i)j},\ i \in I.$$

Następujące twierdzenie udowodnione przez Leguta [H3] przedstawia algorytm wyznaczania równomiernie optymalnego podziału.

Twierdzenie 5.16. *Niech liczby z^*, $\{x_k^{*(j)}\}, k = 1, ..., n-1,\ j \in J$, będą pewnym rozwiązaniem następującego zadania programowania nieliniowego (NLP):*

$$\max z \tag{5.18}$$

z kwadratowymi ograniczeniami

$$z = \sum_{j=1}^m \mu_i(B_{\sigma_j^{-1}(i)j}) = \sum_{j=1}^m \int_{B_{\sigma_j^{-1}(i)j}} f_i dx, \quad i = 1, ..., n,$$

względem zmiennych z, $\{x_k^{(j)}\}$, $k = 1, ..., n-1, j \in J$, spełniających następujące nierówności:

$$\begin{gathered} 0 = a_1 \leqslant x_1^{(1)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(1)} \leqslant a_2, \\ a_2 \leqslant x_1^{(2)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(2)} \leqslant a_3, \\ ... \\ a_m \leqslant x_1^{(m)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(m)} \leqslant a_{m+1} = 1. \end{gathered} \tag{5.19}$$

Wtedy partycja $\{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ przedziału jednostkowego $[0, 1)$ zdefiniowana przez

$$A_i^* = \bigcup_{j=1}^m A_{\sigma_j^{-1}(i)j},\ i \in I, \tag{5.20}$$

gdzie

$$A_{\sigma_j^{-1}(i)j} = \left[x^{*(j)}_{\sigma_j^{-1}(i)-1}, x^{*(j)}_{\sigma_j^{-1}(i)}\right),\ i \in I, \tag{5.21}$$

oraz $x_0^{*(j)} = a_j$, $x_n^{*(j)} = a_{j+1}$, $j = 1, ..., m$, jest równomiernie optymalnym podziałem, natomiast z^* jest wartością optymalną, tzn. $v = z^*$.

Twierdzenie 5.15 jest szczególnym przypadkiem powyższego twierdzenia dla funkcji gęstości (5.12), dla których $c_{ij} = 0$ dla każdego $i, j \in I$. Podobnie jak w przypadku funkcji prostych Twierdzenie 5.16 może być wykorzystane do wyznaczania przybliżonych równomiernie optymalnych podziałów dla dowolnych funkcji gęstości, które mogą być aproksymowane przez funkcje kawałkami liniowe. Twierdzenie 5.16 może być również uogólnione do wyznaczania α-optymalnych partycji dla dowolnego $\alpha \in S_n$. Legut [H3] przedstawił następujący przykład ilustrujący metodę opisaną w Twierdzeniu 5.16.

Przykład 5.17. Rozważmy problem sprawiedliwego podziału dla trzech graczy. Załóżmy, że każdy z graczy $i = 1, 2, 3$, ocenia mierzalne podzbiory odcinka jednostkowego $[0, 1)$ używając miar μ_i zdefiniowanych odpowiednio przez następujące funkcje gęstości:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{3}(c_{ij}x + d_{ij})I_{[a_j,a_{j+1})}(x),\ i = 1, 2, 3,$$

gdzie liczby c_{ij} oraz d_{ij} są elementami macierzy:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{13}{4} \end{bmatrix},$$

oraz $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = 1$. Skonstruujemy teraz równomiernie optymalną partycję. Dla $c_{ij} \neq 0$ zdefiniujmy nową macierz $[e_{ij}]$ z elementami $e_{ij} = \dfrac{d_{ij}}{c_{ij}}$ (element e_{32} nie został zdefiniowany):

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & & -\frac{13}{8} \end{bmatrix}$$

Podzielmy teraz graczy na trzy grupy oddzielnie dla każdego przedziału w zależności od znaku liczby c_{ij}:
$[0, \frac{1}{2}) : \{1, 2, 3\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}$, dla $c_{ij} < 0$,
$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) : \{\emptyset\}, \{3\}, \{1, 2\}$, dla $c_{ij} = 0$,
$[\frac{3}{4}, 1) : \{1, 3\}, \{\emptyset\}, \{2\}$, dla $c_{ij} > 0$.
Analizując kolumny macierzy $[e_{ij}]$ definiujemy permutacje $\sigma_j : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $j = 1, 2, 3$ spełniające warunki (5.15), (5.16) oraz (5.17). Porządkując graczy według ilorazów e_{ij} w każdej z trzech grup otrzymujemy:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right) : \frac{d_{11}}{c_{11}} = \frac{d_{31}}{c_{31}} > \frac{d_{21}}{c_{21}} \quad \text{oraz} \quad \sigma_1(1) = 1,\ \sigma_1(2) = 3,\ \sigma_1(3) = 2,$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) : \frac{d_{22}}{c_{22}} > \frac{d_{12}}{c_{12}} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2(1) = 3,\ \sigma_2(2) = 2,\ \sigma_2(3) = 1,$$

$$\left[\frac{3}{4}, 1\right) : \frac{d_{13}}{c_{13}} > \frac{d_{33}}{c_{33}} \quad \text{oraz} \quad \sigma_3(1) = 1,\ \sigma_3(2) = 3,\ \sigma_3(3) = 2.$$

Ponieważ zachodzi równość $\dfrac{d_{11}}{c_{11}} = \dfrac{d_{31}}{c_{31}}$ możemy także alternatywnie zdefiniować $\sigma_1(1) = 2$, $\sigma_1(2) = 1$, $\sigma_1(3) = 2$. Permutacje σ_j, $j = 1, 2, 3$, wyznaczają przypisanie podprzedziałów $\{[x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)})\}_{k=1}^{3}$, ($x_0^{(j)} = a_j$, $x_n^{(j)} = a_{j+1}$) każdemu graczowi $i = 1, 2, 3$ takie, że:

gracz $i = 1$ otrzymuje zbiór $B_1 = [0, x_1^{(1)}) \cup [x_2^{(2)}, \frac{3}{4}) \cup [\frac{3}{4}, x_1^{(3)})$,
gracz $i = 2$ otrzymuje zbiór $B_2 = [x_2^{(1)}, \frac{1}{2}) \cup [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \cup [x_2^{(3)}, 1)$ oraz
gracz $i = 3$ otrzymuje zbiór $B_3 = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \cup [\frac{1}{2}, x_1^{(2)}) \cup [x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$.

Sformułujmy następujące zadanie programowania nieliniowego (por. 5.27):

$$\max\ z$$

przy ograniczeniach

$$z = \int_0^{x_1^{(1)}} f_1(x)dx + \int_{x_2^{(2)}}^{3/4} f_1(x)dx + \int_{3/4}^{x_1^{(3)}} f_1(x)dx$$

$$= -\frac{3}{8} + 2x_1^{(1)} - [x_1^{(1)}]^2 - \frac{[x_2^{(2)}]^2}{2} + \frac{5x_1^{(3)}}{4} - \frac{[x_1^{(3)}]^2}{2},$$

$$z = \int_{x_2^{(1)}}^{1/2} f_2(x)dx + \int_{x_1^{(2)}}^{x_2^{(2)}} f_2(x)dx + \int_{x_2^{(3)}}^{1} f_2(x)dx$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{5x_2^{(1)}}{4} + \frac{[x_2^{(1)}]^2}{2} - \frac{x_1^{(2)}}{4} - \frac{[x_1^{(2)}]^2}{2} + \frac{x_2^{(2)}}{4} + \frac{[x_2^{(2)}]^2}{2} - \frac{x_2^{(3)}}{4} - \frac{[x_2^{(3)}]^2}{2},$$

$$z = \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} f_3(x)dx + \int_{1/2}^{x_1^{(2)}} f_3(x)dx + \int_{x_1^{(3)}}^{x_2^{(3)}} f_3(x)dx$$

$$= -\frac{7}{8} - \frac{x_1^{(1)}}{2} + \frac{[x_1^{(1)}]^2}{4} + \frac{x_2^{(1)}}{2} - \frac{[x_2^{(1)}]^2}{4} + \frac{7x_1^{(2)}}{4} - \frac{13x_1^{(3)}}{4} + [x_1^{(3)}]^2 + \frac{13x_2^{(3)}}{4} - [x_2^{(3)}]^2,$$

względem zmiennych z, $\{x_k^{(j)}\}$ $k = 1, 2, j = 1, 2, 3$, spełniających następujące nierówności:

$$0 \leqslant x_1^{(1)} \leqslant x_2^{(1)} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant x_1^{(2)} \leqslant x_2^{(2)} \leqslant \frac{3}{4} \leqslant x_1^{(3)} \leqslant x_2^{(3)} \leqslant 1.$$

Wykorzystując odpowiednie oprogramowanie uzyskujemy następujące rozwiązanie:

$$z \approx 0.465276,\ x_1^{(1)} = x_2^{(1)} \approx 0.26852,\ x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = x_1^{(3)} = 0.75 \text{ oraz } x_2^{(3)} \approx 0.766019.$$

Stąd, wartość optymalna problemu sprawiedliwego podziału $v \approx 0.465276$ oraz równomiernie optymalny podział $\{B_1, B_2, B_3\}$ jest wyznaczony przez $B_1 = [0, x_1^{(1)})$, $B_2 = [x_2^{(1)}, \frac{1}{2}) \cup [x_2^{(3)}, 1)$, $B_3 = [\frac{1}{2}, x_2^{(3)})$.

□

5.4.3 Funkcje posiadające kawałkami ściśle monotoniczne ilorazy wiarogodności

W tym rozdziale przedstawimy algorytm wyznaczania równomiernie optymalnych podziałów dla szerszej klasy funkcji gęstości. Przypuśćmy, że mamy n bezatomowych miar μ_i, $i \in I$, zdefiniowanych na przestrzeni mierzalnej $\{[0, 1), \mathcal{B}\}$. Będziemy potrzebować następującego założenia:

Założenie 5.18. Miary μ_i, $i \in I$, są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a λ zdefiniowanej na $\{[0,1), \mathcal{B}\}$ i dodatkowo:

$$\operatorname{supp}(\mu_i) = [0,1), \quad i \in I.$$

Niech f_i, $i \in I$, oznaczają pochodne Radona-Nikodyma miar μ_i względem miary λ. Zdefiniujmy absolutnie ciągłe oraz ściśle rosnące funkcje $F_i : [0,1] \to [0,1]$ następująco

$$F_i(t) = \int_{[0,t)} f_i \, d\lambda, \quad t \in [0,1], \quad i \in I. \tag{5.22}$$

Potrzebujemy jeszcze jednego kluczowego założenia:

Założenie 5.19. Istnieje partycja $\{[a_j, a_{j+1})\}_{j=1}^{m}$ przedziału $[0,1)$, gdzie $a_1 = 0$, $a_{m+1} = 1$, taka, że funkcje gęstości f_i na każdym z tych przedziałów posiadają ściśle monotoniczne ilorazy wiarogodności, tzn. dla dowolnego $i, k \in I$, $i \neq k$, ilorazy $\dfrac{f_i(x)}{f_k(x)}$ są ściśle monotoniczne na każdym z przedziałów $[a_j, a_{j+1})$.

Następująca własność może być pomocna do sprawdzenia, czy dane funkcje gęstości f_i, $i \in I$, spełniają Założenie 5.19.

Własność 5.20. *Jeśli funkcje gęstości f_i, $i \in I$, są różniczkowalne i zbiór*

$$Q := \{x \in (0,1) : f_i'(x) f_k(x) = f_i(x) f_k'(x),\ i, k \in I,\ i \neq k\} \tag{5.23}$$

jest skończony, wtedy Założenie 5.19 jest spełnione.

Jeśli gęstości f_i, $i \in I$, są wielomianami dodatniego stopnia, wtedy założenia Własności 5.20 są spełnione, a więc spełnione jest również Założenie 5.19.
Rozważmy problem optymalnego podziału dla dwóch graczy z następującymi funkcjami gęstości $f_1(x) = x \sin \frac{1}{x} + c$, gdzie stała c jest tak dobrana, że spełniona jest równość $\int_0^1 f_1(x) dx = 1$ oraz $f_2(x) = \mathbb{I}_{[0,1)}(x)$ dla $x \in [0,1)$. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku zbiór Q zdefiniowany przez (5.23) ma nieskończoną liczbę elementów, więc Założenie 5.19 dla tych funkcji gęstości nie jest spełnione.
Do konstrukcji podziału optymalnego będzie potrzeba następująca:

Własność 5.21. *Przypuśćmy, że gęstości f_i spełniają Założenie 5.19. Wtedy dla dowolnych liczb θ_1, θ_2 spełniających nierówności $a_j \leqslant \theta_1 < \theta_2 < a_{j+1}$, $j \in J$, oraz dowolnych $i, k \in I$, $i \neq k$, jedna z poniższych nierówności:*

$$\frac{F_i(t) - F_i(\theta_1)}{F_i(\theta_2) - F_i(\theta_1)} < \frac{F_k(t) - F_k(\theta_1)}{F_k(\theta_2) - F_k(\theta_1)}, \tag{5.24}$$

$$\frac{F_i(t) - F_i(\theta_1)}{F_i(\theta_2) - F_i(\theta_1)} > \frac{F_k(t) - F_k(\theta_1)}{F_k(\theta_2) - F_k(\theta_1)} \tag{5.25}$$

jest spełniona dla każdego $t \in (\theta_1, \theta_2)$.

Nierówności (5.24) i (5.25) oznaczają, że istnieje relacja względnej ścisłej wypukłości pomiędzy funkcjami F_i i F_k, $i \neq k$, zdefiniowanymi przez (5.22). Gdy spełniona jest nierówność (5.24), wtedy F_i jest ściśle wypukła względem F_k. Własność ta jest równoważna ścisłej wypukłości złożenia funkcji $F_i \circ F_k^{-1}$ zdefiniowanej na przedziale $(F_k(a_j), F_k(a_{j+1}))$ (por. [41]). Z pewnego wyniku uzyskanego przez Shisha i Cargo [49] można wywnioskować, że $F_i \circ F_k^{-1}$ jest ściśle wypukła na $(F_k(a_j), F_k(a_{j+1}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\dfrac{f_i(x)}{f_k(x)}$ jest ściśle rosnący na przedziale (a_j, a_{j+1}). Stąd odwrotna implikacja we Własności 5.21 jest także prawdziwa.
Względna wypukłość jest jedną z wielu uogólnień pojęcia wypukłości, które były badane już od 1931 r. (por. Jessen [23]). Następnie koncepcje te były rozwijane przez Popoviciu [42] i Beckenbacha [4] i kontynuowane przez Karlina [25] w szczególności dla zastosowań w teorii aproksymacji.
Relacja ścisłej wypukłości indukuje na każdym z przedziałów (a_j, a_{j+1}) ścisłe częściowe uporządkowanie funkcji F_i (por. [41]). Niech $F_i \prec_j F_k$ oznacza, że F_i jest ściśle wypukła względem F_k na przedziale (a_j, a_{j+1}). Dla każdego $j \in J$ definiujemy permutację $\sigma_j : I \to I$, taką że

$$F_{\sigma_j(k+1)} \prec_j F_{\sigma_j(k)},$$

dla $k = 1, ..., n-1$. Stąd dla dowolnego $t \in (a_j, a_{j+1})$ mamy

$$\frac{F_{\sigma_j(k+1)}(t) - F_{\sigma_j(k+1)}(a_j)}{F_{\sigma_j(k+1)}(a_{j+1}) - F_{\sigma_j(k+1)}(a_j)} < \frac{F_{\sigma_j(k)}(t) - F_{\sigma_j(k)}(a_j)}{F_{\sigma_j(k)}(a_{j+1}) - F_{\sigma_j(k)}(a_j)}. \tag{5.26}$$

Następujące twierdzenie udowodnione przez Leguta [H5] przedstawia algorytm wyznaczania równomiernie optymalnych partycji dla funkcji gęstości spełniających Założenie 5.18 i 5.19:

Twierdzenie 5.22. *Niech zbiór liczb z^*, $\{x_k^{*(j)}\}, k = 1, ..., n-1$, $j \in J$, będzie rozwiązaniem następującego zadania programowania nieliniowego (NLP)*

$$\max\ z \tag{5.27}$$

przy ograniczeniach:

$$z = \sum_{j=1}^{m} \left[F_i(x^{(j)}_{\sigma_j(i)}) - F_i(x^{(j)}_{\sigma_j(i)-1}) \right] \quad i = 1, ..., n, \tag{5.28}$$

względem zmiennych z, $\{x_k^{(j)}\}$, $k = 1, ..., n-1, j \in J$, spełniających następujące nierówności:

$$0 = a_1 \leqslant x_1^{(1)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(1)} \leqslant a_2, \tag{5.29}$$

$$a_2 \leqslant x_1^{(2)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(2)} \leqslant a_3,$$

$$...$$

$$a_m \leqslant x_1^{(m)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(m)} \leqslant a_{m+1} = 1.$$

Wtedy partycja $\{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ *przedziału jednostkowego* $[0,1)$ *zdefiniowana przez*

$$A_i^* = \bigcup_{j=1}^m \left[x^{*(j)}_{\sigma_j(i)-1}, x^{*(j)}_{\sigma_j(i)}\right), \ i \in I, \tag{5.30}$$

gdzie $x_0^{*(j)} = a_j$, $x_n^{*(j)} = a_{j+1}$, $j \in J$, *jest równomiernie optymalnym podziałem dla miar* μ_i, $i \in I$ *oraz* $v = z^*$ *jest optymalną wartością.*

Jeśli dla pewnego $i \in I$ oraz $j \in J$, zachodzi równość $x^{*(j)}_{\sigma_j(i)-1} = x^{*(j)}_{\sigma_j(i)}$, wtedy przyjmujemy $\left[x^{*(j)}_{\sigma_j(i)-1}, x^{*(j)}_{\sigma_j(i)}\right) = \emptyset$ w sumie przedziałów (5.30).
Poniższy przykład ilustruje metodę opisaną w powyższym twierdzeniu.

Przykład 5.23. Rozważmy problem sprawiedliwego podziału dla trzech graczy $I = \{1,2,3\}$, którzy oceniają mierzalne podzbiory odcinka jednostkowego $[0,1)$ za pomocą miar μ_i, $i = 1,2,3$, zdefiniowanych odpowiednio przez następujące funkcje gęstości:

$$f_1(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, f_2(x) = 2x, \ f_3(x) = \mathbb{I}_{[0,1)}(x), \quad x \in [0,1).$$

Zastosujemy algorytm opisany w Twierdzeniu 5.22 do wyznaczenia równomiernie optymalnego podziału. Najpierw musimy podzielić odcinek $[0,1)$ na podprzedziały, na których gęstości f_i, $i = 1,2,3$, spełniają oddzielnie własność SMLR. Do tego celu wyznaczymy zbiór Q zdefiniowany przez (5.23). Okazuje się, że $Q = \{\frac{1}{2}\}$ i stąd z Własności 5.21 wynika, że gęstości f_i, $i = 1,2,3$, spełniają własność SMLR na dwóch przedziałach $[0,\frac{1}{2})$ i $[\frac{1}{2},1)$. Niech F_i, $i = 1,2,3$, będą ściśle rosnącymi funkcjami zdefiniowanymi przez (5.22). Wyznaczając te funkcje otrzymujemy:

$$F_1(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t, \ F_2(t) = t^2, \ F_3(t) = t, \quad t \in [0,1).$$

W oparciu o nierówności (5.26) ustalamy odpowiednie przypisanie trzech podprzedziałów w każdym z przedziałów $[0,\frac{1}{2})$ oraz $[\frac{1}{2},1)$ w następujący sposób: bierzemy środkowe punkty $\{\frac{1}{4}\}$ i $\{\frac{3}{4}\}$ tych przedziałów i sprawdzamy, że

$$\frac{F_1(1/4) - F_1(0)}{F_1(\frac{1}{2}) - F_1(0)} > \frac{F_3(1/4) - F_3(0)}{F_3(\frac{1}{2}) - F_3(0)} > \frac{F_2(1/4) - F_2(0)}{F_2(\frac{1}{2}) - F_2(0)},$$

oraz

$$\frac{F_3(3/4) - F_3(0)}{F_3(1) - F_3(\frac{1}{2})} > \frac{F_2(3/4) - F_2(0)}{F_2(1) - F_2(\frac{1}{2})} > \frac{F_1(3/4) - F_1(0)}{F_1(1) - F_1(\frac{1}{2})}.$$

Stąd uzyskujemy następujące permutacje:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz jesteśmy gotowi, tak jak w Twierdzeniu 5.22, sformułować zadanie programowania nieliniowego:

$$\max z$$

przy ograniczeniach

$$z = F_1(x_1^{(1)}) - F_1(0) + F_1(1) - F_1(x_2^{(2)}),$$

$$z = F_2(\tfrac{1}{2}) - F_2(x_1^{(2)}) + F_2(x_2^{(2)}) - F_2(x_2^{(1)}),$$

$$z = F_3(x_1^{(2)}) - F_3(x_1^{(1)}) + F_3(x_2^{(1)}) - F_3(\tfrac{1}{2}),$$

względem zmiennych $z, \{x_k^{(j)}\}\ \ k = 1, 2, j = 1, 2$, spełniających następujące nierówności:

$$0 \leqslant x_1^{(1)} \leqslant x_1^{(2)} \leqslant \tfrac{1}{2} \leqslant x_2^{(1)} \leqslant x_2^{(2)} \leqslant 1.$$

Rozwiązując to zadanie otrzymujemy:

$$z^* \approx 0.4843,\ x_1^{*(1)} \approx 0.1426,\ x_1^{*(2)} = a_2 = 0.5,\ x_2^{*(1)} \approx 0.6269, x_2^{*(2)} \approx 0.9367.$$

Stąd uzyskujemy równomiernie optymalny podział $\{A_i^*\}_{i=1}^3 \in \mathscr{P}$ odcinka jednostkowego $[0, 1)$, gdzie

$$A_1^* = [0, x_1^{*(1)}) \cup [x_2^{*(2)}, 1), \quad A_2^* = [x_2^{*(2)}, x_2^{*(1)}) \quad \text{oraz} \quad A_3^* = [x_2^{*(1)}, x_1^{*(1)}).$$

Optymalna wartość $v = z^* \approx 0.4843$.

□

Legut [H5] wykorzystał również metodę opisaną w Twierdzeniu 5.22 do wyznaczania równomiernie ε-optymalnego podziału w przypadku, gdy zbiór Q zdefiniowany przez (5.23) jest przeliczalny i nieskończony. Definicja równomiernie ε-optymalnego podziału jest następująca:

Definicja 5.24. Partycja $P^\varepsilon = \{A_i^\varepsilon\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}$ nazywa się *równomiernie ε-optymalnym podziałem*, jeśli dla każdego $i \in I$ prawdziwe są nierówności:

$$\mu_i(A_i^\varepsilon) > v - \varepsilon,$$

gdzie v jest wartością optymalną.

5.5 Metoda przybliżonego wyznaczania podziałów ściśle sprawiedliwych

W tym rozdziale będziemy rozważać inne pojęcie optymalności podziałów. Będą to podziały optymalne w sensie teorii sprawiedliwego podziału. Przedstawimy algorytm przybliżonego wyznaczania ściśle sprawiedliwego podziału, który jest jednocześnie podziałem proporcjonalnym, wolnym od zazdrości oraz jest podziałem równomiernym (Definicja 5.5). Istnienie podziałów ściśle sprawiedliwych wynika bezpośrednio z następującego twierdzenia Hobby'ego i Rice'a [22] uogólnionego przez Alona [1]:

Twierdzenie 5.25. *Niech $\mu_1, ..., \mu_n$ będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na mierzalnych podzbiorach odcinka jednostkowego $[0,1]$. Wtedy, możliwa jest partycja tego przedziału za pomocą $(m-1)n$ cięć oraz podzielenie $(m-1)n+1$ uzyskanych podprzedziałów na m rodzin zbiorów $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m$, takich, że $\mu_i(\cup\mathcal{F}_j) = \frac{1}{m}$ dla każdego $i = 1, ..., n$ oraz $j = 1, ..., m$. Liczba $(m-1)n$ jest wyznaczona optymalnie.*

Suma $\cup\mathcal{F}_j$ oznacza sumę wszystkich podprzedziałów należących do rodziny $\mathcal{F}_j$.

Niestety nie jest łatwo wyznaczyć ściśle sprawiedliwy podział korzystając bezpośrednio z Twierdzenia 5.25. Musimy znaleźć $n(n-1)$ nieznanych liczb rozwiązując układy równań dla wszystkich możliwych konfiguracji rodzin $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ spełniających warunki $\mu_i(\cup\mathcal{F}_j) = \frac{1}{n}$, $i, j = 1, ..., n$. Z tego powodu Legut [H6] zaproponował iteracyjny algorytm wyznaczania przybliżonego rozwiązania tego problemu.
Niech $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m$ będą rodzinami zbiorów, które spełniają Twierdzenie 5.25. Stąd $\sum_{j\in I} |\mathcal{F}_j| \leqslant (m-1)n+1$, gdzie $|\mathcal{F}_j|$ oznacza liczbę podprzedziałów należących do rodziny $\mathcal{F}_j$, $j \in I$. Niech $q_n(m) = \left\lfloor \frac{(m-1)n+1}{m} \right\rfloor$, $m = 2, ..., n$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x. Łatwo sprawdzić, że

$$\min_j |\mathcal{F}_j| \leqslant q_n(m). \tag{5.31}$$

Niech $F_i : [0,1] \to [0,1]$ będą ciągłymi i niemalejącymi funkcjami zdefiniowanymi przez $F_i(t) = \mu_i([0,t))$, $t \in [0,1]$, $i \in I$. Skonstruujemy przybliżony ściśle sprawiedliwy podział $P = \{A_i\}_{i=1}^n$ w $n-1$ krokach zaczynając od $m = n$ a następnie idąc wstecz do $m = 2$.

Krok 1. $(m = n)$

Ponieważ $q_n(n) = n-1$, będziemy rozważać dwa skończone ciągi $2(n-1)$ liczb $\{x_k\}$ oraz $\{y_k\}$, $k = 1, ..., n-1$, spełniające warunki:

$$0 \leqslant x_k \leqslant y_k \leqslant 1, \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., n-1, \tag{5.32}$$

$$y_k < x_{k+1} \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., n-2 \quad \text{oraz} \tag{5.33}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} [F_i(y_k) - F_i(x_k)] = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_i([x_k, y_k)) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, ..., n. \tag{5.34}$$

Z Twierdzenia 5.25 oraz (5.31) wynika, że układ (5.34) n równań względem zmiennych x_k, y_k, $k = 1, ..., n-1$ posiada przynajmniej jedno rozwiązanie, które oznaczmy przez $\{x_l^{(1)}\}, \{y_l^{(1)}\}$, $l = 1, ..., n-1$. Niech $1 \leqslant r_1 \leqslant n-1$ oznacza liczbę par $(x_l^{(1)}, y_l^{(1)})$ spełniających nierówność $x_l^{(1)} < y_l^{(1)}$. Niech

$$l_k = \min\{l : l > l_{k-1},\ x_l^{(1)} < y_l^{(1)}\}, \quad k = 1, ..., r_1,$$

gdzie $l_0 = 0$. Zdefiniujmy $a_k^{(1)} = x_{l_k}^{(1)}$, $b_k^{(1)} = y_{l_k}^{(1)}$ oraz

$$A_1 = \bigcup_{k=1}^{r_1} [a_k^{(1)}, b_k^{(1)}).$$

Z układu równań (5.34) wynika, że $\mu_i(A_1) = 1/n$, dla każdego $i \in I$. Wyznaczyliśmy pierwszy zbiór, który należy do ściśle sprawiedliwego podziału $P = \{A_i\}_{i=1}^n$.

Krok 2. $(m = n-1)$
Niech $\{u_k^{(1)}\}, \{w_k^{(1)}\}$, $k = 1, ..., s_1$ będą ciągami liczb spełniających warunki

$$0 \leqslant u_k^{(1)} < w_k^{(1)} \leqslant 1,$$

$$w_k^{(1)} < u_{k+1}^{(1)} \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., s_1 - 1,$$

oraz warunek

$$C_1 = [0,1] \setminus A_1 = \bigcup_{k=1}^{s_1} [u_k^{(1)}, w_k^{(1)}).$$

Łatwo sprawdzić, że $r_1 - 1 \leqslant s_1 \leqslant r_1 + 1$.
W przypadku, gdy $a_1^{(1)} > 0$ i $b_{r_1}^{(1)} < 1$ mamy $s_1 = r_1 + 1$ oraz

$$u_1^{(1)} = 0, w_1^{(1)} = a_1^{(1)}, u_{r_1}^{(1)} = b_{r_1}^{(1)}, w_{r_1}^{(1)} = 1,$$

$$u_k^{(1)} = b_k^{(1)},\ w_k^{(1)} = a_{k+1}^{(1)}, \quad \text{dla} \quad k = 2, ..., r_1 - 1.$$

Zdefiniujmy skończony ciąg liczb $0 = e_0^{(1)} < e_1^{(1)} < ... < e_{s_1-1}^{(1)} < e_{s_1}^{(1)} = 1$ spełniających warunki

$$e_k^{(1)} = \frac{1}{1-\lambda(A_1)} \sum_{j=0}^{k} (w_j^{(1)} - u_j^{(1)}), \quad k = 1, ..., s_1 - 1,$$

gdzie λ, tak jak wcześniej oznacza miarę Lebesgue'a zdefiniowaną na $\{[0,1], \mathcal{B}\}$.
Niech $g_1 : C_1 \to [0,1]$ będzie wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem, takim że:

$$\text{gdy} \quad x \in [u_k^{(1)}, w_k^{(1)}), \quad \text{to} \quad g_1(x) = e_{k-1}^{(1)} + \frac{x - u_k^{(1)}}{1-\lambda(A_1)},\ k = 1, ..., s_1.$$

Zdefiniujmy dla $i \in I$ ciągłe i niemalejące funkcje $F_i^{(1)} : [0,1] \to [0,1]$ następująco:

$$F_i^{(1)}(t) = \frac{n}{n-1} \left(F_i(g_1^{-1}(t)) - \mu_i(A_1 \cap [0,t)) \right). \tag{5.35}$$

Niech $\mu_1^{(1)}, ..., \mu_n^{(1)}$ będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na mierzalnych podzbiorach odcinka jednostkowego $[0,1]$ i generowane przez funkcje $F_i^{(1)}$, tzn. dla dowolnych liczb $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ przyjmujemy, że $\mu_i^{(1)}([x,y)) = F_i^{(1)}(y) - F_i^{(1)}(x)$. Teraz wykorzystujemy Twierdzenie 5.25 dla miar $\mu_1^{(1)}, ..., \mu_n^{(1)}$ oraz $m = n-1$. Zatem istnieją rodziny zbiorów $\mathcal{F}_1^{(1)}, ..., \mathcal{F}_{n-1}^{(1)}$, takie, że $\mu_i(\cup \mathcal{F}_j^{(1)}) = \frac{1}{n-1}$ dla każdego $i \in I$ oraz $j = 1, ..., n-1$. Z Twierdzenia 5.25 oraz (5.31) wynika, że istnieje rozwiązanie $\{x_l^{(2)}\}, \{y_l^{(2)}\}$, $l = 1, ..., q_n(n-1)$, układu równań

$$\sum_{k=1}^{q_n(n-1)} [F_i^{(1)}(y_k) - F_i^{(1)}(x_k)] = \sum_{k=1}^{q_n(n-1)} \mu_i^{(1)}([x_k, y_k)) = \frac{1}{n-1}, \tag{5.36}$$

dla $i \in I$ względem zmiennych x_k, y_k, $k = 1, ..., q_n(n-1)$, spełniających warunki

$$0 \leqslant x_k \leqslant y_k \leqslant 1, \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., q_n(n-1) \quad \text{oraz}$$

$$y_k < x_{k+1} \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., q_n(n-1) - 1.$$

Niech $1 \leqslant h_1 \leqslant q_n(n-1)$ oznacza liczbę par $(x_l^{(2)}, y_l^{(2)})$ spełniających nierówności $x_l^{(2)} < y_l^{(2)}$. Oznaczmy

$$l_k = \min\{l : l > l_{k-1},\, x_l^{(2)} < y_l^{(2)}\}, \quad k = 1, ..., h_1,$$

gdzie $l_0 = 0$. Zdefiniujmy $c_k^{(1)} = x_{l_k}^{(2)}$, $d_k^{(1)} = y_{l_k}^{(2)}$ oraz

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^{h_1} [c_k^{(1)}, d_k^{(1)}) \subset [0,1].$$

Z (5.36) wynika, że $\mu_i^{(1)}(B_1) = \frac{1}{n-1}$ dla każdego $i \in I$. Oznaczmy $A_2 = g_1^{-1}(B_1)$. Ponieważ g_1 jest funkcją kawałkami liniową, zbiór A_2 jest następującą sumą przedziałów:

$$A_2 = \bigcup_{k=1}^{r_2} [a_k^{(2)}, b_k^{(2)}) \subset C_1,$$

dla pewnych liczb $0 \leqslant a_k^{(2)} < b_k^{(2)} \leqslant 1$, oraz $r_2 = h_1 + z_1$, gdzie z_1 jest liczbą punktów $\{e_k^{(1)}\}$, $k = 1, ..., s_1 - 1$, należących do sumy $\bigcup_{k=1}^{h_1}(c_k^{(1)}, d_k^{(1)})$. Łatwo zauważyć, że jeśli dla pewnego k_0 zachodzi:

$$\bigcup_{k=1}^{s_1-1} \{e_k^{(1)}\} \cap (c_{k_0}^{(1)}, d_{k_0}^{(1)}) = \emptyset,$$

wtedy $g_1^{-1}((c_{k_0}^{(1)}, d_{k_0}^{(1)}))$ jest pojedynczym przedziałem. Przypuśćmy teraz, że

$$\bigcup_{k=1}^{s_1-1} \{e_k^{(1)}\} \cap (c_{k_0}^{(1)}, d_{k_0}^{(1)}) = \{e_{k_1}^{(1)}, ..., e_{k_p}^{(1)}\}, \text{ gdzie } 1 \leqslant p \leqslant s_1 - 1.$$

W tym przypadku $g_1^{-1}((c_{k_0}^{(1)}, d_{k_0}^{(1)}))$ składa się z $p+1$ podprzedziałów.
Można łatwo zauważyć, że:

$$\mu_i(A_2) = \frac{1}{n} \quad \text{dla każdego} \quad i \in I.$$

Jeśli $n > 3$ postępujemy analogicznie w kolejnym kroku.
Krok 3. $(m = n-2)$
Niech $\{u_k^{(2)}\}, \{w_k^{(2)}\}$, $k = 1, ..., s_2$, będą ciągami liczb spełniającymi następujące warunki:

$$0 \leqslant u_k^{(2)} < w_k^{(2)} \leqslant 1,$$

$$w_k^{(2)} < u_{k+1}^{(2)} \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., s_2 - 1,$$

oraz takimi, że zachodzi równość:

$$C_2 = [0,1] \setminus (A_1 \cup A_2) = \bigcup_{k=1}^{s_2} [u_k^{(2)}, w_k^{(2)}).$$

Łatwo sprawdzić, że $s_2 \leqslant 2h_1$. W przypadku, gdy

$$\bigcup_{k=1}^{s_1-1} \{e_k^{(1)}\} \cap \bigcup_{k=1}^{h_1} (c_k^{(1)}, d_k^{(1)}) = \emptyset,$$

przyjmujemy $s_2 = 2h_1$.
Zdefiniujmy skończony ciąg liczb $0 = e_0^{(2)} < e_1^{(2)} < ... < e_{s_2-1}^{(2)} < e_{s_2}^{(2)} = 1$ spełniających warunki:

$$e_k^{(2)} = \frac{1}{1-\lambda(A_1 \cup A_2)} \sum_{j=0}^{k} (w_j^{(2)} - u_j^{(2)}), \quad k = 1, ..., s_2 - 1,$$

Niech $g_2 : C_2 \to [0,1]$ będzie wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem, takim że

$$\text{gdy} \quad x \in [u_k^{(2)}, w_k^{(2)}), \quad \text{to} \quad g_2(x) = e_{k-1}^{(2)} + \frac{x - u_k^{(2)}}{1-\lambda(A_1 \cup A_2)}, \; k = 1, ..., s_2.$$

Zdefiniujmy dla $i \in I$ ciągłe i niemalejące funkcje $F_i^{(2)} : [0,1] \to [0,1]$ następująco:

$$F_i^{(2)}(t) = \frac{n}{n-2} \left(F_i(g_2^{-1}(t)) - \mu_i((A_1 \cup A_2) \cap [0,t)) \right).$$

Niech $\mu_1^{(2)}, ..., \mu_n^{(2)}$ będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na mierzalnych podzbiorach odcinka $[0,1]$ i generowane przez funkcje $F_i^{(2)}$. Z Twierdzenia 5.25 zastosowanego dla miar $\mu_2^{(2)}, ..., \mu_n^{(2)}$ oraz $m = n-2$ wynika, że istnieją rodziny zbiorów $\mathcal{F}_1^{(2)}, ..., \mathcal{F}_{n-2}^{(2)}$, takie że $\mu_i(\cup \mathcal{F}_j^{(2)}) = \frac{1}{n-2}$ dla każdego $i \in I$ oraz $j = 1, ..., n-2$. Wobec tego istnieje rozwiązanie $\{x_l^{(3)}\}, \{y_l^{(3)}\}$, $l = 1, ..., q_n(n-2)$, następującego układu równań:

$$\sum_{k=1}^{q_n(n-2)} [F_i^{(2)}(y_k) - F_i^{(2)}(x_k)] = \sum_{k=1}^{q_n(n-2)} \mu_i^{(2)}([x_k, y_k)) = \frac{1}{n-2}, \tag{5.37}$$

dla $i \in I$ względem zmiennych x_k, y_k, $k = 1, ..., q_n(n-2)$, spełniających warunki:

$$0 \leqslant x_k \leqslant y_k \leqslant 1, \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., q_n(n-2) \quad \text{oraz}$$

$$y_k < x_{k+1} \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, ..., q_n(n-2) - 1.$$

Niech $1 \leqslant h_2 \leqslant q_n(n-2)$ oznacza liczbę par $(x_l^{(3)}, y_l^{(3)})$ spełniających nierówności $x_l^{(3)} < y_l^{(3)}$. Oznaczmy

$$l_k = \min\{l : l > l_{k-1}, \, x_l^{(2)} < y_l^{(2)}\}, \quad k = 1, ..., h_2,$$

gdzie $l_0 = 0$. Zdefiniujmy $c_k^{(2)} = x_{l_k}^{(3)}$, $d_k^{(2)} = y_{l_k}^{(3)}$ oraz

$$B_2 = \bigcup_{k=1}^{h_2} [c_k^{(2)}, d_k^{(2)}) \subset [0,1].$$

Stąd otrzymujemy $\mu_i^{(2)}(B_2) = \frac{1}{n-2}$ dla każdego $i \in I$. Oznaczmy

$$A_3 = g_2^{-1}(B_2) = \bigcup_{k=1}^{r_3} [a_k^{(3)}, b_k^{(3)}) \subset X_2,$$

dla pewnych liczb $0 \leqslant a_k^{(3)} < b_k^{(3)} \leqslant 1$, takich, że $r_3 = h_2 + z_2$, gdzie z_2 jest liczbą punktów $\{e_k^{(2)}\}$, $k = 1, ..., s_2 - 1$, należących do $\bigcup_{k=1}^{h_2}(c_k^{(2)}, d_k^{(2)})$.
Można sprawdzić, że

$$\mu_i(A_3) = \frac{1}{n} \quad \text{dla każdego} \quad i \in I.$$

W ostatnim kroku dla $m = 2$ wyznaczamy zbiór A_{n-1}, dla którego zachodzi $\mu_i(A_{n-1}) = \frac{1}{n}$ dla każdego $i \in I$. Ostatni zbiór A_n uzyskujemy przyjmując $A_n = [0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$. Jeśli bezatomowe miary μ_i, $i \in I$, są zdefiniowane za pomocą gęstości f_i będących funkcjami prostymi, wtedy układy równań (5.34), (5.36) i (5.37) są liniowe i możemy uzyskać dokładne rozwiązania. Niestety dla dowolnych funkcji gęstości musimy stosować metody numeryczne, które mogą dać jedynie przybliżone rozwiązania problemu ściśle sprawiedliwego podziału tortu. Co więcej, nie możemy nawet oszacować błędu przybliżenia, z którym rozwiązujemy układy równań (5.34), (5.36) i (5.37).
Legut [H6] przedstawił następujący przykład wyznaczania przybliżonego rozwiązania problemu ściśle sprawiedliwego podziału dla trzech graczy.

Przykład 5.26. Załóżmy, że trzech graczy ocenia mierzalne podzbiory odcinka $[0,1]$ przy pomocy miar μ_i, $i = 1, 2, 3$, zdefiniowanych następująco:

$$\mu_1([0,t)) = F_1(t) = t,$$
$$\mu_2([0,t)) = F_2(t) = t^2,$$
$$\mu_3([0,t)) = F_3(t) = \sqrt{t},$$

dla $t \in [0,1]$. Do przybliżonego wyznaczenia ściśle sprawiedliwego podziału potrzebujemy dwóch kroków.

Krok 1.
Z Twierdzenia 5.25 wynika, że istnieją trzy rodziny podprzedziałów $\mathcal{F}_j$, $j = 1, 2, 3$ takich, że $\mu_i(\cup\mathcal{F}_j) = \frac{1}{3}$ oraz $\sum_j |\mathcal{F}_j| \leqslant 7$. Wtedy $\min_j |\mathcal{F}_j| \leqslant 2$. Rozważmy następujący układ równań

$$\begin{cases} F_1(y_1) - F_1(x_1) + F_1(y_2) - F_1(x_2) = y_1 - x_1 + y_2 - x_2 = \frac{1}{3}, \\ \\ F_2(y_1) - F_2(x_1) + F_2(y_2) - F_2(x_2) = y_1^2 - x_1^2 + y_2^2 - x_2^2 = \frac{1}{3}, \\ \\ F_3(y_1) - F_3(x_1) + F_3(y_2) - F_3(x_2) = \sqrt{y_1} - \sqrt{x_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{x_2} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

względem zmiennych $0 \leqslant x_1 \leqslant y_1 < x_2 \leqslant y_2 \leqslant 1$. Rozwiązując powyższy nieliniowy układ równań otrzymujemy przybliżone rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 = 0, & y_1 = b_1 \approx 0.011394 \\ x_2 = a_2 \approx 0.356524, & y_2 = b_2 \approx 0.678463. \end{cases}$$

Niech
$$A_1 = [0, b_1) \cup [a_2, b_2). \tag{5.38}$$
Stąd otrzymujemy $\mu_i(A_1) \approx \frac{1}{3}$ dla każdego $i = 1, 2, 3$.
Krok 2.
Teraz skonstruujemy pozostałe zbiory A_2 i A_3. Pierwsza miara μ_1 jest miarą Lebesgue'a, więc $\lambda(A_1) = \mu_1(A_1) \approx \frac{1}{3}$. Oznaczmy
$$C_1 = [0, 1] \setminus A_1 = [u_1, w_1) \cup [u_2, w_2] = [u_1, w_1) \cup [u_2, 1],$$
gdzie $u_1 = b_1$, $w_1 = a_2$, $u_2 = b_2$, $w_2 = 1$. Zdefiniujmy liczby $0 = e_0 < e_1 < e_2 = 1$, gdzie
$$e_1 = \frac{3}{2}(w_1 - u_1) \approx 0.517695.$$
Definiujemy funkcję $g : C_1 \to [0, 1]$ następująco
$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x - u_1) & \text{dla} \quad x \in [u_1, w_1), \\ e_1 + \frac{3}{2}(x - u_2) & \text{dla} \quad x \in [u_2, 1]. \end{cases}$$
Stąd wyznaczamy funkcję g^{-1}:
$$g^{-1}(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + u_1 & \text{dla} \quad t \in [0, e_1), \\ \\ \frac{2}{3}(t - e_1) + u_2 & \text{dla} \quad t \in [e_1, 1]. \end{cases}$$
Korzystając z (5.35) konstruujemy ciągłe i niemalejące funkcje $F_i^{(1)} : [0, 1] \to [0, 1]$, $i = 1, 2, 3$ w sposób następujący:
$$F_1^{(1)}(t) = t, \quad \text{dla} \quad t \in [0, 1],$$
$$F_2^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t^2 + 2tu_1 & \text{dla} \quad t \in [0, e_1), \\ \\ \frac{2}{3}(t - e_1)^2 + 2(t - e_1)u_2 + \frac{3}{2}(w_1^2 - u_1^2) & \text{dla} \quad t \in [e_1, 1]. \end{cases}$$
$$F_3^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}t + u_1} - \sqrt{u_1}\right) & \text{dla} \quad t \in [0, e_1), \\ \\ \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}(t - e_1) + u_2} - \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{w_1}\right) & \text{dla} \quad t \in [e_1, 1]. \end{cases}$$
Oznaczmy przez ν_i, $i = 1, 2, 3$, bezatomowe miary zdefiniowane na mierzalnych podzbiorach $[0, 1]$ i generowane odpowiednio przez funkcje $F_i^{(1)}$. Ponieważ $q_3(2) = 2$ możemy podzielić przedział $[0, 1]$ w 3 miejscach i otrzymać dwie rodziny zbiorów $\mathcal{F}_j^{(1)}$, $j = 1, 2$, takie, że $\nu_i(\cup \mathcal{F}_j^{(1)}) = \frac{1}{2}$ dla każdego $i = 1, 2, 3$. Rozważmy następujący układ równań
$$F_i^{(1)}(y_1^{(1)}) + F_i^{(1)}(y_2^{(1)}) - F_i^{(1)}(x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.39}$$

względem zmiennych $0 \leqslant y_1^{(1)} < x_2^{(1)} \leqslant y_2^{(1)} \leqslant 1$. Rozwiązując go, uzyskujemy przybliżone rozwiązanie

$$\begin{cases} d_1^{(1)} = y_1^{(1)} \approx 0.0617, \\ c_2^{(1)} = x_2^{(1)} \approx 0.333082, \\ d_2^{(1)} = y_2^{(1)} \approx 0.771382. \end{cases} \tag{5.40}$$

W tym przypadku mamy $c_1^{(1)} = 0$. Oznaczmy $B_1 = [0, d_1^{(1)}) \cup [c_2^{(1)}, d_2^{(1)})$. Z (5.39) oraz (5.40) wynika, że

$$\nu_i(B_1) \approx \frac{1}{2} \quad \text{dla każdego} \quad i = 1, 2, 3.$$

Niech $A_2 = g^{-1}(B_1)$. Można sprawdzić, że

$$\mu_i(A_2) \approx \frac{1}{3}, \quad \text{dla każdego} \quad i = 1, 2, 3.$$

W końcu uzyskujemy przybliżone rozwiązanie:

$$\begin{cases} A_1 \approx [0, 0.011394) \cup [0.356524, 0.678463), \\ A_2 \approx [0.011394, 0.056060) \cup [0.233449, 0.356524) \cup [0.678463, 0.847588) \\ A_3 \approx [0.056060, 0.233449) \cup [0.847588, 1]. \end{cases}$$

□

6 Omówienie pozostałych publikacji wchodzących w skład dorobku naukowego

Pozostałe moje osiągnięcia naukowe nie ujęte w rozdziale 5 zostały przedstawione w następujących artykułach:

D1. Legut J. (1985): "Market Games with a Continuum of Indivisible Commodities", *International Journal of Game Theory,* 15, 1-7.

D2. Legut J. (1985): "The Problem of Fair Division for Countably Many Participants", *J. Math. Anal. Appl.*, 109, 83-89.

D3. Legut J. (1987): "A Game of Fair Division with a Continuum of Players". *Colloquium Mathematicum*, vol LIII, 323-331.

D4. Legut J. (1988): "A Game of Fair Division in Normal Form", *Colloquium Mathematicum*, vol LVI, 179-184.

D5. Legut J. (1988): "Inequalities for α-optimal partitioning of a measurable space", *Proc. of the American Math. Soc.* vol. 104, No. 3, 1249-1251.

D6. Legut J. and Wilczyński M. (1988): "Optimal Partitioning of a Measurable Space", *Proc. of the American Math. Soc.* vol. 104, 262-264.

D7. Legut J. (1990): "On Totally Balanced Games Arising from Cooperation in Fair Division", *Games and Economic Behavior*, 2, 47-60.

D8. Legut J. and Wilczyński M. (1990): "Optimal partitioning of a Measurable Space into Countably Many Sets", *Probability Theory and Related Fields* 86, 551-558.

D9. Legut J., Potters J.A.M. and Tijs S.H. (1994): "Economies with Land - A Game Theoretical Approach", *Games and Economic Behavior* vol. 6, Issue 3, 416-430.

D10. Legut J., Potters J.A.M. and Tijs S.H. (1995): "A transfer Property of Equilibrium Payoffs in Economies with Land", *Games and Economic Behavior* vol. 10, Issue 2, 355-375.

D11. Jóźwiak I. and Legut J. (1991): "Decision Rule for an Exponential Reliability Function" *Microelectron. Reliab.* vol. 31. 71-73.

Pierwsze cztery prace [D1]-[D4] dotyczą wykorzystania wyników teorii gier w problematyce sprawiedliwego podziału i stanowiły podstawę mojej pracy doktorskiej.
Większość moich wyników opublikowanych w powyższych artykułach zostało wymienionych w popularnej książce pt. "Fair division-from cake-cutting to dispute resolution" napisanej przez znanych specjalistów teorii sprawiedliwego podziału - Bramsa i Taylora [6].
W pracy [D5] po raz pierwszy wprowadziłem w teorii sprawiedliwego podziału pojęcie α-optymalnego podziału, które jest uogólnieniem pojęcia podziałów równomiernie (equitable) optymalnych. Dla takich podziałów zdefiniowałem α-optymalną wartość, dla której znalazłem lepszą estymację, niż ta, którą wcześniej uzyskali Elton, Hill oraz Kertz [19]. Co więcej moją estymację uzyskałem stosując prostą geometryczną metodę, która później była wykorzystywana przez różnych autorów (por. [11], [13], [14], [15], [45]).
Jeden z moich najważniejszych wyników naukowych został uzyskany wspólnie z Maciejem Wilczyńskim i był opublikowany w pracy [D6]. Dotyczy on zastosowania pewnego twierdzenia minimaksowego Siona (por. [2]) do przedstawienia postaci α-optymalnych partycji. Ten wynik okazał się bardzo pomocny w wyznaczaniu algorytmów optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej (por. [H2], [H3], [H5], [H7]) oraz był omawiany i analizowany przez różnych autorów (por. [11], [14], [15], [45]).
W pracy [D7] zaproponowałem metodę badania wtórnego podziału obiektu $\mathcal{X}$ z wykorzystaniem teorii gier kooperacyjnych. W tej metodzie gracze tworzą koalicje, aby poprawić początkowy podział, a następnie definiowana jest pewna gra kooperacyjna. Okazało się, że takie gry są totalnie zbalansowane, a więc posiadają niepusty rdzeń. Pokazałem, jak wyznaczyć imputacje należące do tego rdzenia. Zaprezentowałem również charakterystykę oraz pewne własności takich gier. Ten wynik był później omawiany w literaturze sprawiedliwego podziału oraz teorii gier kooperacyjnych (por. [9], [10], [12], [13]).
Z kolei w pracy [D8] zostało zdefiniowane pojęcie optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej na przeliczalną liczbę zbiorów w oparciu o dane bezatomowe miary. Zostało udowodnione istnienie takiego podziału. Ponadto zostało podane oszacowanie dla wartości optymalnej oraz został scharakteryzowany zbiór optymalnych partycji. W końcu został

przedstawiony przykład związany ze statystyczną teorią decyzji.
W pracy [D9] została zdefiniowana gra kooperacyjna v_E związana z ekonomią podziału działki E (ekonomia w sensie Debreu, w której działka jest jedynym towarem). Praca zawiera analizę gier TU typu v_E oraz charakterystykę zbioru wypłat pozostających w równowadze opisanych, jako podzbiór rdzenia gry v_E. Autorzy udowodnili, że wypłaty tworzące punkt równowagi mogą być rozszerzone do monotonicznych procedur w sensie Sprumonta. Wyniki tej pracy były wspomniane w innych artykułach (por. [14], [15], [43], [46], [47]).
Praca [D10] dotyczy analizy ekonomii wymiany w sensie Debreu z jednym tylko towarem - działką. Autorzy badają gry NTU powiązane z tym rodzajem ekonomii. Głównym wynikiem tej pracy jest pokazanie, że zbiór wypłat stanowiących punkt równowagi w modelu NTU jest związany ze zbiorem wypłat stanowiących punkt równowagi w modelu TU rozważanym w pracy [D9] przy pomocy tzw. b-transferu - koncepcji wprowadzonej przez Shapley'a [48].
Główny wynik pracy [D6] został wykorzystany do wyznaczenia minimaksowej reguły decyzyjnej dla wykładniczej funkcji niezawodności. Ten wynik został przedstawiony w pracy [D11]. Autorzy zilustrowali uzyskaną metodę przykładem, który został rozwiązany przy pomocy programu komputerowego.

Literatura

[1] Alon, N. *Splitting Necklaces*, Advanced in Math. 63, 247-253 (1987)

[2] Aubin, J.P.: *Mathematical Methods of Game and Economic Theory,* North-Holland Publishing Company. (1980)

[3] Barbanel, J.: *On the geometry of cake division,* J. Math. Anal. Appl. 264, 639-656 (2001)

[4] Beckenbach, E. F., *Generalized convex functions,* Bull. Am. Math. Soc., 43, 363-371 (1937)

[5] Brams S. J. and Taylor A.D.: *An envy-free cake division protocol,* Am. Math. Mon. 102, 9-18 (1995)

[6] Brams S. J. and Taylor A.D.: Fair division-From cake-cutting to dispute resolution, Cambridge University Press, (1996)

[7] Brams S. J., Taylor A.D., Zwicker W. S.: *Old and new moving-knife schemes,* Math. Intellingencer 17, 30-35 (1995)

[8] Brams S. J., Taylor A.D., Zwicker W. S.: *A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem,* Proc. Amer. Math. Soc. 125, 547-554 (1997)

[9] Csóka, P., Herings, P.J.J., Kóczy, L.: *Stable allocations of risk,* Games Econom. Behav. 67, no. 1, 266-276 (2009)

[10] Csóka, P., Herings, P.J.J., Kóczy, L.: *Balancedness conditions for exact games,* Math. Methods Oper. Res. 74, 41-52 (2011)

[11] Dall' Aglio M.: *The Dubins-Spanier optimization problem in fair division theory.* J. Comput. Appl. Math. 130, no. 1-2, 17-40 (2001)

[12] Dall'Aglio, M., Branzei, R, Tijs, S.: *Cooperation in dividing the cake,* TOP 17, no. 2, 417-432. (2009)

[13] Dall'Aglio M. and Hill T,: *Maximin share and minimax envy in fair-division problems.* J. Math. Anal. Appl. 281 , no. 1, 346-361 (2003)

[14] Dall'Aglio M. and Di Luca: *Finding maxmin allocations in cooperative and competitive fair division,* Ann. Oper. Res. 223, 121–136 (2014)

[15] Dall'Aglio M. and Di Luca: *Bounds for α-Opimal Partitioning of a Measurable Space Based on Several Efficient Partitions,* J. Math. Anal. Appl. 425, no. 2, 854–863 (2015)

[16] Dubins, L. and Spanier E.: *How to cut a cake fairy,* Am. Math. Mon. 68, 1-17 (1961)

[17] Demko, S. and Hill, T.: *Equitable Distribution of Indivisible Objects,* Mathematical Social Sciences 16, 145-158 (1988)

[18] Dvoretzky, A., Wald A. and Wolfowitz, J.: *Relations among certain ranges of vector measures,* Pacific J. Math. 1, 59-74 (1951)

[19] Elton, J. Hill, T. and Kertz, R.: (1986), *Optimal partitioning ineaqualities for non-atomic probability measures,* Trans. Amer. Math.Soc., 296, 703-725 (1986)

[20] Fink, A. M.: *A note on the fair division problem,* Math. Magazine, 37, 341-342 (1964)

[21] Hill, T. and Tong, Y.: *Optimal-partitioning ineaqualities in classification and multi hypotheses testing* Ann. Stat., 17, 1325-1334 (1989)

[22] Hobby C.R. and Rice J.R.*A moment problem in L_1 approximation* Proc. Amer. Math. Soc. 16, 665-670 (1965)

[23] Jessen, B. *Bemaerkiner om konvekse functioner og uligheder imellem midelvaerdier,* Matematisk tidsskfift. B., 17-28 (1931)

[24] Jóźwiak I. and Legut J.: *Decision Rule for an Exponential Reliability Function* , Microelectron. Reliab. vol. 31, 71-73 (1991)

[25] Karlin, S. and Novikoff, A., *Generalized convex inequalities,* Pacific J. Math., 13, 1251-1279 (1963)

[26] Knaster, B.: *Sur le probleme du partage pragmatique. de H. Steinhaus,* Ann. Soc. Polon. Math. 19, 228-230 (1946)

[27] Legut J.: *The Problem of Fair Division for Countably Many Participants* , J. Math. Anal. Appl., 109, 83-89 (1985)

[28] Legut, J.: *Inequalities for α- optimal partitioning of a measurable space.* Proc. Amer. Math. Soc., 104, 1249-1251 (1988)

[29] Legut J.: *The problem of fair division for countably many participants.* J. Math. Anal. Appl. 109, no. 1, 83–89 (1985)

[30] Legut J.: *A game of fair division with continuum of players.* Colloq. Math. 53 , no. 2, 323–331 (1987)

[31] Legut J.: *Market games with a continuum of indivisible commodities.* Internat. J. Game Theory 15 no. 1, 1–7 (1986)

[32] Legut, J.; Potters, J. A. M.; Tijs, S. H.: *Economies with land—a game theoretical approach.* Games Econom. Behav. 6, no. 3 416–430 (1994)

[33] Legut, J. and Wilczyński, M.: *Optimal partitioning of a measurable space.* Proc. Amer. Math. Soc. 104, 262-264 (1988)

[34] Legut, J., Wilczyński, M.: *Optimal partitioning of a measurable space into countably many sets,* Probab. Theory Related Fields 86, (1990), no. 4, 551-558 (1990)

[35] Legut, J. and Wilczyński, M.: *How to obtain maximal and minimal subranges of two-dimensional vector measures,* unpublished paper available on line at: http://prac.im.pwr.wroc.pl/~legut/hab/L35.pdf

[36] Legut, J. and Wilczyński, M.: *On dividing a land with a river fairly,* unpublished paper available on line at: http://prac.im.pwr.wroc.pl/~legut/hab/L36.pdf

[37] Legut, J.: *Simple fair division of a square,* unpublished paper available on line at: http://prac.im.pwr.wroc.pl/~legut/hab/L37.pdf

[38] Lehmann, E. L., Joseph P. Romano. *Testing Statistical Hypotheses*, third edition. Springer Science+Business Media, Inc., New York. (1986)

[39] Lyapunov, A.: *Sur les fonctions-vecteurs completement additives,* Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR, 4, 465-478 (1940)

[40] Nicoló, A. Perea, A. and Roberti, P.: *Equal opportunity equivalence in land division.* J. Spanish Econom. Assoc. 3 (1-2) 133-142 (2012)

[41] Palmer, J.A., Relative Convexity, unpublished paper (2003)

[42] Popoviciu, T., *Notes sur les fonctions d'ordre superieur*, Mathematica 12, 81-92 (1936)

[43] Reijnierse, H., Borm, P., Quant, M., Meertens, M.: *Processing games with restricted capacities* European J. Oper. Res. 202, no. 3, 773-780 (2010)

[44] Robertson, J.M. and Webb, W.A.: *Minimal number of cuts for fair division*, Ars Combin. 31, 191-197 (1991)

[45] Sagara, N.: *A characterization of α-maximin solutions of fair division problems,* Mathematical Social Sciences, vol 55, 273-280 (2008)

[46] Segal-Halevi, E., Nitzan, S., Hassidim, A. and Aumann, Y.: *Fair and square: Cake-cutting in two dimensions.* J. Math. Ecnom. 70, 1-28 (2017)

[47] Segal-Halevi, E. Sziklai, B. R.: *Resource-monotonicity and population-monotonicity in connected cake-cutting,* Math. Social Sci. 95 19-30 (2018)

[48] Shapley, L. S.: *Utility comparison and the theory of games,* The Shapley value, 307-319, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 307-319 (1988)

[49] Shisha, O. and Cargo, G. T., *On comparable means*, Pacific J. Math. (3) 14, 1053-1058 (1964)

[50] Steinahus, H.: *The problem of fair division,* Econometrica 16, 101-104 (1948)

[51] Steinahus, H.: *Sur la division pragmatique* Econometrica 17 (Suppl), 315-319 (1949)

[52] Steinahus, H.: *Mathematical Snapshots* Oxford University Press, Oxford, 65-72 (1960)

[53] W. Stromquist, W. and Woodall, D. R.: *Sets on which several measures agree*, J. Math. Anal. Appl. 108, 241-248 (1985)

[54] D. Weller, D.: *Fair division of a measurable space,* J. Math. Econom. 14, 5-17 (1985)

[55] Woodall, D.R. *Dividing a cake fairly,* J. Math. Anal. Appl. 78, 233-247 (1980)