Autoreferat

1 Imię i nazwisko: Piotr Więcek

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne:

- 2000, dyplom magistra inżyniera matematyki, Instytut Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska. Temat pracy magisterskiej: *Strategiczne gry rynkowe.* Promotor: prof. dr hab. Andrzej Nowak
- 2004, dyplom doktora nauk matematycznych, Instytut Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska. Temat rozprawy doktorskiej: *Proste równowagi w dynamicznych strategicznych grach rynkowych.* Promotor: prof. dr hab. Tadeusz Radzik

3 Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- 2004–2006 *asystent naukowo-dydaktyczny* w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej
- 2006*–2007 *asystent naukowo-dydaktyczny* w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej
- 2007–2014 *adiunkt* w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej
- 2014*–2015 *adiunkt* w Katedrze Matematyki Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej
- 2015*–2016 *adiunkt* na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej
- 2016*–obecnie *adiunkt* w Katedrze Matematyki Stosowanej Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.).

(a) Tytuł:
Gry stochastyczne z continuum graczy z wypłatami innymi niż dyskontowane – teoria i zastosowania

(b) Lista publikacji składających się na osiągnięcie naukowe:

[H1] P. Więcek, E. Altman, Y. Hayel, *Stochastic State Dependent Population Games in Wireless Communication.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 56, no. 3 (2011), 492–505

[H2] P. Więcek, E. Altman, *Stationary Anonymous Sequential Games with Undiscounted Rewards.* Journal of Optimization Theory and Applications, 166(2) (2015), 686–710

[H3] P. Więcek, E. Altman, A. Ghosh, *Mean-field Game Approach to Admission Control of an $M/M/\infty$ Queue with Shared Service Cost.* Dynamic Games and Applications, 6 (2016), 538–566

*Zmiana miejsca zatrudnienia wynikała ze zmian organizacyjnych, tzn. przekształcenia Instytutu Matematyki w Instytut Matematyki i Informatyki, a następnie w Katedrę Matematyki na Wydziale PPT, dalej z utworzenia Wydziału Matematyki oraz wyodrębnienia Katedry Matematyki Stosowanej w ramach tego wydziału.

[H4] P. Więcek, *Total Reward Semi-Markov Mean-Field Games with Complementarity Properties.* Dynamic Games and Applications 7(3) (2017), 507–529

[H5] P. Więcek, *Discrete-Time Ergodic Mean-Field Games with Average Reward on Compact Spaces.* Dynamic Games and Applications (2019), https://doi.org/10.1007/s13235-019-00296-1

(c) Omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników:

4.1 Wstęp

Gry z continuum graczy zostały wprowadzone do teorii gier za sprawą prac Wardropa [64] i Schmeidlera [55] do przybliżania sytuacji konfliktowych, w których liczba stron jest na tyle duża, że z jednej strony wpływ pojedynczego gracza na wynik gry jest zaniedbywalny, a z drugiej opis sytuacji w języku n-osobowych gier strategicznych robi się bardzo skomplikowany ze względu na dużą złożoność problemu. Analogiczne modele gier dynamicznych pojawiły się w literaturze za sprawą pracy Jovanovicia i Rosenthala [34] oraz jej uogólnień [9, 10] (gry z czasem dyskretnym) z jednej strony, oraz prac Lasry'ego i Lionsa [38] oraz Huanga, Cainesa i Malhamégo [33] (gry różniczkowe). W obu przypadkach autorzy rozważali gry o specyficznej strukturze, w których każdy z nieskończenie wielu graczy kontroluje prywatny proces swoich własnych stanów, a decyzje, które podejmuje w trakcie gry, uzależnione są od jego własnego stanu oraz rozkładu prywatnych stanów pozostałych uczestników gry (nie ma za to wiedzy o wartościach prywatnych stanów konkretnych uczestników gry poza sobą). Umożliwiło to zredukowanie problemu szukania równowagi w grze n-osobowej do szukania strategii optymalnej w jednoosobowym problemie decyzyjnym. Ostatnie kilkanaście lat przyniosło bardzo dużą liczbę prac rozwijających teorię gier różniczkowych z continuum graczy (z ang. *mean field games*), patrz monografie [8, 14] lub praca przeglądowa [26]. Dwa podstawowe typy problemów, na jakich koncentrowano się w pracach dotyczących tej dziedziny to istnienie rozwiązań w grach tego typu oraz to, czy (i przy jakich założeniach) rozwiązania gier z continuum graczy są jednocześnie przybliżonymi rozwiązaniami gier z dużą skończoną liczbą graczy, które w założeniu miały przybliżać. Podobne problemy rozważane były w przypadku gier z continuum graczy z czasem dyskretnym (w ich przypadku angielskojęzyczna literatura używa dwóch nazw: *anonymous sequential games* lub *discrete-time mean field games*). W pracach [34, 9, 10, 16, 60, 1, 19, 54] analizowano warunki potrzebne do istnienia równowagi w grach tego typu z wypłatą dyskontowaną. W ostatniej z wymienionych prac oraz w [28, 29, 32, 53] rozważano warunki gwarantujące, że równowagi w grze z continuum graczy będą przybliżonymi równowagami w grach z dużą skończoną liczbą graczy. Również w tym wypadku rozważano wyłącznie gry z wypłatą dyskontowaną. Efektem braku teorii dla gier tego typu dla innych kryteriów optymalności był również brak prac dotyczących zastosowań gier stochastycznych z continuum graczy w dziedzinach nie związanych z ekonomią (gdzie wypłata dyskontowana pojawia się w naturalny sposób), np. w naukach inżynierskich, gdzie modele teoriogrowe stosowane są z powodzeniem od wielu lat (por. [7, 39]).

Trzy z artykułów składających się na moje osiągnięcie naukowe – prace [H1], [H2] i [H5] – dotyczą gier stochastycznych z continuum graczy z czasem dyskretnym. Moim głównym celem w pracy nad grami tego typu było uogólnienie istniejących wyników na gry z wypłatami innymi niż dyskontowane: średnią wypłatą na jednostkę czasu oraz wypłatą całkowitą, liczoną od pojawienia się gracza w grze („urodzin") do jego zniknięcia z gry („śmierci'). Prace [H2] i [H5] zawierają rezultaty dotyczące istnienia równowagi stacjonarnej w grach tego typu oraz jakości aproksymacji rozwiązań w grach z dużą skończoną liczbą graczy przy pomocy równowag w ich odpowiedniku z continuum graczy. Omawiam je w podrozdziale 4.2. W pracy [H1] rozważam przykład zastosowania gier tego rodzaju w telekomunikacji do problemu automatycznego sterowania mocą w urządzeniach mobilnych. Szczegółowo omawiam go w podrozdziale 4.4.1.

Pozostała część wyników składających się na moje osiągnięcie naukowe (prace [H3] i [H4]) dotyczy modeli gier dynamicznych z continuum graczy łączących pewne cechy gier różniczkowych i gier z czasem dyskretnym. W modelach takich, wprowadzonych do literatury przez Gomesa, Mohr i Souzę w pracy [25] i rozwijanych później m.in. w [6, 15, 21], każdy z graczy kontroluje łańcuch Markowa z czasem ciągłym swoich stanów, podejmując decyzje wyłącznie w momentach zmiany stanu. W efekcie momenty, w których dowolny gracz podejmuje decyzje, są dyskretne (jakkolwiek nierówno rozłożone w czasie), ale sposób, w jaki zmienia się rozkład indywidualnych stanów graczy w całej populacji, opisywany jest przez układ równań różniczkowych zwyczajnych. Moje wyniki dotyczące gier tego rodzaju obejmują zarówno teorię, jak i zastosowania. Praca [H4] dotyczy gier tego typu z wypłatą całkowitą i zawiera twierdzenia o istnieniu równowagi oraz o warunkach, dla których rozwiązania gier tego rodzaju z continuum graczy są przybliżonymi rozwiązaniami gier z dużą skończoną liczbą graczy. Omawiam je w podrozdziale 4.3. Praca [H3] dotyczy zastosowania gier tego typu do modelowania systemu kolejkowego typu M/M/∞ z kosztem obsługi dzielonym pomiędzy użytkowników. Jej zawartość omawiam w podrozdziale 4.4.2.

4.2 Gry z czasem dyskretnym (prace [H2,H5])

4.2.1 Model

Gra stochastyczna z continuum graczy z czasem dyskretnym opisywana jest za pomocą następujących obiektów:

- Każdy z continuum graczy ma swój *stan prywatny* s_t^α (gdzie $\alpha \in [0,1]$ oznacza indeks gracza, a $t \in \{0,1,2,\ldots\}$, etap gry), zmieniający się w czasie. Zbiór stanów prywatnych S jest identyczny dla wszystkich graczy i nie zmienia się w czasie. Zakładamy, że S jest przestrzenią metryczną zwartą.
- Rozkład prawdopodobieństwa μ_t na σ-ciele zbiorów borelowskich[1] S, $\mathcal{B}(S)$ nazywamy *stanem globalnym* gry na etapie t. Miara μ_t opisuje rozkład stanów prywatnych wśród graczy w chwili t. Zakładamy, że na dowolnym etapie gry każdy z graczy zna swój stan prywatny oraz stan globalny gry oraz że jego wiedza o stanach prywatnych pozostałych graczy ogranicza się do stanu globalnego.
- Zbiór *akcji* dostępnych dla dowolnego gracza, jeśli jego stan prywatny jest równy s, a stan globalny gry jest równy μ jest równy $\mathcal{A}(s,\mu)$, gdzie $\mathcal{A} : S \times \Delta(S) \to A$ jest multifunkcją o wartościach niepustych, a jej zbiór wartości, A, jest przestrzenią metryczną zwartą. Akcję gracza α w chwili t oznaczamy przez a_t^α.

  Na dowolnym etapie gry $\tau_t \in \Delta(S \times A)$ oznaczać będzie rozkład par: stan prywatny-akcja wśród graczy.
- Jednokrokowa wypłata dowolnego gracza α w chwili t obliczana jest jako wartość *funkcji wypłaty* $r : S \times A \times \Delta(S \times A) \to \mathbb{R}$, $r(s_t^\alpha, a_t^\alpha, \tau_t)$. Zakładamy, że r jest funkcją borelowsko mierzalną i ograniczoną.
- Ciąg stanów prywatnych gracza α, $(s_0^\alpha, s_1^\alpha, \ldots)$ tworzy łańcuch Markowa z prawdopodobieństwami przejścia:
$$P\{s_{t+1}^\alpha \in B | s_t^\alpha\} = Q(B|s_t^\alpha, a_t^\alpha, \tau_t) \quad \text{dla } B \in \mathcal{B}(S).$$
  Zakładamy, że $Q : S \times A \times \Delta(S \times A) \to \Delta(S)$ jest takie samo dla każdego gracza oraz że $Q(B|\cdot,\cdot,\tau)$ jest funkcją borelowsko mierzalną dla dowolnych $B \in \mathcal{B}(S)$ i $\tau \in \Delta(S \times A)$.

  Dla dowolnej chwili $t \in \{0,1,\ldots\}$ stan globalny w chwili $t+1$ obliczamy zatem ze wzoru
$$\mu_{t+1} = \Phi(\cdot|\tau_t) = \int_{S\times A} Q(\cdot|s,a,\tau_t)\tau_t(ds \times da).$$
  Oznacza to, że ewolucja stanu globalnego jest deterministyczna.

[1] Dla dowolnego zbioru X zbiór miar probabilistycznych na $(X, \mathcal{B}(X))$ oznaczać będziemy przez $\Delta(X)$.

Gra rozgrywana jest w następujący sposób: Na dowolnym etapie $t = 0, 1, \ldots$ każdy z graczy niezależnie od pozostałych wybiera akcję ze zbioru akcji dostępnych dla niego w danej chwili, znając ponadto swój aktualny stan prywatny oraz stan globalny gry. Na bazie wybranych akcji gracze otrzymują swoje wypłaty jednokrokowe, a łańcuchy indywidualnych graczy przechodzą do kolejnych stanów. Po agregacji tych nowych stanów otrzymujemy stan globalny gry na etapie $t + 1$, który jest przekazywany graczom. Zakładamy, że na dowolnym etapie gracze podejmują swoje decyzje, stosując *strategie stacjonarne*[2] zdefiniowane następująco: Strategią stacjonarną nazywamy dowolną funkcję $f : S \times \Delta(S) \to \Delta(A)$, taką że $f(B|\cdot, \mu)$ jest borelowsko mierzalna dla dowolnych $B \in \mathcal{B}(A)$ oraz $\mu \in \Delta(S)$, spełniającą ponadto $f(\mathcal{A}(s, \mu)|s, \mu) = 1$ dla dowolnych $s \in S$ i $\mu \in \Delta(S)$. Tak zdefiniowana strategia używana jest przez gracza w następujący sposób: za każdym razem, gdy jego stan prywatny jest równy s, a stan globalny gry to μ, akcja, jaką wybiera, losowana jest zgodnie z rozkładem $f(\cdot|s, \mu)$. Zbiór wszystkich strategii stacjonarnych oznaczamy przez $\mathcal{F}$. W kilku sytuacjach będziemy też dopuszczali stosowanie przez graczy strategii będących dyskretnymi rozkładami prawdopodobieństwa na zbiorze strategii stacjonarnych. W strategiach tego typu, podobnie jak w przypadku strategii mieszanych w grach w postaci ekstensywnej, randomizacja następuje jeden raz, na początku gry, a w dalszej rozgrywce gracze stosują strategie stacjonarne wylosowane na początku. Zbiór strategii tego typu będziemy oznaczać przez $\mathcal{F}^*$.

Celem graczy, podobnie jak w markowskich procesach decyzyjnych oraz grach stochastycznych, jest maksymalizacja pewnej zagregowanej wypłaty obliczanej na podstawie całego przebiegu gry. Dwa sposoby liczenia indywidualnej użyteczności, które będziemy wykorzystywać, definiujemy poniżej.

Rozważmy gracza α używającego strategii stacjonarnej f przeciwko pozostałym graczom używającym strategii stacjonarnej g. Na mocy twierdzenia Ionescu-Tulcea (por. rozdział 7 w [11]) dla dowolnego rozkładu początkowego stanów prywatnych gracza α, μ_0^α oraz dowolnego rozkładu początkowych stanów prywatnych pozostałych graczy μ_0, istnieje określona w sposób jednoznaczny miara probabilistyczna określona na σ-algebrze generowanej przez zbiory cylindryczne w $H := (S \times A)^\infty$ (zbiorze historii procesu decyzyjnego gracza α), oznaczana przez $\mathbb{P}^{\mu_0^\alpha, \mu_0, Q, f, g}$, taka że dla dowolnych $B \in \mathcal{B}(S)$, $D \in \mathcal{B}(A)$ oraz dowolnej częściowej historii procesu decyzyjnego gracza α, $h_t^\alpha = (s_0^\alpha, a_0^\alpha, \ldots, s_{t-1}^\alpha, a_{t-1}^\alpha, s_t^\alpha) \in (S \times A)^t \times S =: H_t$, $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}^{\mu_0^\alpha, \mu_0, Q, f, g}(h \in H : s_0^\alpha \in B) = \mu_0^\alpha(B),$$
$$\mathbb{P}^{\mu_0^\alpha, \mu_0, Q, f, g}(h \in H : a_t^\alpha \in D|h_t^\alpha) = f(D|s_t^\alpha),$$
$$\mathbb{P}^{\mu_0^\alpha, \mu_0, Q, f, g}(h \in H : s_{t+1}^\alpha \in B|(h_t^\alpha, a_t^\alpha)) = Q(B|s_t^\alpha, a_t^\alpha, \tau_t),$$

przy czym kolejne rozkłady par: stan prywatny-akcja w grze są definiowane dla dowolnego $E \in \mathcal{B}(S \times A)$ rekurencyjnie za pomocą wzorów:

$$\tau_0(E) = \int_E g(da|s)\mu_0(ds), \quad \tau_{t+1}(E) = \int_E g(da|s)\Phi(ds|\tau_t), \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Definicja 1 Średnia wypłata na jednostkę czasu *gracza α używającego strategii $f \in \mathcal{F}$, gdy pozostali gracze stosują strategię $g \in \mathcal{F}$, a początkowe rozkłady stanów prywatnych gracza α oraz jego przeciwników są równe odpowiednio μ_0^α i μ_0, zdefiniowana jest następująco:*

$$J^\alpha(\mu_0^\alpha, \mu_0, f, g) = \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T+1} \mathbb{E}^{\mu_0^\alpha, \mu_0, Q, f, g} \sum_{t=0}^{T} r(s_t, a_t, \tau_t),$$

przy czym rozkłady τ_t, $t = 0, 1, \ldots$ zdefiniowane są za pomocą równości (1).

[2] W przypadku gier stochastycznych jest ogólnie wiadome, że ograniczenie strategii stosowanych przez graczy do zbioru strategii stacjonarnych dla gier z wypłatami dyskontowanymi oraz gier ze średnimi wypłatami na jednostkę czasu nie jest istotnym ograniczeniem w tym sensie, że w sytuacji, gdy wszyscy gracze poza jednym stosują strategie stacjonarne, najlepszą odpowiedzią tego jednego gracza jest również używanie strategii stacjonarnych. W oczywisty sposób jest to prawdą również dla gier stochastycznych z continuum graczy. Wypłata całkowita, którą będziemy wykorzystywać w części naszych wyników, jest zdefiniowana w taki sposób, że można ją traktować jako wypłatę w modelu ze współczynnikiem dyskonta zależnym od stanu. Dla takich gier ograniczenie się do strategii stacjonarnych również nie będzie miało istotnych negatywnych konsekwencji.

Aby zdefiniować wypłatę całkowitą, uzupełniamy zbiór stanów prywatnych graczy o stan s^*, oznaczający „śmierć” gracza. Zakładamy przy tym, że w stanie s^* dostępna jest (niezależnie od aktualnego stanu globalnego gry) tylko jedna akcja a^*.

Definicja 2 Wypłata całkowitą *gracza α używającego strategii $f \in \mathcal{F}$, gdy pozostali gracze stosują strategię $g \in \mathcal{F}$, rozkład stanów prywatnych gracza α w momencie jego przystąpienia do gry wynosi μ_0^α, a początkowy rozkład stanów prywatnych przeciwników gracza α jest równy μ_0, zdefiniowana jest następująco:*

$$\overline{J}^\alpha(\mu_0^\alpha, \mu_0, f, g) = \mathbb{E}^{\mu_0^\alpha, \mu_0, Q, f, g} \sum_{t=0}^{\mathcal{T}^\alpha - 1} r(s_t, a_t, \tau_t),$$

gdzie $\mathcal{T}^\alpha$ oznacza czas pierwszego dojścia procesu stanów prywatnych gracza α do stanu s^*, a rozkłady τ_t, $t = 0, 1, \ldots$ zdefiniowane są za pomocą równości (1).

Tak zdefiniowaną wypłatę interpretujemy jako sumę jednokrokowych wypłat gracza od jego „narodzin” (czyli przejścia jego stanu prywatnego ze stanu s^* do dowolnego $s \in S$) do jego „śmierci” (czyli powrotu do stanu s^*).

Rozwiązanie dla tak zdefiniowanych gier, którego istnieniem jesteśmy zainteresowani, różni się nieznacznie od standardowo stosowanej w teorii gier niekooperacyjnych (a więc także w teorii gier stochastycznych) *równowagi Nasha.*

Definicja 3 *Strategia stacjonarna f oraz stan globalny μ są w* równowadze stacjonarnej *w grze stochastycznej z continuum graczy ze* średnią wypłatą na jednostkę czasu*, jeśli dla dowolnej innej strategii stacjonarnej $g \in \mathcal{F}$,*

$$J(\mu, \mu, f, f) \geqslant J(\mu, \mu, g, f)$$

oraz τ_n zdefiniowane dla $n = 0, 1, \ldots$ przy pomocy równań (1) z $\mu_0 = \mu$ i $g = f$ spełnia $(\tau_n)_S = \mu$ dla dowolnego $n \in \{0, 1, \ldots\}$.

Osłabiony zostaje zatem warunek indywidualnej optymalności definiujący standardowo równowagę Nasha. W przypadku równowagi stacjonarnej wystarczy, że będzie on spełniony, jeśli stan globalny gry jest niezemienniczy w czasie i równy μ.

W przypadku gier z wypłatą całkowitą powyższa definicja jest modyfikowana w następujący sposób:

Definicja 4 *Strategia stacjonarna f oraz stan globalny μ są w* równowadze stacjonarnej *w grze stochastycznej z continuum graczy z* wypłatą całkowitą*, jeśli:*

(a) dla dowolnej innej strategii stacjonarnej $g \in \mathcal{F}$,

$$\overline{J}(\rho, \mu, f, f) \geqslant \overline{J}(\rho, \mu, g, f),$$

dla $\rho = Q(\cdot|s^*, a^*, \tau(f, \mu))$ oraz $\tau(f, \mu)(E) = \int_E f(da|s)\mu(ds)$ dla $E \in \mathcal{B}(S \times A)$,

(b) τ_n zdefiniowane dla $n = 0, 1, \ldots$ przy pomocy równań (1) z $\mu_0 = \mu$ i $g = f$ spełnia $(\tau_n)_S = \mu$ dla dowolnego $n \in \{0, 1, \ldots\}$.

Tak zdefiniowaną równowagę interpretujemy następująco: Dowolny gracz dołączający do gry na dowolnym jej etapie maksymalizuje swoją wypłatę od narodzin do śmierci, przy czym rozkład jego stanu prywatnego w chwili narodzin odpowiada rozkładowi stanów prywatnych graczy, którzy przechodzą ze stanu s^* do dowolnego innego stanu zgodnie z prawdopodobieństwem przejścia Q. Warto tutaj dodać, że gry z continuum graczy z tak zdefiniowaną funkcją wypłaty możemy traktować jako odpowiednik znanych z literatury stochastycznych gier wielogeneracyjnych, por. [44, 3, 43].

4.2.2 Istnienie równowagi stacjonarnej w grach ze średnią wypłatą na jednostkę czasu

Istnienie równowagi stacjonarnej w grach stochastycznych z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu, podobnie jak w przypadku n-osobowych gier stochastycznych z tym kryterium optymalności, zależy w zasadniczy sposób od złożenia pewnych warunków gwarantujących asymptotyczną regularność średnich wypłat na jednostkę czasu graczy. Klasyczny przykład gry *Big Match* Gillette'a [23] pokazuje, że bez tego typu założeń nawet dwuosobowa gra stochastyczna o sumie zerowej może nie posiadać równowagi w strategiach stacjonarnych. Wprawdzie pojęcie równowagi stacjonarnej w grze z continuum graczy opiera się na osłabieniu warunków definiujących równowagę Nasha w strategiach stacjonarnych, poniższy przykład, pochodzący z pracy [H2], pokazuje, że gra, w której zbiory stanów chwilowych i powracających w łańcuchu Markowa prywatnych stanów gracza stosującego pewną wybraną strategię stacjonarną mogą być różne w zależności od rozkładu stan prywatny-akcja pozostałych graczy, może nie posiadać równowagi stacjonarnej.

Przykład 1 (Example 3.1 w [H2]) *Rozważmy grę stochastyczną z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu zdefiniowaną przy pomocy następujących obiektów:*

$$S = \{1,2,3\}, \quad \mathcal{A}(s,\mu) = \begin{cases} \{0,1\}, & \textit{jeśli } s = 1 \\ \{0\}, & \textit{jeśli } s \neq 1 \end{cases}.$$

Jakakolwiek decyzja podejmowana jest przez graczy wyłącznie w stanie $s = 1$, dla uproszczenia zapisu będziemy ją zatem oznaczać przez a. Jednokrokowa funkcja wypłaty dowolnego gracza jest równa

$$r(s) = 3 - s,$$

a macierz przejścia procesu stanów prywatnych dowolnego gracza:

$$\mathbb{Q}(a,\tau) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a+3p^*}{4} & \frac{a}{4} & \frac{3p^*}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{p^*}{2} & 0 & 1 - \frac{p^*}{2} \end{bmatrix}, \ \textit{gdzie } p^* = \max\{0, 1 - 4\tau_{11}\}.$$

Poniżej pokażemy, że tak zdefiniowana gra nie posiada równowagi stacjonarnej.

Załóżmy, że (f,μ^*) jest taką równowagą. Niech τ oznacza rozkład par: stan prywatny-akcja, gdy stan globalny gry jest równy μ^*, a gracze stosują strategię stacjonarną f. Rozpatrzymy dwa przypadki:

(a) $\tau_{11} \geqslant \frac{1}{4}$: Wtedy $p^* = 0$, a zatem, jeśli gracz używa akcji 1 z prawdopodobieństwem β, rozkład stacjonarny łańcucha stanów prywatnych gracza, którego początkowy stan był zmienną losową o rozkładzie μ^*, wynosi $\left[\frac{2(\mu_1^*+\mu_2^*)}{2+\beta}, \frac{\beta(\mu_1^*+\mu_2^*)}{2+\beta}, \mu_3^*\right]$, co przekłada się na średnią wypłatę na jednostkę czasu równą

$$\frac{(4+\beta)(\mu_1^*+\mu_2^*)}{2+\beta} = \left(1 + \frac{2}{2+\beta}\right)(\mu_1^*+\mu_2^*).$$

Jest to funkcja malejąca β, a zatem najlepszą odpowiedzią gracza na strategię f stosowaną przez przeciwników jest strategia czysta $a = 0$. Jeśli jednak wszyscy gracze stosują taką strategię, to $\tau_{11} = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\tau_{11} \geqslant \frac{1}{4}$.

(b) $\tau_{11} < \frac{1}{4}$: Wtedy rozkład stacjonarny łańcucha stanów prywatnych gracza używającego akcji 1 z prawdopodobieństwem $\beta \in [0,1]$ jest równy $\left[\frac{2}{5+\beta}, \frac{\beta}{5+\beta}, \frac{3}{5+\beta}\right]$ (niezależnie od stanu początkowego), co daje średnią wypłatę na jednostkę czasu równą

$$\frac{4+\beta}{5+\beta} = 1 - \frac{1}{5+\beta}.$$

Jest to rosnąca funkcja parametru β, a zatem najlepszą odpowiedzią na strategię f stosowaną przez pozostałych graczy jest strategia czysta $a = 1$. Jeśli jest ona stosowana przez wszystkich graczy, rozkład stacjonarny $\mu^* = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$, a w konsekwencji $\tau_{11} = \frac{1}{3}$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\tau_{11} < \frac{1}{4}$.

Zatem gra nie posiada równowagi stacjonarnej.

Poniżej przedstawiamy dwa zestawy założeń, które gwarantują istnienie równowagi stacjonarnej w grze stochastycznej z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu. Pierwszy rozpatrywany był w pracy [H2] i dotyczy gier z dyskretnymi zbiorami stanów i akcji.

(A1) Zbiory S i A są skończone.

(A2) $r(s, a, \cdot)$ jest funkcją ciągłą dla dowolnych ustalonych $s \in S$, $a \in A$.

(A3) $Q(\cdot|s, a, \tau)$ jest ciągłą funkcją $\tau \in \Delta(S \times A)$ dla dowolnych ustalonych $s \in S$, $a \in A$.

(A4) S jest rozłączną sumą zbiorów S_0 i S_1 takich, że dla dowolnego $\tau \in \Delta(S \times A)$:

  (a) Dowolny stan prywatny $s \in S_0$ jest chwilowy w łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwem przejścia
$$p_{ss'} = Q(s'|s, f(s, \tau_S), \tau)$$
  dla dowolnej strategii $f \in \mathcal{F}$.

  (b) Istnieje strategia $\overline{f} \in \mathcal{F}$, taka że dowolne stany $s, s' \in S_1$ komunikują się w łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwem przejścia
$$\overline{p}_{ss'} = Q(s'|s, \overline{f}(s, \tau_S), \tau).$$

(A5) Multifunkcja $\mathcal{A}(s, \cdot)$ jest górnie półciągła dla dowolnego ustalonego $s \in S$.

Drugi zestaw założeń dotyczy gier z dowolnymi zwartymi zbiorami stanów i akcji. Ponieważ w założeniach i wynikach wykorzystujemy dwa rodzaje zbieżności miar probabilistycznych, będziemy stosować następujące oznaczenia: $\mu_n \Rightarrow \mu$ dla słabej zbieżności[3] oraz $\mu_n \to \mu$ dla mocnej zbieżności[4].

(B1) r jest funkcją ciągłą.

(B2) Dla dowolnego ciągu $\{s_n, a_n, \tau_n\} \subset S \times A \times \Delta(S \times A)$, takiego że $s_n \to s$, $a_n \to a$ oraz $\tau_n \Rightarrow \tau$, $Q(\cdot|s_n, a_n, \tau_n) \Rightarrow Q(\cdot|s, a, \tau)$. Ponadto, dla dowolnego ustalonego $s \in S$ oraz dowolnego ciągu $\{a_n, \tau_n\} \subset A \times \Delta(S \times A)$ takiego że $a_n \to a$ i $\tau_n \Rightarrow \tau$, $Q(\cdot|s, a_n, \tau_n) \to Q(\cdot|s, a, \tau)$.

(B3) Istnieją stała $\gamma > 0$ oraz miara probabilistyczna $P \in \Delta(S)$ takie że
$$Q(D|s, a, \tau) \geqslant \gamma P(D)$$
dla dowolnych $s \in S$, $a \in A$, $\tau \in \Delta(S \times A)$ oraz $D \in \mathcal{B}(S)$.

(B4) Multifunkcja $\mathcal{A}$ jest ciągła[5].

[3] Mówimy, że ciąg miar probabilistycznych na $(X, \mathcal{D})$, μ_n zbiega słabo do miary μ, jeśli $\int_X v(x)\mu_n(dx) \to \int_X v(x)\mu(dx)$ dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $v : X \to \mathbb{R}$. Wiadomo, że w przypadku zwartej przestrzeni metrycznej X, $\Delta(X)$ z topologią słabej zbieżności jest również zwarta i metryzowalna (por. Prop. 7.22 w [11]). Metryka definiująca słabą zbieżność na $\Delta(X)$ może być zdefiniowana na wiele sposobów. Ponieważ w naszych rozważaniach kilkakrotnie odwołujemy się bezpośrednio do takiej metryki, wybraliśmy jedną konkretną, której będziemy używali w przypadku słabej zbieżności miar probabilistycznych (por. Theorem 11.3.3 w [18]):
$$\rho_X(\mu_1, \mu_2) = \sup\left\{\left|\int_X v(x)(\mu_1 - \mu_2)(dx)\right|, \|v\|_{BL} \leqslant 1\right\},$$
gdzie $\mu_1, \mu_2 \in \Delta(X)$ oraz $\|\cdot\|_{BL}$ jest metryką zdefiniowaną na zbiorze ograniczonych funkcji lipschitzowskich z X w $\mathbb{R}$ wzorem
$$\|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + \|f\|_L, \text{ gdzie } \|f\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_X(x, y)}.$$

[4] Mówimy, że ciąg miar probabilistycznych na $(X, \mathcal{D})$ μ_n zbiega mocno do miary μ, jeśli $\mu_n(D) \to \mu(D)$ dla każdego $D \in \mathcal{D}$.

[5] Przy założeniu, że na zbiorze $\Delta(S)$ używamy topologii słabej zbieżności.

Prawdziwe są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1 (Theorem 3.1 w [H2]) *Dowolna gra stochastyczna z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu spełniająca założenia (A1–A5) ma równowagę stacjonarną.*

W dowodzie rozważamy markowski proces decyzyjny $\mathcal{M}(\tau)$ pojedynczego gracza maksymalizującego swoją średnią wypłatę na jednostkę czasu przy założeniu, że rozkład par: stan prywatny-akcja w grze nie zmienia się w czasie i jest równy τ. Na mocy założenia (A4), optymalna wypłata w procesie $\mathcal{M}(\tau)$ jest niezależna od stanu początkowego procesu (czyli w tym wypadku stanu prywatnego gracza). Oznaczamy ją przez $G(\tau)$. W sposób elementarny możemy pokazać, że G jest ciągłą funkcją τ. Funkcję G wykorzystujemy następnie do zdefiniowania multifunkcji Ψ argumentu $\tau \in \Delta(S \times A)$. Niech:

$$B(\tau) := \left\{\rho \in \Delta(S \times A) : \sum_{s\in S}\sum_{a\in A}\rho_{sa}r(s,a,\tau) = G(\tau)\right\},$$

$$C(\tau) = \left\{\rho \in \Delta(S \times A) : \sum_{a\in A}\rho_{sa} = \sum_{s'\in S}\sum_{b\in A}Q(s|s',b,\tau)\rho_{s'b}\right\},$$

$$\Psi(\tau) := B(\tau) \cap C(\tau).$$

$\Delta(S \times A)$ jest oczywiście zwartym wypukłym podzbiorem liniowo-topologicznej przestrzeni Hausdorffa. Odwzorowanie Ψ ma niepuste wypukłe wartości (miara okupacyjna odpowiadająca dowolnej strategii optymalnej w modelu $\mathcal{M}(\tau)$ będzie elementem $\Psi(\tau)$, wypukłość jest trywialna). Domkniętość wykresu Ψ wynika z ciągłości G. Na mocy twierdzenia Glicksberga o punkcie stałym (por. [24]) istnieje zatem $\tau^* \in \Psi(\tau^*)$. Po dezintegracji miary τ^* otrzymujemy strategię stacjonarną f^* i rozkład $\mu^* \in \Delta(S)$ w równowadze stacjonarnej.

Drugie twierdzenie dotyczy przypadku ze zwartymi przestrzeniami stanów prywatnych i akcji graczy.

Twierdzenie 2 (Theorem 1 w [H5]) *Dowolna gra stochastyczna z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu spełniająca założenia (B1–B4) ma równowagę stacjonarną.*

Jak w przypadku Twierdzenia 1, dowód oparty jest na zastosowaniu twierdzenia Glicksberga o punkcie stałym do odpowiednio zdefiniowanej multifunkcji argumentu $\tau \in \Delta(S \times A)$. Niech:

$$\Theta(\tau) := \left\{\rho \in \Delta(S \times A) : \rho_S(\cdot) = \int_{S\times A} Q(\cdot|s,a,\tau)\rho(ds \times da) \text{ oraz } \int_{\mathrm{Gr}(\mathcal{A}(\cdot,\tau_S))}\rho(ds \times da) = 1\right\},$$

$$\Psi(\tau) := \left\{\rho \in \Theta(\tau) : \int_{S\times A} r(s,a,\tau)\rho(ds \times da) \geqslant \int_{S\times A} r(s,a,\tau)\sigma(ds \times da) \text{ dla każdego } \sigma \in \Theta(\tau)\right\}.$$

Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, musimy udowodnić, że wartości Ψ są niepuste i wypukłe, oraz że wykres Ψ jest domknięty w topologii słabej zbieżności. Niepustość i wypukłość wartości można pokazać elementarnie, podobnie domkniętość wykresu Θ. Główną trudnością w dowodzie Twierdzenia 2 jest udowodnienie domkniętości wykresu Ψ. W tym celu:

(a) Zauważamy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ da się skonstruować skończony zbiór funkcji mierzalnych $\alpha_i^\mu : S \to A$ $(i = 1, \ldots, K_\varepsilon^\mu)$, takich że dla dowolnych $s \in S$, $\mu \in \Delta(S)$, zbiór wartości tych funkcji w punkcie s, $\{\alpha_i^\mu(s), i = 1, \ldots, K_\varepsilon^\mu\}$, jest ε-siecią zbioru $\mathcal{A}(s,\mu)$.

(b) Pokazujemy, że dla dowolnego ciągu η_n elementów $\Delta(S \times A)$ słabo zbieżnego do pewnego $\eta \in \Delta(S \times A)$ oraz dowolnej funkcji[6] $f : S \to \Delta(A)$, takiej że dla każdego $s \in S$, $f(s) \in \mathcal{A}(s,\eta_S)$, da się skonstruować ciąg strategii $f_n : S \to \Delta(S)$ o następujących własnościach:

[6] W dalszej części wywodu będziemy ją nazywać strategią, choć formalnie strategia w grze stochastycznej z continuum graczy powinna określać, w jaki sposób akcje powinny być wybierane dla dowolnego stanu globalnego.

- Dla każdego n, $f_n(s) \in \mathcal{A}(s, (\eta_n)_S)$ dla $s \in S$.
- Dla kazdego n, wartości strategii f_n są skupione wyłącznie na wykresach funkcji $\alpha_i^{(\eta_n)_S}$, $i = 1, \ldots, K_\varepsilon^\mu$, zdefiniowanych dla $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
- Dla dowolnego $s \in S$, $f_n(\cdot|s) \Rightarrow f(\cdot|s)$, gdy $n \to \infty$.
- Rozkład niezmienniczy łańcucha stanów prywatnych gracza odpowiadający strategii f_n, gdy rozkład par: stan prywatny-akcja wśród pozostałych graczy jest równy η_n, p_{f_n,η_n} zbiega mocno do $p_{f,\eta}$, rozkładu niezmienniczego odpowiadającego strategii f i rozkładowi η, gdy $n \to \infty$.

(c) Tę własność wykorzystujemy następnie do udowodnienia, że wykres Ψ jest domknięty w następujący sposób: Załóżmy nie wprost, że nie jest, czyli, że istnieją $\tau_n, \eta_n \in \Delta(S \times A)$, takie że $\eta_n \Rightarrow \eta$, $\tau_n \Rightarrow \tau$ oraz $\eta_n \in \Psi(\tau_n)$, ale $\eta \notin \Psi(\tau)$. Ponieważ z domkniętości wykresu Θ, $\eta \in \Theta(\tau)$, muszą istnieć $\sigma \in \Theta(\tau)$ oraz $\varepsilon > 0$, dla których

$$\int_{S\times A} r(s,a,\tau)\sigma(ds \times da) > \int_{S\times A} r(s,a,\tau)\eta(ds \times da) + \varepsilon. \tag{2}$$

σ można zdezintegrować, otrzymując strategię f_σ oraz rozkład niezmienniczy $p_{f_\sigma,\tau}$. Na mocy własności (b) możemy je przybliżyć ciągami strategii f_σ^n, takich że $f_\sigma^n(\cdot|s) \in \mathcal{A}(s, (\tau_n)_S)$ dla $s \in S$ oraz odpowiadających im rozkładów niezmienniczych $p_{f_\sigma^n,\tau_n}$. Zauważamy jednak, że dla każdego n miara $\sigma_n \in \Delta(S \times A)$ zdefiniowana dla $D \in \mathcal{B}(S \times A)$ wzorem $\sigma_n(D) := \int_D f_\sigma^n(da|s)p_{f_\sigma^n,\tau_n}(ds)$ jest elementem $\Theta(\tau_n)$, a zatem mamy

$$\int_{S\times A} r(s,a,\tau_n)\sigma_n(ds \times da) \leqslant \int_{S\times A} r(s,a,\tau_n)\eta_n(ds \times da),$$

co po przejściu z n do granicy prowadzi do sprzeczności z nierównością (2).

Po zastosowaniu twierdzenia Glicksberga do odwzorowania Ψ otrzymujemy punkt stały τ^*, który po zdezintegrowaniu daje strategię f^* i stan globalny μ^* w równowadze stacjonarnej w grze z continuum graczy.

4.2.3 Istnienie równowagi stacjonarnej w grach z wypłatą całkowitą

Gry z wypłatą całkowitą rozważaliśmy wyłącznie w przypadku, gdy zbiory stanów prywatnych i akcji graczy są skończone. Dla takiej sytuacji większość założeń jest taka sama, jak w przypadku gier ze średnią wypłatą na jednostkę czasu. Dodatkowe założenie (A6) gwarantuje, że oczekiwana wypłata całkowita dowolnego gracza będzie ograniczona:

(A6) Istnieje $p_0 > 0$, takie że dla dowolnego ustalonego rozkładu par: stan prywatny-akcja τ, oraz dowolnej strategii stacjonarnej f, prawdopodobieństwo przejścia z dowolnego stanu $s \in S \backslash \{s^*\}$ do s^* w $|S| - 1$ krokach w łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwem przejścia

$$p_{ss'} = Q(s'|s, f(s, \tau_S), \tau)$$

jest nie mniejsze niż p_0.

Twierdzenie 3 (Theorem 4.1 w [H2]) *Dowolna gra stochastyczna z continuum graczy z wypłatą całkowitą spełniająca założenia (A1–A3), (A5–A6) ma równowagę stacjonarną.*

Podobnie jak w przypadku dowodu Twierdzenia 1, w dowodzie powyższego twierdzenia rozważamy markowski proces decyzyjny $\overline{\mathcal{M}}(\tau)$ pojedynczego gracza, w tym wypadku maksymalizującego wypłatę całkowitą przy założeniu, że rozkład par: stan prywatny-akcja w grze nie zmienia się w czasie i jest równy τ. Dodatkowo zakładamy, że po pierwszym przejściu procesu do stanu s^* proces pozostaje już na zawsze w tym stanie. Założenie (A6) gwarantuje, że funkcja wypłaty gracza w takim modelu $J^\tau(f,\mu_0)$ jest funkcją ciągłą τ, rozkładu początkowego stanów prywatnych μ_0 oraz strategii stacjonarnej gracza f. Niech $\overline{G}(\tau)$ oznacza optymalną wypłatę w modelu $\overline{\mathcal{M}}(\tau)$ przy założeniu, że początkowy stan prywatny gracza pochodzi z rozkładu $Q(\cdot|s^*,a^*,\tau)$. Podobnie jak w przypadku modelu ze średnią wypłatą na jednostkę czasu definiujemy przy jej pomocy multifunkcję $\overline{\Psi}:\Delta(S\times A)\to\Delta(S\times A)$, której dowolny punkt stały będzie odpowiadał równowadze stacjonarnej w grze:

$$\begin{aligned}\overline{B}(\tau):\ &= \left\{\eta\in\Delta(S\times A):\exists f^\eta\in\mathcal{F}\forall s\in S,\ \left(\sum_{a\in A}\eta_{sa}>0\Rightarrow f(s,\tau_S)=\frac{\eta_{sa}}{\sum_{a\in A}\eta_{sa}}\right)\right.\\ &\qquad\left.\text{oraz } \overline{J}^\tau(f^\eta,Q(\cdot|s^*,a^*,\tau))=\overline{G}(\tau)\right\},\end{aligned}$$

$$\overline{C}(\tau):=\left\{\eta\in\Delta(S\times A):\sum_{a\in A}\eta_{sa}=\sum_{s'\in S}\sum_{b\in A}Q(s|s',b,\tau)\eta_{s'b}\right\},$$
$$\overline{\Psi}(\tau):=\overline{B}(\tau)\cap\overline{C}(\tau).$$

Niepustość wartości $\overline{\Psi}$ uzasadniamy podobnie jak w przypadku operatora Ψ w dowodzie Twierdzenia 1. Domkniętość wykresu odwzorowania $\overline{\Psi}$ pokazujemy, korzystając z ciągłości J^τ. Następnie, korzystając z elementarnego twierdzenia odnowy (por. Theorem 3.3.4 w [52]) przekształcamy warunek definiujący $\overline{B}(\tau)$ do postaci liniowej, co natychmiast daje nam wypukłość wartości $\overline{\Psi}$. Operator $\overline{\Psi}$ ma zatem punkt stały τ^* na mocy twierdzenia Glicksberga. Po zdezintegrowaniu τ^* otrzymujemy strategię stacjonarną f^* i stan globalny μ^* w równowadze stacjonarnej.

4.2.4 Związek z grami n-osobowymi

Jak zdążyliśmy już wspomnieć we wstępie, jedno z podstawowych pytań zadawanych w literaturze dotyczącej gier dynamicznych z continuum graczy dotyczy tego, czy znajomość równowag w grach z continuum graczy umożliwia efektywną grę w odpowiednikach tych gier z dużą skończoną liczbą graczy. Poniżej przedstawiamy zestaw twierdzeń (oraz jeden przykład), które próbują odpowiedzieć na to pytanie. Dla ich sformułowania musimy zdefiniować, jak zdefiniowane są gry n-osobowe, które uważamy za odpowiedniki gier z continuum graczy.

Definicja 5 *n-osobową grę stochastyczną nazywamy n-*osobowym odpowiednikiem gry z continuum graczy*, jeśli:*

- *Jej przestrzeń stanów jest równa S^n, a zbiór akcji dowolnego gracza jest równy A. Zbiór akcji dostępnych dla gracza i w stanie $\overline{s}=(s^1,\dots,s^n)$ jest równy $A_n^i(\overline{s}):=\mathcal{A}\left(s^i,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\delta_{s^j}\right)$.*
- *Wypłata jednokrokowa gracza i, $r_n^i:S^n\times A^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, jest zdefiniowana dla dowolnych $\overline{s}=(s^1,\dots,s^n)$ i $\overline{a}=(a^1,\dots,a^n)$ wzorem*
$$r_n^i(\overline{s},\overline{a}):=r\left(s^i,a^i,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\delta_{(s^j,a^j)}\right).$$
- *Prawdopodobieństwo przejścia $Q_n:S^n\times A^n\to\Delta(S^n)$ jest zdefiniowane dla dowolnych $\overline{s}\in S^n$ i $\overline{a}\in A^n$ przy pomocy wzoru (dla uproszczenia zapisu definicję podajemy tylko dla iloczynów kartezjańskich zbiorów borelowskich, co w oczywisty sposób generuje miarę na S^n):*
$$\begin{aligned}&Q_n(B_1\times\ldots\times B_n|\overline{s},\overline{a})\\ :=\ &Q\left(B_1|s^1,a^1,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\delta_{(s^j,a^j)}\right)\ldots Q\left(B_n|s^n,a^n,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\delta_{(s^j,a^j)}\right).\end{aligned}$$

- *Zbiór strategii stacjonarnych gracza i oznaczamy przez $\mathcal{F}^i_n$. Będziemy także stosować oznaczenie $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}^1_n \times \ldots \times \mathcal{F}^n_n$. Jak w przypadku gier z continuum graczy, w szczególnych przypadkach będziemy dopuszczać także stosowanie strategii będących dyskretnymi rozkładami prawdopodobieństwa na zbiorach $\mathcal{F}^i_n$. W takim wypadku będziemy używali oznaczeń $\mathcal{F}^{i*}_n$ na zbiór takich strategii oraz $\mathcal{F}^*_n$ na zbiór wektorów strategii tego typu.*
- *Podobnie jak w przypadku gier z continuum graczy gracze maksymalizują średnią wypłatę na jednostkę czasu lub wypłatę całkowitą, które zdefiniowane są dla dowolnych wektorów $\overline{s}_0 = (s^1_0, \ldots, s^n_0) \in S^n$ (stan początkowy), $\overline{f} = (f^1, \ldots, f^n) \in \mathcal{F}_n$ (wektor strategii graczy) następująco:*

$$J^i_n(\overline{s}_0, \overline{f}) := \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T+1} \mathbb{E}^{\overline{s}_0, Q_n, \overline{f}} \sum_{t=0}^{T} r^i_n(\overline{s_t}, \overline{a_t}),$$

$$\overline{J}^i_n(\overline{s}_0, \overline{f}) = \mathbb{E}^{\overline{s}_0, Q_n, \overline{f}} \sum_{t=0}^{\mathcal{T}^i - 1} r^i_n(\overline{s_t}, \overline{a_t}),$$

gdzie $\mathcal{T}^i$ oznacza czas pierwszego dojścia procesu stanów prywatnych gracza i do stanu s^*.

Naszym celem jest udowodnienie, że strategie w równowadze stacjonarnej w grze z continuum graczy mogą posłużyć do skonstruowania strategii, które są w przybliżeniu w równowadze w ich n-osobowych odpowiednikach. Poniżej formalizujemy, w jaki sposób takie przybliżone równowagi będą definiowane:

Definicja 6 *Mówimy, że wektor strategii $\overline{f} \in \mathcal{F}_n$ jest w* ε-równowadze Nasha w strategiach stacjonarnych *w n-osobowej grze stochastycznej ze średnią wypłatą na jednostkę czasu, jeśli spełnia nierówności*[7]

$$J^i_n(\overline{s}, \overline{f}) \geqslant J^i_n(\overline{s}, [\overline{f}_{-i}, g]) - \varepsilon$$

dla dowolnych $\overline{s} \in S^n$, $g \in \mathcal{F}^i_n$, oraz $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Jeśli powyższa nierówność prawdziwa jest jedynie dla wektorów strategii z pewnej klasy $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ (ewent. $\mathcal{F}^*_n$), to mówimy, że $\overline{f}$ jest ε-równowagą w klasie $\mathcal{G}_n$.

Definicja 7 *Mówimy, że wektor strategii $\overline{f} \in \mathcal{F}_n$ oraz rozkład $\mu^* \in \Delta(S)$ jest w* słabej ε-równowadze stacjonarnej *w n-osobowej grze stochastycznej z wypłatą całkowitą, jeśli spełnia nierówności*

$$\mathbb{E}\overline{J}^i_n(\overline{s}, \overline{f}) \geqslant \mathbb{E}\overline{J}^i_n(\overline{s}, [\overline{f}_{-i}, g]) - \varepsilon$$

dla dowolnych $g \in \mathcal{F}^i_n$, oraz $i \in \{1, \ldots, n\}$, jeśli stany prywatne s^j, $j \neq i$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie μ^*, a s^i jest zmienną losową o rozkładzie $Q(\cdot|s^*, a^*, \tau^*_n)$, przy czym τ^*_n jest rozkładem empirycznym par: stan prywatny-akcja, gdy stany graczy $j \neq i$ pochodzą z rozkładu μ^*, $s^i = s^*$, a akcje wybierane są zgodnie ze strategiami $\overline{f}$.

Podobnie definiujemy słabą ε-równowagę stacjonarną w grze ze średnią wypłatą na jednostkę czasu, przy czym w tym przypadku wszystkie stany prywatne s^j są zmiennymi o rozkładzie μ^*.

Pierwsze dwa twierdzenia dotyczą przypadku ze skończonymi zbiorami S i A. Będą one wykorzystywać następujące dodatkowe założenia:

(A7) $Q(\cdot|s, a, \tau) = \widetilde{Q}(\cdot|s, a)$ dla każdego $s \in S$, $a \in A$ oraz $\tau \in \Delta(S \times A)$ oraz $\mathcal{A}(\cdot, \mu) = \widetilde{\mathcal{A}}(\cdot)$ dla każdego $\mu \in \Delta(S)$.

(A8) Dla dowolnej strategii $f \in \mathcal{F}$ oraz dowolnego ustalonego $\tau \in \Delta(S \times A)$ łańcuch Markowa z prawdopodobieństwem przejścia

$$p_{ss'} = Q(s'|s, f(s, \tau_S), \tau)$$

jest nieokresowy.

[7] $[\overline{f}_{-i}, g]$ oznacza wektor $\overline{f}$ z i-tą współrzędną zamienioną na g.

Twierdzenie 4 (Theorem 5.1 w [H2]) *Załóżmy, że (f, μ) jest równowagą stacjonarną w grze stochastycznej z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu spełniającą założenia (A1–A5) oraz (A7) lub w grze stochastycznej z continuum graczy z wypłatą całkowitą spełniającą założenia (A1–A3) oraz (A5–A7). Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\overline{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$, takie że dla $n \geqslant \overline{n}_\varepsilon$ $(\overline{f}, \mu)$, gdzie $\overline{f} = (f, \ldots, f)$, jest słabą ε-równowagą stacjonarną w n-osobowym odpowiedniku tej gry.*[8]

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na następującym spostrzeżeniu: Ponieważ w przypadku gier spełniających założenie (A7) ewolucja stanu prywatnego dowolnego gracza nie zależy w żaden sposób od rozkładu par: stan prywatny-akcja wśród pozostałych graczy, więc średnią wypłatę na jednostkę czasu gracza i stosującego strategię $g \in \mathcal{F}$ przeciwko strategii $f \in \mathcal{F}$ (strategii w równowadze stacjonarnej) używanej przez pozostałych graczy w n-osobowych odpowiednikach gry stochastycznej z continuum graczy można przedstawić jako następującą sumę:

$$\sum_{s\in S}\sum_{a\in A}\sum_{\tau\in\Delta^n(S\times A)} \sigma_{sa}(g) m^n_\tau(\overline{f}_{-i}, g) r(s, a, \tau). \tag{3}$$

$\sigma(g)$ oznacza tutaj miarę okupacyjną opisującą częstotliwość występowania poszczególnych par: stan prywatny-akcja w procesie decyzyjnym gracza stosującego strategię g, $\Delta^n(S \times A)$ – zbiór rozkładów prawdopodobieństwa na $S \times A$ o atomach będących wielokrotnością $\frac{1}{n}$, natomiast $m^n_\tau(\overline{f}_{-i}, g)$ – miarę częstości występowania poszczególnych wartości τ w trakcie trwania gry. Miara σ_f nie zależy w żaden sposób od liczby graczy, z kolei miara $m^n_\tau(\overline{f}_{-i}, g)$ zbiega słabo do miary skupionej na rozkładzie par: stan prywatny-akcja, gdy gracze stosują strategię f, a rozkład stanów prywatny jest równy μ, co oznacza, że (3) jest zbieżne do wypłaty w grze z continuum graczy, gdy gracz i stosuje strategię g przeciw f pozostałych, a stan globalny gry jest równy μ. To oczywiście wystarcza do udowodnienia tezy dla gier ze średnią wypłatą na jednostkę czasu. Dowód dla gier z wypłatą całkowitą opiera się na wykorzystaniu elementarnego twierdzenia odnowy do zapisania wypłaty całkowitej dowolnego gracza w tej grze w postaci analogicznej do (3). Do udowodnienia tezy można następnie zastosować argumenty użyte w pierwszej części dowodu.

Twierdzenie 5 (Theorem 5.2 w [H2]) *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, taki że dla $n \geqslant n_\varepsilon$ n-osobowy odpowiednik gry stochastycznej z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu spełniającej założenia (A1–A5) oraz (A7–A8) ma symetryczną ε-równowagę Nasha $(\pi^n, \ldots, \pi^n) \in \mathcal{F}^*_n$ zdefiniowaną w następujący sposób: jeśli (f, μ) jest równowagą stacjonarną w grze z continuum graczy, to π^n ma postać:*

$$\pi^n(s) = \sum_l \mu^*_l \delta[f^n_l(s)],$$

gdzie $f^n_l(s) = \begin{cases} \overline{f}(s), & \text{jeśli } s \notin S_l \\ f(s), & \text{jeśli } s \in S_l \end{cases}$, $\overline{f}$ jest strategią wprowadzoną w części (b) założenia (A4)[9]*, S_l są klasami ergodycznymi procesu stanów prywatnych gracza używającego strategii f*[10]*, a μ^* jest miarą probabilistyczną na zbiorze tych klas, określającą wagę poszczególnych klas w rozkładzie ergodycznym μ na S.*

Strategia π^n zdefiniowana w powyższym twierdzeniu skonstruowana jest w taki sposób, aby rozkład stacjonarny na zbiorze stanów indywidualnych gracza stosującego tę strategię w n-osobowym odpowiedniku gry z continuum graczy był niezależny od stanu początkowego i równy μ. Oznacza

[8] Formalnie rzecz biorąc, f jest funkcją ze zbioru $S \times \Delta(S)$ w A, a strategie stacjonarne w n-osobowym odpowiedniku takiej gry są funkcjami z S^n w A. Łatwo jednak zauważyć, że f zastosowana do rozkładu empirycznego stanów graczy (jako drugiego argumentu tej funkcji) jest w rzeczywistości funkcją wektora stanów prywatnych wszystkich graczy. Oczywiście, gdybyśmy chcieli zachować precyzję zapisu, powinniśmy zdefiniować strategie poszczególnych graczy odpowiadające strategii f i napisać, że tak zdefiniowany wektor jest w ε-równowadze w n-osobowym odpowiedniku gry z continuum graczy. Tego rodzaju uproszczenie zapisu będziemy również stosować w kolejnych twierdzeniach.

[9] Możemy przyjąć, że nie zależy ona od τ na mocy założenia (A7).

[10] One również nie zależą od τ na mocy założenia (A7).

to, że nierówności definiujące ε-słabą równowagę $(\overline{f}, \mu)$ uzyskaną w Twierdzeniu 4 są dla strategii f zamienionych na π^n prawdziwe dla dowolnego rozkładu początkowego stanów prywatnych gracza, czyli układ strategii $(\pi^n, \ldots, \pi^n)$ jest dla dostatecznie dużych wartości n ε-równowagą Nasha w n-osobowym odpowiedniku gry z continuum graczy.

Kolejne wyniki dotyczą sytuacji, gdy zbiory S i A są dowolnymi zbiorami zwartymi. Również tutaj będziemy wykorzystywać dodatkowe założenia:

(B5) $Q(\cdot|s, a, \tau) = \widetilde{Q}(\cdot|s, a)$ dla każdego $s \in S$, $a \in A$ oraz $\tau \in \Delta(S \times A)$ oraz $\mathcal{A}(\cdot, \mu) = \widetilde{\mathcal{A}}(\cdot)$ dla każdego $\mu \in \Delta(S)$.

(B6) Dla dowolnego ciągu $\{s_n, a_n, \tau_n\} \subset S \times A \times \Delta(S \times A)$, takiego że $s_n \to s$, $a_n \to a$ oraz $\tau_n \Rightarrow \tau$, $Q(\cdot|s_n, a_n, \tau_n) \Rightarrow Q(\cdot|s, a, \tau)$.

Kolejne twierdzenie możemy traktować jako odpowiednik Twierdzenia 4 dla przypadku ze zwartymi zbiorami S i A.

Twierdzenie 6 (Theorem 2 w [H5]) *Załóżmy, że (f^*, μ^*) jest równowagą stacjonarną w grze stochastycznej z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu spełniającą założenia (B1) oraz (B3–B6). Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, taki że dla $n \geqslant n_\varepsilon$ wektor strategii $\overline{f} = (f, \ldots, f)$, gdzie $f(\cdot|s, \mu) \equiv f^*(\cdot|s)$ jest ε-równowagą Nasha w n-osobowym odpowiedniku gry z continuum graczy.*

W przypadku gier, w których prawdopodobieństwa przejścia łańcuchów Markowa stanów prywatnych graczy zależne są od stanów i akcji pozostałych graczy, równowaga w grze z continuum graczy nie musi być dobrym rozwiązaniem przybliżonym dla jej odpowiedników z dużą skończoną liczbą graczy. Pokazuje to następujący przykład[11]:

Przykład 2 (Example 2 w [H5]) *Rozważmy grę stochastyczną z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu z $S = \{0, 1\} = A$ oraz:*

$$Q(\cdot|s, a, \mu) = \begin{cases} (2\mu_0 - 1)\delta_0 + 2\mu_1\delta_1, & \textit{jeśli } a = 0 \textit{ i } \mu_0 \geqslant \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1, & \textit{jeśli } a = 0 \textit{ i } \mu_0 < \frac{2}{3} \\ \frac{2\mu_0+1}{3}\delta_0 + \frac{2\mu_1}{3}\delta_1, & \textit{jeśli } a = 1 \end{cases}$$

$$r(s, a, \mu) = \begin{cases} 6s, & \textit{jeśli } a = 0 \\ 1 - s, & \textit{jeśli } a = 1 \end{cases}$$

Można pokazać, że $f^* \equiv \delta_0$ oraz rozkład $\mu^* = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1$ są w równowadze stacjonarnej w powyższej grze.

Załóżmy teraz, że wszyscy gracze w n-osobowym odpowiedniku tej gry używają strategii f^*. Łatwo zauważyć, że w takiej sytuacji z prawdopodobieństwem 1 wszystkie stany prywatne graczy osiągają wartość 0 po skończonej liczbie etapów gry, niezależnie od tego, jakie były ich początkowe wartości. Ponieważ jednak stan $\overline{s} = (0, \ldots, 0)$ jest stanem pochłaniającym, średnia wypłata na jednostkę czasu dowolnego gracza jest równa 0. Załóżmy następnie, że jeden z graczy zmienia swoją strategię z f^* na $g \equiv \delta_1$. W takiej sytuacji łańcuch Markowa stanów gry również po skończonej liczbie etapów gry zostaje zaabsorbowany w stanie $\overline{s} = (0, \ldots, 0)$, ale wypłata gracza stosującego strategię g jest równa 1, a zatem wektor złożony ze strategii f^* nie jest ε-równowagą Nasha w żadnym z n-osobowych odpowiedników gry z continuum graczy dla $\varepsilon < 1$.

[11] Warto tutaj wspomnieć, że jest to jeden z zaledwie dwóch przykładów dostępnych w literaturze, dla których równowagi w grze z continuum graczy nie są dobrymi przybliżeniami równowag w odpowiadających im grach z dużą skończoną liczbą graczy. Drugi przykład można znaleźć w pracy [13] i jest zasadniczo różny od naszego.

Twierdzenie 7 (Theorem 3 w [H5]) *Niech dla dowolnego $L > 0$,*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^L \;&:=\; \{f \in \mathcal{F} : f \text{ jest słabo ciągła oraz dla dowolnego } s \in S,\\ &\qquad f(\cdot|s,\cdot) \text{ jest słabo lipschitzowsko ciągła ze stałą } L\}\,.\end{aligned}$$

Niech następnie (f^*, μ^*) będzie równowagą stacjonarną w grze z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu spełniającej założenia (B1–B4). Załóżmy dalej, że:

(a) Strategia stacjonarna f zdefiniowana wzorem $f(\cdot|s,\mu) = f^*(\cdot|s)$ dla $s \in S$ i $\mu \in \Delta(S)$ jest elementem $\mathcal{F}$ oraz jest słabo lipschitzowsko ciągła ze stałą β_f jako funkcja s.

(b) Prawdopodobieństwo przejścia Q spełnia[12] dla dowolnych $s \in S$, $a_1, a_2 \in A$ oraz $\tau_1, \tau_2 \in \Delta(S\times A)$

$$\|Q(\cdot|s,a_1,\tau_1) - Q(\cdot|s,a_2,\tau_2)\}\|_v \leqslant \beta_Q(\max\{d_A(a_1,a_2), \rho_{S\times A}(\tau_1,\tau_2)\}).$$

(c) Stałe β_f, β_Q spełniają $\beta_Q(1+\beta_f) < \frac{\gamma}{2}$.

Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $L > 0$ istnieje $n_{\varepsilon,L} \in \mathbb{N}$, takie że dla $n \geqslant n_{\varepsilon,L}$ wektor strategii, w którym każdy z graczy używa strategii f jest ε-równowagą Nasha w klasie $\mathcal{F}^L_n$ w n-osobowym odpowiedniku gry stochastycznej z continuum graczy.

Dowody Twierdzeń 6 i 7 opierają się na rezultacie Boissarda (por. Corollary 2.5 w [12]), pozwalającym na oszacowanie różnicy wartości zadanej funkcji ciągłej, której jednym z argumentów jest rozkład prawdopodobieństwa, w dwóch przypadkach: gdy za ten argument przyjmiemy pewien rozkład, oraz jeśli zamiast niego weźmiemy rozkład empiryczny dla k-elementowego wektora zmiennych pochodzących z tego rozkładu. Korzystając z tego wyniku jesteśmy w stanie udowodnić, że wypłaty w n-osobowych odpowiednikach gry z continuum graczy ze średnią wypłatą na jednostkę czasu są zbieżne do wypłat w grze z continuum graczy. Wymaga to jednak spełnienia dodatkowego warunku: rozkłady brzegowe na S rozkładów niezmienniczych dla prawdopodobieństw przejścia w n-osobowych odpowiednikach gry z continuum graczy, gdy wszyscy gracze poza co najwyżej jednym używają tej samej strategii stacjonarnej muszą być słabo zbieżne do rozkładu niezmienniczego łańcucha prywatnych stanów gracza w grze z continuum graczy, jeśli gracze stosują te same strategie w obu modelach[13]. Mając tego rodzaju zbieżność, jesteśmy w stanie udowodnić tezy obu twierdzeń.

W przypadku Twierdzenia 6 odpowiednie rozkłady niezmiennicze w modelu n-osobowym i w modelu z continuum graczy są identyczne na mocy założenia (B5) (ponieważ przejścia łańcucha stanów prywatnych dowolnego gracza są niezależne od stanów prywatnych i decyzji pozostałych graczy – niezależnie od ich liczby). W przypadku Twierdzenia 7 dla udowodnienia zbieżności odpowiednich rozkładów niezmienniczych w modelach n-osobowych do rozkładu niezmienniczego w grze z continuum graczy musimy pokazać, że miara niezmiennicza procesu stanów prywatnych gracza stosującego dowolną strategię $g \in \mathcal{F}^L$ przeciw $f \in \mathcal{F}^L$ w grze z continuum graczy nie jest zależna od początkowego rozkładu par: stan prywatny-akcja w grze (w ogólności nie jest to prawdziwe – nie jest tak np. w grze rozważanej w przykładzie 2). Robimy to, pokazując, że operator $M_f : \Delta(S) \to \Delta(S)$ zdefiniowany wzorem

$$M_f(\mu) := p_{f,\Pi(f,\mu)}, \quad \text{gdzie } \Pi(f,\mu)(D) := \int_D f(da|s)\mu(ds) \text{ dla } D \in \mathcal{B}(S\times A)$$

spełnia założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Otrzymany punkt stały μ_{ff} jest jedyną miarą niezmienniczą procesu stanów prywatnych gracza, gdy wszyscy stosują strategię f. Jedyność

[12] d_A w poniższej nierówności oznacza metrykę na zbiorze A, natomiast $\|\cdot\|_v$ oznacza normę definiowaną na zbiorze skończonych miar znakowanych na $(S, \mathcal{B}(S))$ wzorem

$$\|\mu\|_v = \sup_{B\in\mathcal{B}(S)} \mu(B) + |\inf_{B\in\mathcal{B}(S)} \mu(B)|.$$

[13] Oczywiście wymagane są pewne dodatkowe założenia dotyczące ciągłości strategii stosowanych przez graczy.

miary niezmienniczej (oznaczanej dalej przez μ_{gf}) w ogólnym przypadku (gdy gracz stosuje strategię g przeciwko f używanej przez pozostałych uczestników gry) łatwo udowodnić, korzystając z już pokazanej części oraz geometrycznej ergodyczności łańcucha wynikającej z założenia (B3).

Następnym krokiem dowodu jest zauważenie, że dla dowolnego podciągu ciągu rozkładów brzegowych na S rozkładów niezmienniczych w n-osobowych odpowiednikach gier z continuum graczy istnieje podciąg zbieżny. Jeśli gra spełnia założenia Twierdzenia 7, można pokazać, że musi on być zbieżny do odpowiedniej miary μ_{gf}. Oznacza to jednak, że cały ciąg jest zbieżny do μ_{gf}, co daje nam tezę.

4.3 Gry semimarkowskie z czasem ciągłym (praca [H4])

4.3.1 Model

Kolejny model, który omówimy, jest pod wieloma względami podobny do modelu z wypłatą całkowitą omawianego w poprzednich rozdziałach, w związku z czym w poniższym opisie będziemy koncentrowali się głównie na elementach je odróżniających. Grę semimarkowską z continuum graczy z czasem ciągłym z wypłatą całkowitą opisujemy przy pomocy następujących obiektów:

- Zbiory stanów prywatnych i akcji S i A są skończone. Oba, jak w przypadku gier z wypłatą całkowitą z poprzednich rozdziałach, uzupełnione są o elementy s^* i a^*, oznaczające „śmierć" gracza oraz jedyną akcję dostępną w stanie s^*.
- Stan globalny gry w chwili t, dla odróżnienia od modeli z czasem dyskretnym, oznaczać będziemy przez X_t. Jak poprzednio, jest to rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze S, mówiący o tym, jak duży odsetek nieskończonej populacji graczy znajduje się w danej chwili w poszczególnych stanach prywatnych.
- Zakładamy, że gra gra rozgrywana jest w czasie ciągłym ($t \geqslant 0$) ale stan prywatny dowolnego gracza α może zmieniać się wyłącznie w chwilach $T_0^\alpha, T_1^\alpha, \ldots$, przy czym $T_0^\alpha = 0$. Czas pomiędzy kolejnymi skokami stanu gracza α, $\tau_k^\alpha = T_{k+1}^\alpha - T_k^\alpha$, jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z intensywnością $\lambda(s_{T_{k-1}^\alpha}, X_{T_k^\alpha})$. Zmienne τ_k^α są dla różnych k i α niezależne. Zakładamy, że λ jest funkcją o wartościach dodatnich oraz że jest lipschitzowską funkcją stanu globalnego gry.
- Akcje dostępne dla gracza w dowolnej chwili są, jak poprzednio, zadane przez górnie półciągłą multifunkcję $\mathcal{A} : S \times \Delta(S) \to A$.
- Skoki wykonywane przez proces stanów prywatnych gracza α opisywane są przy pomocy prawdopodobieństwa przejścia $Q : S \times A \times \Delta(S) \to \Delta(S)$, które jest funkcją lipschitzowską stanu globalnego.
- Jak poprzednio, zakładamy, że gracze używają strategii stacjonarnych. Zbiór strategii stacjonarnych oznaczamy przez $\mathcal{F}$. Przez $\mathcal{F}_d$ oznaczamy zbiór strategii stacjonarnych deterministycznych.
- Ponieważ stany poszczególnych graczy zmieniają się w różnych momentach, dynamika stanu globalnego gry opisywana jest przez układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\dot{X}_t^s = \sum_{s' \in S} \sum_{a \in A} X_t^{s'} \lambda(s', X_t) Q(s|s', X_t, a) \widehat{f}_a(s', X_t) - X_t^s \lambda(s, X_t), \quad s \in S \tag{4}$$

  przy czym $X_0 \equiv x_0$ (gdzie x_0 oznacza początkowy stan globalny), a $\widehat{f}_a(s, X) := \int_0^1 \mathbb{1}\{f^\alpha(s, X) = a\}\, d\alpha$, gdzie $f^\alpha \in \mathcal{F}_d$ oznacza strategię deterministyczną gracza α[14]. W literaturze układ równań (4) nazywany jest zwykle *dynamiką Kurtza* (por. Theorem 5.3 w [56]).

[14]Ponieważ wyniki udowodnione w pracy [H4] dotyczą istnienia równowagi stacjonarnej w strategiach deterministycznych, $\widehat{f}$ definiujemy dla takiego przypadku – definicja dla ogólnego przypadku byłaby oczywiście trochę inna.

- Wypłatę całkowitą gracza α stosującego strategię $f \in \mathcal{F}$ przeciwko strategii $g \in \mathcal{F}$ pozostałych graczy obliczamy ze wzoru

$$\overline{J}^{\alpha}(f,g,\mu_0) = \mathbb{E}^{x_0,\mu_0,Q,f,g} \sum_{i=0}^{i_e^{\alpha}-1} \left(\widetilde{r}(s^{\alpha}_{T_i^{\alpha}}, X_{T_i^{\alpha}}(g), a^{\alpha}_{T_i^{\alpha}}) + \int_{T_i^{\alpha}}^{T_{i+1}^{\alpha}} r(s^{\alpha}_{T_i^{\alpha}}, X_t(g), a^{\alpha}_{T_i^{\alpha}})\, dt \right) P_{f,\mu_0},$$

  gdzie $T_{i_e^{\alpha}}$ jest momentem pierwszego powrotu procesu stanów prywatnych gracza α do stanu s^*, μ_0 jest rozkładem stanów prywatnych nowo narodzonych graczy, $r : S \times A \times \Delta(S) \to \mathbb{R}$ jest wypłatą bieżącą gracza, a $\widetilde{r} : S \times A \times \Delta(S) \to \mathbb{R}$, wypłatą gracza w chwili skoku procesu jego stanów prywatnych. Zakładamy, że r oraz $\widetilde{r}$ są takie same dla każdego gracza oraz że są ciągłymi funkcjami stanu globalnego gry.

- Równowagę stacjonarną w grze definiujemy podobnie jak w przypadku gier z czasem dyskretnym omawianych wcześniej.

4.3.2 Wyniki

Istnienie równowagi stacjonarnej w grach tego typu udowodniliśmy przy założeniach korzystających z pewnych pojęć teorii krat[15].

(C1) Istnieje $p_0 > 0$, takie że dla dowolnego stanu globalnego X i dowolnej strategii $f \in \mathcal{F}$ prawdopodobieństwo przejścia z dowolnego stanu prywatnego $s \in S \setminus \{s^*\}$ do s^* w $|S|-1$ krokach w łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwami przejścia

$$p_{ss'} = Q(s'|s, f(s,X), X)$$

jest nie mniejsze niż p_0.

(C2) S i A są podkratami $\mathbb{R}$, przy czym $s^* = \min\{S\}$ i $a^* = \min\{A\}$. Ponadto (a) dla dowolnych $s \in S$ i $X \in \Delta(S)$, $\mathcal{A}(s,X)$ jest podkratą A, (b) $\mathcal{A}(s,X)$ jest niemalejącą funkcją (s,X).

(C3) $r(s,a,X)$ i $\widetilde{r}(s,a,X)$ są nieujemne, niemalejące jako funkcje s oraz supermodularne w (s,a). Ponadto mają rosnące przyrosty w (s,a) i X.

(C4) $Q(\cdot|s,a,X)$ jest stochastycznie supermodularne w (s,a) oraz stochastycznie niemalejące w s, a i X. Ponadto ma stochastycznie rosnące przyrosty w (s,a) i X.

(C5) $\lambda(s,X)$ nie zależy od s oraz jest nierosnącą funkcją X.

Założenia tego typu pojawiają się w wielu pracach z teorii gier, także gier dynamicznych (por. [4, 5, 17, 31, 42, 60, 63, 1]). Opisują one sytuację, gdy stany i akcje graczy powiązane są w taki sposób, że duży stan prywatny gracza powoduje, że opłaca mu się używać dużych akcji. Podobnie, w sytuacji, gdy stany prywatne pozostałych graczy mają duże wartości, używanie dużych akcji staje się bardziej opłacalne. Jak się okazuje, wiele praktycznych zastosowań gier dynamicznych (zarówno w ekonomii, jak i w naukach inżynierskich) może być modelowanych przez gry tego typu.

Twierdzenie 8 (Theorem 1 w [H4]) *Semimarkowska gra z continuum graczy z wypłatą całkowitą spełniająca założenia (C1–C5) ma równowagę stacjonarną (f^*, X^*), taką że $f^* \in \mathcal{F}_d$ oraz jest funkcją niemalejącą stanu prywatnego gracza i stanu globalnego gry.*

---

[15] Pojęcia te omawiamy pokrótce poniżej.

Mówimy, że zbiór X z częściowym porządkiem $\preceq_X$ jest *kratą*, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ istnieją w zbiorze X elementy $x_1 \vee x_2 := \sup\{x_1, x_2\}$ oraz $x_1 \wedge x_2 := \inf\{x_1, x_2\}$. X jest *kratą zupełną*, jeśli każdy podzbiór X ma kresy górny i dolny należące do X.

Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest *supermodularna*, jeśli $f(x_1 \vee x_2) + f(x_1 \wedge x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$ dla $x_1, x_2 \in X$. Jeśli dodatkowo $(Y, \preceq_Y)$ jest kratą, mówimy, że funkcja $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ ma rosnące przyrosty, jeśli dla $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \preceq_X x_2$ oraz $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \preceq_Y y_2$ zachodzi $g(x_2, y_2) - g(x_1, y_2) \geqslant g(x_2, y_1) - g(x_1, y_1)$.

Wiadomo, że $(\mathbb{R}, \leqslant)$ jest kratą. Kratą jest też $\Delta(\mathbb{R})$ z relacją stochastycznej dominacji. Za każdym razem, gdy odwołujemy się do własności kratowych zdefiniowanych przy pomocy tego porządku, dodajemy na początku „stochastycznie” (piszemy np. o stochastycznej supermodularności, stochastycznie rosnących przyrostach etc.)

Dowód powyższego twierdzenia składa się z kilku kroków:

(a) Zaczynamy od pokazania (przy zastosowaniu standardowych technik używanych w teorii gier supermodularnych, por. [62] oraz standardowych metod programowania dynamicznego, por. [49]), że optymalna wypłata gracza maksymalizującego wypłatę całkowitą w grze przy założeniu, że stan globalny jest stały i równy X, V_X^*, zachowuje własności funkcji r i $\widetilde{r}$ zadane założeniem (C3).

(b) Niech $\mathcal{B}(X,s)$ oznacza zbiór akcji maksymalizujących prawą stroną równania Bellmana dla powyższego problemu. Niech ponadto $\overline{B}(X,s) := \max \mathcal{B}(X,s)$, $\underline{B}(X,s) := \min \mathcal{B}(X,s)$. Korzystając z twierdzenia Topkisa (por. Theorem 2.8.3 w [62]) można pokazać, że $\overline{B}$ i $\underline{B}$ są rosnącymi funkcjami X i (dla dowolnego ustalonego X) s.

(c) Niech

$$\mathcal{F}_0 := \{f \in \mathcal{F}_d : f(s,X) \text{ jest niemalejąca wzgl. } X \text{ oraz dla dow. ustalonego } X \text{ wzgl. } s\},$$

oraz niech $\overline{X}(f,X)$ i $\underline{X}(f,X)$ oznaczają największy (w sensie dominacji stochastycznej) i najmniejszy rozkład stacjonarny łańcucha Markowa stanów indywidualnych gracza stosującego strategię $f \in \mathcal{F}_0$, jeśli stan globalny gry jest stały w czasie i równy X. Pokazujemy, że $\overline{X}$ i $\underline{X}$ są niemalejącymi funkcjami f i X.

(d) Definiujemy funkcje $\overline{\Psi} : \Delta(S) \to \Delta(S)$ i $\underline{\Psi} : \Delta(S) \to \Delta(S)$ wzorami

$$\overline{\Psi}(X) := \overline{X}(\overline{B}, X) \quad \text{oraz} \quad \underline{\Psi}(X) := \underline{X}(\underline{B}, X).$$

Na mocy już udowodnionych własności obie są niemalejącymi funkcjami z kraty zupełnej $\Delta(S)$ w siebie. Na mocy twierdzenia Tarskiego o punkcie stałym (por. [61]) obie funkcje mają punkty stałe, odpowiednio $\overline{X}^*$ i $\underline{X}^*$. Biorąc $f^* = \overline{B}$, $\mu^* = \overline{X}^*$ lub $f^* = \underline{B}$, $\mu^* = \underline{X}^*$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

Kolejne twierdzenie prezentuje algorytm, który pozwala na nauczenie się przez graczy strategii będącej w równowadze stacjonarnej. Jego dowód jest raczej techniczny, w związku z czym nie omawiamy go poniżej:

Twierdzenie 9 (Theorem 2 w [H4]) *Następujący algorytm:*
Dla dowolnej chwili $t \geqslant 0$ wykonaj:

(a) Każdy gracz wykonujący swój ruch w chwili t wybiera akcję $a_t = \underline{B}(X_t, s)$.

w grze semimarkowskiej z continuum graczy z wypłatą całkowitą spełniającej założenia (C1–C5) oraz

(C6) $\mathcal{A}(s,X)$ nie zależy od X.

ma dla $x_0 = \delta_{s^*}$ następujące własności:

(a) Dla każdego α, $a^{\alpha}_{T^{\alpha}_{i+1}} \geqslant a^{\alpha}_{T^{\alpha}_i}$, $i = 0, 1, \ldots, i^{\alpha}_e - 1$.

(b) X_t jest rosnącą funkcją t zbieżną w nieskończoności do pewnego $\mathcal{X}$, takiego że $(\underline{B}, \mathcal{X})$ są w równowadze stacjonarnej w grze.

W pracy udowodniliśmy także twierdzenie dotyczące związku wypłat otrzymywanych przez graczy w grach semimarkowskich z continuum graczy oraz w ich n-osobowych odpowiednikach, zdefiniowanych podobnie jak w przypadku gier z czasem dyskretnym (szczegóły definicji pomijamy).

Twierdzenie 10 (Theorem 3 w [H4]) *Niech*

$$\mathcal{F}_c = \{f \in \mathcal{F} : f(\cdot|s, X) \text{ nie zależy od } X\}.$$

Jeśli założenie (C1) jest spełnione, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie że dla $n \geqslant N_\varepsilon$ oczekiwana całkowita wypłata dowolnego gracza α odpowiadająca strategii $g \in \mathcal{F}_c$ używanej przeciw $f \in \mathcal{F}_c$ pozostałych graczy w n-osobowym odpowiedniku gry semimarkowskiej z continuum graczy z wypłatą całkowitą różni się od jego wypłaty w grze z continuum graczy o co najwyżej ε.

Dowód twierdzenia opiera się na wykorzystaniu twierdzenia Kurtza (por. Theorem 5.3 w [56]), na mocy którego dla dowolnego przedziału domkniętego trajektorie procesu stanów globalnych w n-osobowych odpowiednikach gry z continuum graczy gry, gdy używają oni (poza co najwyżej jednym) strategii f, są przy $n \to \infty$ jednostajnie zbieżne według prawdopodobieństwa do rozwiązania równania (4). Korzystając z założenia (C1) oraz ciągłości i nieujemności funkcji λ, możemy znaleźć skończony horyzont czasowy T_ε w taki sposób, że oczekiwana wypłata dowolnego gracza po przekroczeniu czasu T_ε od urodzenia będzie odpowiednio małą częścią ε. Stosując twierdzenie Kurtza do przedziału $[T_0^\alpha, T_0^\alpha + T_\varepsilon]$ oraz korzystając z ciągłości funkcji r i $\widetilde{r}$, otrzymujemy tezę twierdzenia.

Naturalną konsekwencją powyższego twierdzenia jest następujący fakt:

Wniosek 1 *Załóżmy, że gra semimarkowska z continuum graczy z wypłatą całkowitą spełnia założenia (C1–C6) i weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy dla dostatecznie dużych n $(\underline{B}(\underline{X}^*, \cdot), \underline{X}^*)$ oraz $(\overline{B}(\overline{X}^*, \cdot), \overline{X}^*)$ są słabymi ε-równowagami stacjonarnymi w klasie $\mathcal{F}_c$ w n-osobowych odpowiednikach gry z continuum graczy.*

4.4 Zastosowania gier stochastycznych z continuum graczy w telekomunikacji bezprzewodowej (prace [H1,H3])

W kolejnej części autoreferatu omawiam dwie prace dotyczące zastosowań modeli gier stochastycznych z continuum graczy omówionych w poprzednich rozdziałach do modelowania pewnych problemów związanych z telekomunikacją bezprzewodową. Dowody omawianych wyników oparte są na szczegółowej analizie własności funkcji wypłaty w omawianych modelach (które jesteśmy w stanie w obu przypadkach opisać wzorami) i mają techniczny charakter. W związku z tym nie będę ich dokładniej omawiać.

4.4.1 Automatyczne sterowanie mocą w urządzeniach mobilnych (praca [H1])

Pierwszy problem można w skrócie opisać następująco: Duża populacja telefonów komórkowych walczy o dostęp do stacji bazowej. Każdy próbuje przesyłu danych w kolejnych jednostkach czasu, wybierając moc, z jaką będzie transmitować. Wybór ten jest istotny z trzech powodów:

- Większa moc oznacza zwiększenie przesyłu własnych danych.
- Większa moc oznacza zwiększenie interferencji dla transmisji innych graczy, zmniejszając wielkość ich przesyłu.
- Większa moc powoduje szybsze zużycie energii.

W naszym modelu zakładamy, że transmisja kończy się, gdy bateria zostanie wyczerpana, w związku z czym każdy z graczy maksymalizuje swój przesył minus koszt energii w przeciągu jednego „życia" baterii.

Ponieważ jest to gra z dużą populacją jednakowych graczy, przybliżanie jej przy pomocy gry stochastycznej z continuum graczy wydaje się mieć sens. Gracze maksymalizują swoje wypłaty w przeciągu jednego „życia" baterii, a zatem stosować tutaj będziemy model z wypłatą całkowitą omówiony w części 4.2.3 autoreferatu. Stanem prywatnym s^i gracza i jest stan energetyczny jego baterii (czyli moc dostępna w danej chwili do poboru). Zakładamy, że $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_M\} \cup s^*$, przy czym $s_1 < s_2 < \ldots < s_M$. Akcją gracza jest moc, z jaką transmituje. Zakładamy, że zbiór akcji jest postaci $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$, przy czym (jak poprzednio) $a_1 < a_2 < \ldots < a_K$. Dodatkowo zakładamy, że zbiór akcji dostępnych w stanie $s \neq s^*$ jest postaci

$$\mathcal{A}(s) = \{a_1, \ldots, a_{k_s}\} \subset A,$$

przy czym dla dowolnych $s < s'$ $k_s \leqslant k_{s'}$. Prawdopodobieństwa przejścia prywatnych łańcuchów Markowa graczy są następujące:

- Prawdopodobieństwo pozostania w stanie $s \neq s^*$ przez gracza używającego akcji a jest równe $p(a)$, gdzie
$$p(a) = 1 - \alpha a - \gamma,$$
α i γ są ustalonymi stałymi dodatnimi.
- Z pozostałym prawdopodobieństwem jego stan zmniejsza się o 1.

Stan s^* oznacza, że bateria gracza jest pusta. W dowolnej chwili gracz z pustą baterią może ją doładować (do pełna, czyli stanu s_M) z prawdopodobieństwem p_{0N}.

Jednokrokowa wypłata dla gracza w stanie s używającego akcji a, jeśli globalny rozkład par: stan prywatny-akcja jest równy τ możemy obliczyć ze wzoru

$$r(s, a, \mu) = \frac{a}{\sigma^2 + C\sum_{k=1}^{K} a_l \sum_{m=1}^{M} \tau_{mk}} - \beta a,$$

gdzie C oznacza współczynnik interferencji, σ^2 – moc szumu, a β – koszt energii. Pierwsza część użyteczności to tzw. *signal to interference ratio* (SINR) i jest to wielkość standardowo stosowana do wyrażania jakości transmisji bezprzewodowej (por. [48]). Druga część to koszt energii zużytej do transmisji.

Jak nietrudno zweryfikować, tak opisana gra z continuum graczy z wypłatą całkowitą spełnia zarówno założenia Twierdzenia 3, jak i Twierdzenia 4, a zatem istnienie równowagi stacjonarnej w tej grze oraz możliwość efektywnego przybliżania modeli n-osobowych z dużą liczbą graczy przy pomocy naszego modelu są zagwarantowane. Naszym celem w pracy [H1] było jednak coś więcej – po pierwsze znalezienie klasy możliwie najprostszych (w praktycznej implementacji) strategii, która będzie zawierać równowagę w tej grze, po drugie zaś znalezienie efektywnych algorytmów numerycznych szukania strategii w równowadze. W tym celu definiujemy dwie szczególne klasy strategii stacjonarnych:

Dowolne strategie wykorzystujące wyłącznie najmniejsze i największe moce dostępne w poszczególnych stanach:

$$\mathcal{F}_m = \left\{ f \in \mathcal{F} : \exists r_1, \ldots, r_M \in [0,1], f(s_m, \mu) = r_m \delta[a_1] + (1 - r_m)\delta[a_{k_{s_m}}], m = 1, \ldots, M, \mu \in \Delta(S) \right\}.$$

oraz strategie progowe używające wyłącznie najmniejszych i największych mocy dostępnych w poszczególnych stanach:

$$\mathcal{F}_{mp} = \left\{ f \in \mathcal{F} : \exists s^0 \in S, \exists r \in [0,1], \forall \mu \in \Delta(S), f(s, \mu) = \left\{ \begin{array}{ll} \delta[a_1], & s < s^0 \\ r\delta[a_1] + (1-r)\delta[a_{k_s}], & s = s^0 \\ \delta[a_{k_s}], & s > s^0 \end{array} \right. \right\}.$$

Twierdzenie 11 (Theorem 2 w [H1]) *Rozważana gra zawsze posiada równowagę stacjonarną* (f^*, μ^*) *taką że* $f^* \in \mathcal{F}_{mp}$. *Ponadto:*

(i) Jest ona jedyna w zbiorze $\mathcal{F}_{mp}$.

(ii) Jeśli

$$\beta C \frac{\sum_{m=1}^{M} \frac{a_{k_{s_m}}}{\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma}}{\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma} + \frac{1}{p_{0N}}} \leqslant 1 - \beta\sigma^2, \tag{5}$$

to $f^* = f^+$, gdzie $f^+(s,\mu) := \delta_{a_{k_s}}$, $s = s_1, \ldots, s_M$, $\mu \in \Delta(S)$.

(iii) Jeśli

$$\beta C a_1 > 1 - \beta\sigma^2 \quad i \quad p_{0N} \geqslant \frac{(\alpha a_1 + \gamma)(1-\beta\sigma^2)}{M(\beta C a_1 - (1-\beta\sigma^2))}, \tag{6}$$

to $f^* = f^-$, gdzie $f^-(s,\mu) := \delta_{a_1}$, $s = s_1, \ldots, s_M$, $\mu \in \Delta(S)$.

Twierdzenie 12 (Theorem 3 w [H1]) *Załóżmy, że f^+ ani f^- nie są strategiami w równowadze stacjonarnej w rozważanej grze oraz, że zbiór*

$$S_0 := \{s \in S : |\mathcal{A}(s)| > 1\}$$

ma co najmniej dwa elementy. Wtedy istnieje continuum równowag stacjonarnych (f^*, μ^*) takich że $f^* \in \mathcal{F}_m$. Ponadto, $f^* \in \mathcal{F}_m$ jest strategią w równowadze stacjonarnej wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące równanie:

$$\sum_{m=1}^{M} \overline{r}_m \left(\frac{1}{\alpha a_1 + \gamma} - \frac{1}{\alpha a_{k_{s_m}} + \gamma)} \right) = \frac{C\beta(M p_{0N} + \gamma}{p_{0N}(\alpha - \alpha\beta\sigma^2 + C\beta\gamma)} - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\alpha a_{k_{s_m}} + \gamma} - \frac{1}{p_{0N}},$$

gdzie

$$\overline{r}_m := \frac{r_m(\alpha a_1 + \gamma)}{r_m + (1-r_m)(\alpha a_{k_{s_m}} + \gamma)},$$

a r_m spełniają $f^*(s_m, \mu) = r_m \delta[a_1] + (1-r_m)\delta[a_{k_{s_m}}]$ dla $m = 1, \ldots, M$ oraz $\mu \in \Delta(S)$.

Kolejne dwa twierdzenia podają sposoby efektywnego obliczania równowag omawianych w poprzednich wynikach:

Twierdzenie 13 (Theorem 4 w [H1]) *Zdefiniujmy $\theta : S \times [0,1] \to \mathbb{R}$*

$$\theta(s^0, r) := \sigma^2 + C \frac{\frac{(s^0-1)a_1}{\alpha a_1+\gamma} + \frac{r a_1 + (1-r) a_{k_{s^0}}}{r(\alpha a_1+\gamma)+(1-r)(\alpha a_{k_{s^0}}+\gamma)} + \sum_{s=s^0+1}^{s_M} \frac{a_{k_s}}{\alpha a_{k_s}+\gamma}}{\frac{s^0-1}{\alpha a_1+\gamma} + \frac{1}{r(\alpha a_1+\gamma)+(1-r)(\alpha a_{k_{s^0}}+\gamma)} + \sum_{s=s^0+1}^{s_M} \frac{1}{\alpha a_{k_s}+\gamma} + \frac{1}{p_{0N}}}$$

oraz $h : \mathcal{F}_{mp} \to [0, M]$

$$h(f) := M + 1 - ind(s^0) - r,$$

gdzie $ind(s) = l \iff s = s_l$. Strategia w równowadze stacjonarnej $f^* \in \mathcal{F}_{mp}$ w rozważanej grze może być obliczona przez zastosowanie metody bisekcji do funkcji

$$\phi(x) = \theta(h^{-1}(x)) - \frac{1}{\beta}$$

na przedziale $[0, M]$. Przybliżona wartość f^* będzie wtedy zadana przez $h^{-1}(x^*)$, gdzie x^* jest (przybliżonym) miejscem zerowym funkcji ϕ. Jeśli dla każdego $x \in [0, M]$, $\phi(x) < 0$, strategią w równowadze jest f^+. Jeśli natomiast dla każdego $x \in [0, M]$, $\phi(x) > 0$, strategią w równowadze jest f^-.

Twierdzenie 14 (Theorem 5 w [H1])

(i) Niech u będzie dowolną funkcją liniową z $\mathbb{R}^N$ w $\mathbb{R}$. Następująca procedura:

(a) Sprawdź, czy parametry gry spełniają (5) lub (6). Jeśli spełniają pierwszy warunek, przyjmij $f^* := f^+$, jeśli spełniają drugi, przyjmij $f^* := f^-$. Jeśli nie spełniają żadnego z powyższych warunków przejdź do (b).

(b) Używając algorytmu sympleks rozwiąż następujący problem programowania liniowego:

$$\begin{aligned} &\textit{znajdź maksimum} && u(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_M) \\ &\textit{przy ograniczeniach} && \sum_{m=1}^{M}\overline{r}_m\left(\frac{1}{\alpha a_1+\gamma}-\frac{1}{\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma}\right)=D-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma} \\ &&& 0\leqslant \overline{r}_m\leqslant 1,\quad m=1,\ldots,M, \end{aligned}$$

gdzie

$$D=C\beta\frac{Mp_{0N}+\gamma}{p_{0N}(\alpha-\alpha\beta\sigma^2+C\beta\gamma)}-\frac{1}{p_{0N}}, \tag{7}$$

(c) Dla $m=1,\ldots,M$ oblicz $r_m := \frac{\overline{r}_m(\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma)}{\overline{r}_m(\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma)+(1-\overline{r}_m)(\alpha a_1+\gamma)}$ oraz $f^*(s_m,\mu) := r_m\delta[a_1]+(1-r_s)\delta[a_{k_{s_m}}]$.

daje w wyniku strategię w równowadze w rozważanej grze $f^* \in \mathcal{F}_m$, taką że randomizacja występuje w co najwyżej jednym stanie.

(ii) Jeśli weźmiemy

$$u(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_M) := \sum_{m=1}^{M}G^{M-m}\left(\frac{1}{\alpha a_1+\gamma}-\frac{1}{\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma}\right)\overline{r}_m, \tag{8}$$

gdzie $G>1$ jest dowolną ustaloną stałą, to strategia f^* otrzymana przy pomocy powyższej procedury będzie jedyną strategią w równowadze w rozważanej grze należącą do zbioru $\mathcal{F}_{mp}$.

Kolejny omawiany przez nas wynik dotyczy tego, w jaki sposób obliczać strategię stacjonarną z $\mathcal{F}_{mp}$, która maksymalizuje na zbiorze wszystkich strategii stacjonarnych $\mathcal{F}$ średnią wypłatę gracza w rozważanej grze (możemy przyjąć, że taka strategia zostałaby wybrana, gdyby wybór odbywał się w sposób scentralizowany).

Twierdzenie 15 (Theorem 6 w [H1]) *Istnieje strategia $\overline{f}\in\mathcal{F}_{mp}$, która maksymalizuje średnią wypłatę gracza w rozważanej grze na zbiorze $\mathcal{F}$. Można ją obliczyć, używając następującej procedury:*

(a) Sprawdź, czy parametry gry spełniają warunek (6). Jeśli tak, przyjmij $\overline{f} := f^-$ i zakończ. Jeśli nie, przejdź do (b),

(b) Znajdź d maksymalizujące funkcję

$$H(d) := \left(\frac{1}{\sigma^2+C\left[\frac{Mp_{0N}+\gamma}{\alpha p_{0N}(d+\frac{1}{p_{0N}})}-\frac{\gamma}{\alpha}\right]}-\beta\right)\left(\frac{M}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}d\right)$$

na przedziale $\left[\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{\alpha a_{k_{s_m}}+\gamma},\frac{M}{\alpha a_1+\gamma}\right]$, d^*.

(c) Wykonaj kroki (b) i (c) procedury z Twierdzenia 14 z D zamienionym na d^* oraz u zadanym przez (8).

W pracy [H1] można znaleźć przykłady porównania średnich wypłat graczy dla kilku zestawów parametrów gry, pokazujące, że może się zdarzyć, że strategie w równowadze są różne od tych wybieranych w sposób scentralizowany. Trudno jednak przeprowadzić formalną analizę (przez obliczanie tzw. *ceny anarchii*, por. [37], co jest standardową procedurą w przypadku problemów tego typu) tego, w jakim stopniu gracze tracą na samodzielnym podejmowaniu decyzji, ponieważ wypłaty w grze mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne. W szczególności wypłaty w równowadze stacjonarnej, gdy f^+ ani f^- nie są strategiami w równowadze, są zawsze równe zero, o czym mówi kolejne twierdzenie. Daje ono także informacje o tym, jak przedstawiają się inne istotne z praktycznego punktu widzenia parametry modelu w takiej sytuacji.

Twierdzenie 16 (Theorem 7 w [H1]) *Załóżmy, że parametry rozważanej przez nas gry są takie, że ani f^+, ani f^- nie są strategiami w równowadze. Wtedy dla dowolnej równowagi stacjonarnej (f^*, μ^*), takiej że $f^* \in \mathcal{F}$:*

(i) Oczekiwana wypłata gracza w równowadze,

$$\overline{J}(\delta_{s_M}, \mu^*, f^*, f^*) = 0,$$

(ii) Całkowity przesył danych w dowolnej chwili t, jeśli gracze stosują strategię f^*,

$$Th(f^*) = \frac{\beta(N - \gamma D)}{\alpha D},$$

gdzie D zdefiniowane jest przy pomocy równości (7).

(iii) Średni czas życia baterii, gdy gracze stosują strategię f^* wynosi $T(f^*) = D$.

4.4.2 Systemy kolejkowe typu M/M/∞ z kosztem obsługi dzielonym pomiędzy użytkowników (praca [H3])

Drugi problem praktyczny, który możemy opisać jako grę stochastyczną z continuum graczy, rozważany był w pracy [H3]. Można go opisać następująco: Kilka terminali komórkowych próbuje uzyskać dostęp do pewnego zasobu, którego jakość zależy od tego, czy transmisja nie będzie miała istotnych opóźnień. Przykładem takiego zasobu może być transmisja sportowa na żywo. Problem taki możemy opisać przy pomocy systemu kolejkowego typu M/M/∞. Graczami są terminale komórkowe, które decydują, czy ustawić się w kolejce na podstawie obserwowanej przez siebie długości kolejki. Ich wypłaty liczymy jako wartość usługi (która jest taka sama dla każdego gracza i równa γ) pomniejszony o koszt obsługi, który liczymy jako całkę z ciągłej nierosnącej[16] funkcji długości kolejki $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ od zera do czasu zakończenia obsługi. Napływ zgłoszeń oraz czas obsługi modelujemy jako kolejkę typu M/M/∞ ze znanymi intensywnością napływu zgłoszeń λ oraz intensywnością obsługi zgłoszeń μ. W tak opisanym modelu mamy do czynienia z dużą skończoną liczbą identycznych graczy, w związku z czym możemy go przybliżać przy pomocy gry z continuum graczy. Ponieważ pojedynczy gracz uczestniczy w grze wyłącznie w okresie swojej obsługi, który jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, gra taka będzie grą semimarkowską z wypłatą całkowitą podobną do tych omawianych w rozdziale 4.3. Zauważmy jednak, że jedyna decyzja, jaką podejmuje gracz, dotyczy tego, czy ustawić się w kolejce, i podejmowana jest zawsze w momencie przystąpienia do gry. Pozwala to na uproszczenie modelu z rozdziału 4.3:

- Nie rozważamy stanów prywatnych graczy, a za stan globalny gry w chwili t przyjmujemy długość kolejki X_t.
- Zbiór akcji gracza jest dwuelementowy $A = \{E, N\}$, gdzie E oznacza dołączenie do kolejki (ang. *entering the queue*), a N, nie dołączanie do kolejki (ang. *not entering the queue*).
- Gracze podejmują swoje decyzje obserwując długość kolejki X_t, a zatem strategie stacjonarne są funkcjami z $\mathbb{R}^+$ w $\Delta(A)$.

[16] Założenie, że funkcja kosztu jest nierosnąca jest niestandardowe i wynika z interpretacji modelu – w przypadku transmisji na żywo do wielu terminali możemy przyjąć, że koszt jest dzielony pomiędzy wszystkie terminale, dzięki czemu koszt przypadający na jeden terminal maleje wraz ze wzrostem ich liczby.

- Ewolucja stanu globalnego gry, gdy gracze poza skończoną liczbą stosują strategię $f \in \mathcal{F}$, opisana jest odpowiednikiem równania (4) postaci

$$\begin{cases} \dot{X}_t(f) = \mathbb{E}f(\{E\}|X_t)\lambda - \mu X_t(f), \forall t \geqslant 0 \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

- Wypłatę całkowitą gracza pojawiającego się w grze w chwili T_0^α, stosującego strategię $f \in \mathcal{F}$ przeciwko strategii $g \in \mathcal{F}$ pozostałych graczy można obliczyć wprost z następującego wzoru[17]:

$$\overline{J}^\alpha(X_{T_0^\alpha}, f, g) = \mathbb{E}f(\{E\}|X_{T_0^\alpha})\left[\gamma - \int_{T_0^\alpha}^{T_0^\alpha + \tau_0^\alpha} c(X_t(g))\, dt,\right]$$

  gdzie τ_0^α jest czasem obsługi gracza α, czyli zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ.

W naszym modelu, w przeciwieństwie do modelu rozważanego w pracy [H4], szukamy równowagi Nasha w strategiach stacjonarnych, a zatem rezultaty tam udowodnione nie mają tutaj zastosowania. Najważniejszym wynikiem pracy [H3] jest twierdzenie charakteryzujące wszystkie równowagi Nasha w strategiach stacjonarnych w omawianym modelu. Korzysta ono z następującej definicji:

Definicja 8 *Strategię stacjonarną $f \in \mathcal{F}$ w rozważanej grze nazywamy* strategią $[\Theta, q]$-progową, *jeśli jest postaci:*

$$f(\cdot|x) = \begin{cases} \delta_N(\cdot), & \text{jeśli } x < \Theta \\ q\delta_E(\cdot) + (1-q)\delta_N(\cdot), & \text{jeśli } x = \Theta \\ \delta_E(\cdot), & \text{jeśli } x > \Theta \end{cases}$$

Twierdzenie 17 (Theorem 1 w [H3]) *Zdefiniujmy $\overline{\Theta}$ oraz $\underline{\Theta}$ jako jedyne rozwiązania równań*

$$\frac{1}{\lambda - \overline{\Theta}\mu}\int_{\overline{\Theta}}^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\, du = \gamma, \quad \frac{1}{\underline{\Theta}\mu}\int_0^{\underline{\Theta}} c(u)\, du = \gamma.$$

Rozważana gra ma zawsze symetryczną równowagę Nasha w strategiach stacjonarnych, w której gracze używają strategii $[\Theta, q]$-progowej. Dodatkowo:

(a) Jeśli $\gamma \in \left(0, \frac{1}{\mu}\lim_{u\to\infty} c(u)\right]$, równowaga jest jedyna, opisana przez $\Theta = \infty$, czyli w równowadze gracze zawsze dołączają do kolejki.

(b) Jeśli $\gamma \in \left(\frac{1}{\mu}\lim_{u\to\infty} c(u), \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\, du\right)$, wtedy istnieje nieskończenie wiele równowag, których forma zależy od relacji między $\overline{\Theta}$ i $\frac{\lambda}{\mu}$:
(b1) Jeśli $\overline{\Theta} < \frac{\lambda}{\mu}$, istnieją równowagi 5 typów: $\Theta = \overline{\Theta}$ i dowolna $q > \frac{\overline{\Theta}\mu}{\lambda}$; $\Theta = \Theta^*$, gdzie Θ^* spełnia $c(\Theta^*) = \mu\gamma$ i $q = \frac{\Theta^*\mu}{\lambda}$; $\Theta = \underline{\Theta}$ oraz dowolne $q \in [0,1]$; dowolna $\Theta \in \left[\overline{\Theta}, \frac{\lambda}{\mu}\right]$ i $q = 0$; dowolna $\Theta \in \left[\overline{\Theta}, \frac{\lambda}{\mu}\right]$ i $q = 1$.
(b2) Jeśli $\overline{\Theta} = \frac{\lambda}{\mu}$ wtedy $\Theta = \overline{\Theta}$ i $q \in \{0,1\}$ lub $\Theta = \underline{\Theta}$ i q jest dowolną liczbą z przedziału $[0,1]$.
(b3) Jeśli $\overline{\Theta} > \frac{\lambda}{\mu}$, wtedy $\Theta = \underline{\Theta}$ i q jest dowolną liczbą z $[0,1]$ lub $\Theta = \frac{\lambda}{\mu}$ i $q = 0$.

(c) Jeśli $\gamma \in \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\, du, \frac{1}{\mu}c(0)\right)$, wtedy istnieje nieskończenie wiele równowag trzech typów: z $\Theta \in [0, \underline{\Theta}]$ i $q = 0$; z $\Theta \in [0, \underline{\Theta}]$ i $q = 1$; z $\Theta = \Theta^*$ spełniającą $c(\Theta^*) = \mu\gamma$ i $q = \frac{\Theta^*\mu}{\lambda}$.

(d) Jeśli $\gamma \geqslant \frac{1}{\mu}c(0)$, wtedy równowaga jest jedyna – $\Theta = 0$ and $q = 1$, co oznacza, że w równowadze użytkownicy nigdy nie dołączają do kolejki.

[17] Ponieważ w opisie modelu pomijamy prywatne stany graczy, tutaj również pomijamy pierwszy argument $\overline{J}^\alpha$, czyli rozkład stanów prywatnych gracza α w momencie przystąpienia do gry.

Jak w przypadku poprzedniego modelu, interesuje nas także, jaka strategia zostałaby wybrana, gdyby wybór odbywał się w sposób scentralizowany tak, aby średnia wypłata pojedynczego gracza była jak największa. Kolejne twierdzenie mówi, w jaki sposób obliczyć strategię stacjonarną, która maksymalizuje tę średnią oraz ile ona wynosi w zależności od parametrów modelu:

Twierdzenie 18 (Theorem 2 w [H3])

(a) Jeśli $c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) < \gamma\mu$, największa średnia wypłata gracza wynosi $\frac{1}{\mu}\left(\gamma\mu - c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right)$ i jest osiągnięta w sytuacji, gdy wszyscy gracze stosują strategie $[0,1]$-progowe (czyli zawsze dołączają do kolejki).

(b) Jeśli $c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \gamma\mu$, największa średnia wypłata gracza wynosi 0 i jest osiągnięta w sytuacji, gdy wszyscy gracze stosują strategie $[\Theta, q]$-progowe z $\Theta \neq \frac{q\lambda}{\mu}$.

(c) Jeśli $c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) > \gamma\mu$, największa średnia wypłata gracza wynosi 0 i jest osiągnięta w sytuacji, gdy wszyscy gracze stosują strategie $[\infty, 0]$-progowe (czyli nigdy nie dołączają do kolejki).

Porównanie średnich wypłat graczy stosujących strategie w równowadze z ich optymalną wartością zadaną w Twierdzeniu 18 prowadzi do następujących wniosków:

Wniosek 2 (Theorem 3 w [H3]) *Możliwe są dwie sytuacje:*

(a) Jeśli $\gamma \in \left(\frac{1}{\mu}c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du\right)$ lub $\gamma \in \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du, \frac{1}{\mu}c(0)\right)$ i $x_0 \leqslant \underline{\Theta}$, to w najmniej korzystnej równowadze Nasha średnia wypłata gracza jest zerowa, mimo że można osiągnąć pozytywną wartość średniej wypłaty.

(b) W każdym innym przypadku średnia wypłata gracza w dowolnej równowadze Nasha jest równa największej wypłacie możliwej do osiągnięcia w grze.

Wniosek 3 (Theorem 4 w [H3]) *Możliwe są dwie sytuacje:*

(a) Jeśli $\gamma \in \left(\frac{1}{\mu}c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du\right)$ i $x_0 < \overline{\Theta}$, to w najbardziej korzystnej równowadze Nasha średnia wypłata gracza jest zerowa, mimo że można osiągnąć pozytywną wartość średniej wypłaty.

(b) W każdym innym przypadku istnieje w grze równowaga Nasha, dla której średnia wypłata gracza jest równa największej wypłacie możliwej do osiągnięcia w grze.

W związku z tym, że istnieją sytuacje, w których średnie wypłaty graczy w dowolnej równowadze Nasha w rozważanym modelu są zerowe, podczas gdy daje się osiągnąć pozytywne wypłaty w grze, w dalszej części pracy [H3] zadaliśmy pytanie, czy jest możliwe skłonienie graczy do bardziej efektywnego wykorzystania dostępnych zasobów poprzez ograniczenie dostępnych dla nich informacji. Przyjmijmy mianowicie, że gracze nie mają możliwości dowiedzenia się, jaka jest dokładna długość kolejki, a jedyna informcja, do której mają dostęp, to odpowiedź na pytanie, czy aktualna wartość X_t jest większa, czy mniejsza od pewnej znanej wielkości Ψ. Rozwiązaniem stosowanym dla gry z niepełną informacją, w której brak jest informacji statystycznej na temat dokładnej sytuacji w grze, jest *odporna równowaga Nasha* (ang. *robust Nash equilibrium*, por. [2]). W przypadku naszej gry możemy ją zdefiniować następująco:

Definicja 9 *Mówimy, że strategia $f \in \mathcal{F}$ gracza α jest najlepszą odporną odpowiedzią na strategię $g \in \mathcal{F}$ stosowaną przez pozostałych graczy, jeśli*

$$f(\cdot|x_1) = f(\cdot|x_2), \text{ jeśli } x_1, x_2 < \Psi \text{ lub } x_1, x_2 \geqslant \Psi \tag{9}$$

oraz dla dowolnej innej strategii $h \in \mathcal{F}$ spełniającej (9) zachodzi

$$\inf_{x<\Psi} \overline{J}^{\alpha}(x,f,g) \geqslant \inf_{x<\Psi} \overline{J}^{\alpha}(x,h,g) \text{ oraz } \inf_{x\geqslant\Psi} \overline{J}^{\alpha}(x,f,g) \geqslant \inf_{x\geqslant\Psi} \overline{J}^{\alpha}(x,h,g)$$

Mówimy, że układ strategii, w którym wszyscy gracze stosują strategię f jest symetryczną odporną równowagą Nasha *w rozważanej grze, jeśli f jest najlepszą odporną odpowiedzią dowolnego gracza na strategię f stosowaną prze pozostałych.*

Kolejne twierdzenie mówi o tym, w jaki sposób tak zdefiniowane rozwiązanie dla rozważanej przez nas gry zależy od parametrów gry oraz progu Ψ. Stosujemy przy tym następującą konwencję: mówimy, że gracz stosuje strategię (a_1, a_2), $a_1, a_2 \in A$, jeśli wybiera akcję a_1, gdy stan globalny jest mniejszy niż Ψ oraz akcję a_2, gdy stan globalny jest większy lub równy Ψ.

Twierdzenie 19 (Theorem 5 w [H3]) *Niech:*

$$L_{EE}(\Psi) := \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du, \quad L_{NE}(\Psi) := L_{NN}(\Psi) := \frac{1}{\mu}c(0), \quad H_{EE}(\Psi) := \frac{1}{\lambda - \Psi\mu}\int_{\Psi}^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du,$$

$$H_{NE}(\Psi) := \begin{cases} \frac{1}{\Psi\mu}\int_0^{\Psi} c(u)\,du, & \text{jeśli } \Psi > \frac{\lambda}{\mu} \\ \frac{1}{\lambda-\Psi\mu}\int_{\Psi}^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du, & \text{jeśli } \Psi \leqslant \frac{\lambda}{\mu} \end{cases}, \quad H_{NN}(\Psi) := \frac{1}{\Psi\mu}\int_0^{\Psi} c(u)\,du.$$

Dla dowolnego $\Psi \geqslant 0$ rozważana gra z niepełną informacją ma symetryczną odporną równowagę Nasha. Ponadto:

(a) Jeśli $\gamma > L_{NN}(\Psi)$, wszyscy gracze używają strategii EE w równowadze;

(b) Jeśli $L_{NN}(\Psi) \geqslant \gamma \geqslant L_{EE}(\Psi)$ i $\gamma > H_{NN}(\Psi)$, to układy strategii, w których wszyscy gracze używają strategii EE lub wszyscy używają strategii NE są równowagami;

(c) Jeśli $H_{NN}(\Psi) \geqslant \gamma \geqslant \max\{L_{EE}(\Psi), H_{NE}(\Psi)\}$, to dowolny układ strategii, w którym wszyscy gracze używają tej samej strategii jest równowagą;

(d) Jeśli $H_{NE}(\Psi) > \gamma \geqslant L_{EE}(\Psi)$, to układy strategii, w których wszyscy gracze używają strategii EE lub wszyscy używają strategii NN są równowagami;

(e) Jeśli $L_{EE}(\Psi) > \gamma > H_{NN}(\Psi)$, wszyscy gracze używają strategii NE w równowadze;

(f) Jeśli $\min\{L_{EE}(\Psi), H_{NN}(\Psi)\} \geqslant \gamma \geqslant H_{NE}(\Psi)$ to układy strategii, w których wszyscy gracze używają strategii NE lub wszyscy używają strategii NN są równowagami;

(g) Jeśli $\min\{L_{EE}(\Psi), H_{NE}(\Psi)\} > \gamma$, to wszyscy gracze używają strategii NN w równowadze.

Używając powyższego twierdzenia, jesteśmy w stanie wskazać, w jaki sposób powinien być wybrany parametr Ψ, aby zmaksymalizować średnią wypłatę gracza:

Twierdzenie 20 (Theorem 7 w [H3]) *Jeśli chcemy zmaksymalizować średnią wypłatę gracza w odpornej równowadze Nasha, powinniśmy wybrać:*

(a) Dowolne Ψ, jeśli $\gamma \leqslant \frac{1}{\mu}\lim_{u\to\infty} c(u)$ – w takiej sytuacji wszyscy gracze będą używać strategii NN w równowadze.

(b) Dowlone $\Psi < \underline{\Theta}$, jeśli $\gamma \in \left(\frac{1}{\mu}\lim_{u\to\infty} c(u), \frac{1}{\mu}c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right)$ – w takiej sytuacji wszyscy gracze będą używać strategii NN w równowadze.

(c) $\Psi = \overline{\Theta}$, jeśli $\gamma \in \left(\frac{1}{\mu}c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du\right)$ – w takiej sytuacji wszyscy gracze będą używać strategii NE w równowadze.

(d) $\Psi = \underline{\Theta}$, jeśli $\gamma \in \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{\mu}} c(u)\,du, \frac{1}{\mu}c(0)\right)$ – wtedy w pesymistycznym scenariuszu wszyscy gracze używają strategii NE w równowadze, natomiast w optymiastycznym scenariuszu wszyscy używają strategii EE w równowadze.

(e) $\Psi = 0$, jeśli $\gamma = \frac{1}{\mu}c(0)$ – wtedy wszyscy gracze używają strategii EE w równowadze.

(f) Dowolne Ψ, jeśli $\gamma > \frac{1}{\mu}c(0)$ – wtedy wszyscy gracze używają strategii EE w równowadze.

Porównując wypłaty w otrzymanych równowagach z optymalnymi wypłatami w modelu dochodzimy do następującego wniosku:

Wniosek 4 (Theorem 8 w [H3]) *Średnie wypłaty w grze z niepełną informacją w najbardziej i najmniej korzystnych odpornych równowagach Nasha w przypadku, gdy wartość Ψ jest wybrana tak, aby zmaksymalizować te średnie, są takie same jak w najbardziej i najmniej korzystnych równowagach Nasha w grze z pełną informacją.*

Ostatni problem, jaki rozważaliśmy w pracy [H3] to, na ile dobrze nasz model z continuum graczy przybliża rzeczywiste gry z dużą skończoną liczbą graczy. Istotne jest przy tym to, że n-osobowymi odpowiednikami rozważanej przez nas gry z continuum graczy będą gry, w których gracze decydują o dołączeniu do kolejki typu M/M/∞ z intensywnością napływu zgłoszeń $n\lambda$, intensywnością obsługi zgłoszeń μ oraz kosztem obsługi $c^n(x) := c\left(\frac{x}{n}\right)$. Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 21 (Theorem 9 w [H3]) *Załóżmy, że znormalizowany*[18] *stan początkowy kolejki jest równy $x_0 \in [0, x_{max}]$ dla pewnego ustalonego x_{max} oraz że gracz α gra przeciwko pozostałym używającym strategii $[\Theta, q]$-progowych w modelu z continuum graczy z kosztem obsługi c, intensywnością napływu zgłoszeń λ oraz intensywnością obsługi zgłoszeń μ. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, taki że dla każdego $n \geqslant N_\varepsilon$ jego oczekiwana wypłata całkowita, jeśli dołączy do kolejki w n-osobowym odpowiedniku gry z continuum graczy, w którym pozostali gracze stosują strategię $[n\Theta, q]$-progową, różni się od jego całkowitej wypłaty oczekiwanej w grze z continuum graczy o co najwyżej ε.*

Konsekwencją tego twierdzenia jest fakt, że dla dużej skończonej liczby graczy równowagi Nasha otrzymane w Twierdzeniach 17 oraz 19 możemy traktować jako równowagi przybliżone w grach z dużą skończoną liczbą graczy. Formalnie rzecz biorąc, wymaga to jednak spełnienia dodatkowego założenia, że znormalizowany stan początkowy kolejki w momencie dołączenia do gry dowolnego gracza nie przekracza stałej x_{max}. Tego rodzaju wnioski są sformułowane w pracy [H3] jako Corollary 4, Corollary 4 i Corollary 5.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych (artystycznych)

Lista prac nie wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

[P1] P. Więcek, *On application of Schauder's fixed point theorem in discounted stochastic games.* Prace Naukowe Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej. Seria: Konferencje. (I Konferencja dla Młodych Matematyków - Karpacz 2000) 24 (2000), no. 3, 121–128.

[P2] P. Więcek, *Convex Stochastic Games of Capital Accumulation with Nondivisible Money Unit.* Scientiae Mathematicae Japonicae, 57 (2003), 397–411

[P3] P. Więcek, *Continuous Convex Stochastic Games of Capital Accumulation.* W Advances in Dynamic Games. Applications to Economics, Finance, Optimization and Stochastic Control (Annals of the International Society of Dynamic Games vol. 7), A.S. Nowak, K. Szajowski eds., Birkhäuser, Boston, 2005, 111–125

[P4] P. Więcek, T. Radzik, *On a continuous dynamic strategic market game.* W Game Theory and Applications vol. 11, L. Petrosjan, V. Mazalov eds., Nova Science Publishers, Commack, NY, 2007, 187–195

[18] Przez znormalizowany stan kolejki dla n-osobowego odpowiednika rozważanej przez nas gry z continuum graczy rozumiemy wielkość $\overline{X}_t = \frac{X_t}{n}$.

[P5] W. Połowczuk, P. Więcek, T. Radzik, *On the existence of almost-pure-strategy Nash equilibria in n-person finite games.* Mathematical Methods of Operations Research, 65 (2007), 141-152

[P6] A.S. Nowak, P. Więcek, *On Nikaido-Isoda type theorems for discounted stochastic games.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332 (2007), 1109–1118

[P7] P. Więcek, *Pure equilibria in a simple dynamic model of strategic market game.* Mathematical Methods of Operations Research, 69 (2009), 59–79

[P8] P. Więcek, *n-person dynamic strategic market games.* Applied Mathematics & Optimization, vol. 65, no. 2 (2012), 147–173

[P9] W. Połowczuk, T. Radzik, P. Więcek, *Simple equilibria in semi-infinite games.* International Game Theory Review, 14(3) (2012) 1250017-1–1250017-19

[P10] M. Haddad, P. Więcek, E. Altman, H. Sidi, *An Automated Dynamic Offset for Network Selection in Heterogeneous Networks.* IEEE Transactions on Mobile Computing, 15(9) (2016), 2151–2164

[P11] M. Haddad, P. Więcek, O. Habachi, Y. Hayel, *On the Two-User Multi-Carrier Joint Channel Selection and Power Control Game.* IEEE Transactions on Communications, 64(9) (2016), 3759–3770

Praca [P1] zawierała wyniki z mojej pracy magisterskiej, zaś prace [P2,P3,P4,P7] obejmowały wyniki składające się na moją pracę doktorską. Poniżej omawiam wyniki przedstawione w pozostałych artykułach.

5.1 Gry stochastyczne (praca [P6])

Praca [P6] dotyczy dwuosobowych gier stochastycznych o sumie niezerowej z wypłatą dyskontowaną. W grach tego typu gracze wspólnie kontrolują łańcuch Markowa stanów gry, wybierając na kolejnych etapach akcje, od których zależy rozkład stanów na kolejnym etapie. Na każdym etapie każdy z uczestników gry dostaje także wypłatę jednokrokową zależną od aktualnego stanu oraz akcji wybranych przez graczy. Na podstawie wypłat na poszczególnych etapach są następnie obliczane wypłaty dyskontowane z całego przebiegu gry. Każdy z graczy dąży do maksymalizacji wartości oczekiwanej własnej wypłaty przy założeniu, że przeciwnik robi to samo (precyzyjny opis gier tego typu można znaleźć w [30] rozd. 8). Gra opisywana jest zatem przez zbiór stanów S, zbiory akcji graczy A_1 i A_2, multifunkcje opisujące zbiory akcji dostępnych w poszczególnych stanach $\mathcal{A}_i : S \to A_i$, $i = 1, 2$, jednokrokowe funkcje wypłaty graczy $r_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, gdzie $D := \{(s, a_1, a_2) : a_1 \in \mathcal{A}_1(s), a_2 \in \mathcal{A}_2(s)\}$, prawdopodobieństwo przejścia $Q : D \to \Delta(S)$ oraz współczynnik dyskonta $\beta \in (0, 1)$. W klasycznej pracy Federgruena [20] udowodnione jest twierdzenie, mówiące o tym, że każda gra stochastyczna z wypłatą dyskontowaną z przeliczalnym zbiorem stanów, zwartymi zbiorami akcji oraz ciągłymi prawdopodobieństwem przejścia i jednokrokowymi funkcjami wypłaty ma równowagę Nasha w strategiach stacjonarnych. Głównym wynikiem pracy [P6] jest następujące uogólnienie tego twierdzenia w przypadku gier dwuosobowych:

Twierdzenie 22 (Theorem 1 w [P6]) *Każda dwuosobowa gra stochastyczna o sumie niezerowej z wypłatą dyskontowaną z przeliczalnym zbiorem stanów S oraz A_i, $\mathcal{A}_i(s)$, $i = 1, 2$, $s \in S$ będącymi zwartymi podzbiorami przestrzeni metrycznej, spełniająca dodatkowo następujące założenia:*

(D1) Dla każdego $s \in S$, funkcja $r_1(s, \cdot, \cdot) + r_2(s, \cdot, \cdot)$ jest ciągła na $\mathcal{A}_1(s) \times \mathcal{A}_2(s)$;

(D2) Dla każdego $s \in S$ oraz $a_1 \in \mathcal{A}_1(s)$, $a_2 \in \mathcal{A}_2(s)$, funkcje $r_i(s, \cdot, a_2)$ i $r_i(s, a_1, \cdot)$, $i = 1, 2$, są ciągłe odpowiednio na $\mathcal{A}_1(s)$ i $\mathcal{A}_2(s)$;

(D3) Dla dowolnych $s, s' \in S$, funkcja $Q(s'|s, \cdot, \cdot)$ jest ciągła na $\mathcal{A}_1(s) \times \mathcal{A}_2(s)$;

ma równowagę Nasha w strategiach stacjonarnych w klasie wszystkich strategii graczy.

Dowód twierdzenia opiera się na aproksymacji gry stochastycznej rozważanej w twierdzeniu przez gry ze skończonymi zbiorami akcji graczy A_1^n, A_2^n skonstruowanymi w taki sposób, że $A_i^n \subset A_i^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i^n$ są zbiorami gęstymi w A_i $(i = 1, 2)$. Gry takie posiadają równowagi w strategiach stacjonarnych na mocy twierdzenia Federgruena. Jeśli weźmiemy granicę po podciągu strategii w równowagach w poszczególnych grach przybliżających (taka granica będzie istniała, bo zbiory strategii stacjonarnych graczy są zwarte na mocy twierdzenia Tichonowa), otrzymamy parę strategii stacjonarnych w wyjściowej grze (f^*, g^*). Następnie, wykorzystując założenia (D1) i (D2), udowadniamy, że wypłaty dyskontowane graczy mają analogiczne własności (jako funkcje strategii stacjonarnych graczy) do tych pojawiających się w tych założeniach. Ostatni krok dowodu polega na wykorzystaniu tych własności do pokazania, że (f^*, g^*) jest równowagą Nasha w wyjściowej grze stochastycznej.

Drugi wynik udowodniony w pracy [P6] (Theorem 2) mówi o tym, że przy dodatkowych założeniach dotyczących wklęsłości jednokrokowych funkcji wypłaty oraz afiniczności prawdopodobieństw przejścia, równowaga Nasha otrzymana w Twierdzeniu 22 będzie równowagą w strategiach niezrandomizowanych. Dowód tego faktu jest elementarny i opiera się na spostrzeżeniu, że przy wymienionych dodatkowych założeniach funkcja pojawiająca się po prawej strony równania Bellmana każdego z graczy jest wklęsła.

5.2 Dynamiczne strategiczne gry rynkowe (praca [P8])

Praca [P8] jest kontynuacją artykułów [P4,P7], wchodzących w skład mojej pracy doktorskiej. Dotyczy ona pewnej n-osobowej gry stochastycznej z wypłatą dyskontowaną, mającej za cel opis następującego modelu ekonomicznego: n graczy posiada pewne zasoby pieniężne przeznaczone na zakup porcji pewnego dobra. Na każdym z etapów gry odbywa się aukcja, na której jedna (niepodzielna) jednostka tego dobra wystawiona jest na sprzedaż. Zwycięzca aukcji konsumuje dobro (co wiąże się z pewną jednokrokową użytecznością), ale musi też za nie zapłacić, co wiąże się z uszczupleniem jego budżetu na kolejne zakupy. Z drugiej strony budżety graczy są zasilane na kolejnych etapach w sposób losowy opisany w pracy. Stanem w tak opisanej grze jest wektor zasobów pieniężnych graczy $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n$, natomiast akcjami graczy są oferty przez nich składane, a zatem dla dowolnego i, $a_i \in \{0, , 1, \ldots, s_i\}$. Pozostałe obiekty definiujące grę, czyli jednokrokowe wypłaty graczy oraz prawdopodobieństwa przejścia zdefiniowane są wzorami:[19]

$$r_i(s, a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \frac{1}{|\{j : a_j = a_i\}|} u_i(1) & \text{jeśli } a_i = \max_j a_j \\ u_i(0) & \text{jeśli } a_i < \max_j a_j \end{cases},$$

gdzie u_i oznacza funkcję użyteczności gracza i;

$$Q(\cdot|s, a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}\delta_s(\cdot) + \frac{1}{n}\sum_{k \neq i} \delta_{(s_{-i-k}, s_i - a_i, s_k + a_i)}(\cdot), \text{ gdzie } i = \arg\max_j a_j.$$

Gry tego typu rozważane były wcześniej w literaturze głównie w dwóch wariantach: moje wcześniejsze prace [P4,P7] oraz [59, 57, 58] omawiały przypadek 2-osobowy, natomiast [35, 36, 22] analizowały odpowiednik tej gry z continuum graczy. Jedyne wyniki dotyczące gier n-osobowych tego typu (różniących się jednak od naszego modelu tym, że na poszczególnych etapach nie są organizowane aukcje, a dobro dzielone jest pomiędzy graczy proporcjonalnie do ich ofert) pojawiły się w [47]. Dwa główne wyniki pracy [P8] mówią o tym, jaka jest postać strategii w równowadze w opisanej powyżej grze dla dostatecznie małych współczynników dyskonta oraz jakie są podstawowe własności oczekiwanych wypłat dyskontowanych graczy w sytuacji, gdy używają strategii w równowadze. Poniżej przytaczamy pierwsze z tych twierdzeń:

Twierdzenie 23 (Theorem 1 w [P8]) *Zdefiniujmy następujące klasy strategii stacjonarnych w rozważanej grze:*
Strategię stacjonarną f_i gracza i nazywamy odważną, *jeśli $f_i(\cdot|s) = \delta_{s_i}$, jeśli $s_i \leqslant \max_{j \neq i} s_j$ oraz $f_i(\{\max_{j \neq i} s_j + 1, \ldots, s_i\}|s)) = 1$, jeśli $s_i > \max_{j \neq i} s_j$.*
Strategię stacjonarną f_i gracza i nazywamy słabo odważną, *jeśli $f_i(\cdot|s) = \delta_{s_i}$, jeśli $s_i \leqslant \max_{j \neq i} s_j$ oraz*

[19] Zapis (s_{-i-k}, s_i', s_k') oznacza wektor s z i-tą współrzędną zamienioną na s_i' oraz k-tą współrzędną zamienioną na s_k'.

$f_i(\{\max_{j\neq i} s_j, \ldots, s_i\}|s)) = 1$, *jeśli* $s_i > \max_{j\neq i} s_j$.
Prawdziwe będą następujące stwierdzenia:

(a) Dla każdych $n \geqslant 3$ *oraz* $\beta \leqslant \frac{1}{3}$, *rozważana gra rynkowa posiada symetryczną równowagę Nasha w strategiach stacjonarnych* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, *taką że strategie* f_i, $i = 1$ *są odważne.*

(b) Dla każdych $n \geqslant 3$ *oraz* $\beta \leqslant 1 - \sqrt[3]{\frac{2n^2-6n+4}{n^3}}$, *rozważana gra rynkowa posiada symetryczną równowagę Nasha w strategiach stacjonarnych* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, *taką że strategie* f_i, $i = 1$ *są słabo odważne.*

(c) Dla każdego $\beta \geqslant \frac{1}{2}$ *istnieje* $n_\beta \in \mathbb{N}$, *takie że dla żadnego* $n \geqslant n_\beta$ *nie istnieje równowaga Nasha w strategiach stacjonarnych w rozważanej grze, w której wszyscy gracze używają strategii odważnych.*

Konsekwencją części (b) powyższego twierdzenia jest następująca własność:

Wniosek 5 (Corollary 1 w [P6]) *Dla każdego* $\beta \in (0, 1)$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *takie że dla* $n \geqslant n_0$ *dowolna* n*-osobowa dynamiczna strategiczna gra rynkowa posiada symetryczną równowagę Nasha w strategiach stacjonarnych* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, *taką że* f_i *są słabo odważne.*

Oznacza ona, że wyniki uzyskane w [P6] można stosować dla dowolnego czynnika dyskonta pod warunkiem, że liczba graczy n jest dostatecznie duża.

Dowody Twierdzenia 23 oraz Theorem 2 w [P6] są techniczne. Ich główna część polega na szczegółowej analizie własności funkcji pojawiających się po prawej stronie równania Bellmana dla problemu optymalizacji wypłaty dyskontowanej pojedynczego gracza, gdy pozostali gracze stosują strategie z klas zdefiniowanych w Twierdzeniu 23. Zastosowanie twierdzenia Banacha o punkcie stałym umożliwia wtedy udowodnienie, że optymalne wypłaty graczy w takiej sytuacji posiadają te same własności. Wykorzystuje się je następnie do pokazania, że najlepszymi odpowiedziami na strategie (słabo) odważne są strategie tego samego typu (oczywiście wyłącznie w przypadkach opisanych przez założenia części (a) lub (b) Twierdzenia 23). Ostatnim etapem dowodu jest zastosowanie twierdzenia Kakutaniego o punkcie stałym do odpowiednich multifunkcji najlepszych odpowiedzi na zestaw identycznych (słabo) odważnych strategii przeciwników. Otrzymany punkt stały jest strategią stosowaną w symetrycznej równowadze Nasha w rozważanej grze.

5.3 Równowagi w grach jednoetapowych o specyficznej strukturze (prace [P5,P9])

W pracy [P5] rozważamy n-osobowe gry jednoetapowe ze skończonymi zbiorami strategii czystych graczy z funkcjami wypłaty graczy posiadającymi pewne własności, które możemy zidentyfikować jako odpowiedniki wklęsłości lub wypukłości dla zbiorów dyskretnych. Własności te definiujemy poniżej:

Definicja 10 *Zdefiniujmy* $E_1 = \{1, \ldots, k_1\}, \ldots, E_n = \{1, \ldots, k_1\}$ *oraz* $E = E_1 \times \ldots \times E_n$. *Mówimy, że funkcja* $H : E \to \mathbb{R}$ *jest* wypukła (wklęsła) *względem i-tej zmiennej, jeśli dla* $j = 1, \ldots, n$ *istnieją ściśle rosnące ciągi* $(x_1^j, \ldots, x_{k_j}^j)$ *elementów przedziału* $[0, 1]$ *oraz funkcja* $\overline{H} : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ *wypukła (wklęsła) względem i-tej zmiennej, spełniająca dla wszystkich* $i_1 \in E_1, \ldots, i_n \in E_n$ *równość* $H(i_1, \ldots, i_n) = \overline{H}(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n)$.

Głównymi wynikami pracy [P5] są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 24 (Theorem 4.4 w [P5]) *Niech* $1 \leqslant s \leqslant n$. *Jeśli w n-osobowej grze jednoetapowej ze skończonymi zbiorami strategii graczy* $E_1, \ldots, E_n$ *i z funkcjami wypłaty* $H_1, \ldots, H_n$, *dla każdego* $i \in \{1, \ldots, s\}$ *funkcja* H_i *jest wklęsła względem i-tej zmiennej, to gra posiada równowagę Nasha w strategiach mieszanych* $(\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*)$, *taką że każda ze strategii* μ_i^*, $i = 1, \ldots, s$, *jest skupiona na dwóch kolejnych elementach zbioru* E_i.

Twierdzenie 25 (Theorem 4.5 w [P5]) *Niech* $1 \leqslant s \leqslant n$. *Jeśli w n-osobowej grze jednoetapowej ze skończonymi zbiorami strategii graczy* $E_1, \ldots, E_n$ *i z funkcjami wypłaty* $H_1, \ldots, H_n$, *dla każdego* $i \in \{1, \ldots, s\}$ *funkcja* H_i *jest wypukła względem i-tej zmiennej, to gra posiada równowagę Nasha w strategiach mieszanych* $(\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*)$, *taką że każda ze strategii* μ_i^*, $i = 1, \ldots, s$, *jest skupiona na zbiorze* $\{1, k_i\}$.

Dowód pierwszego twierdzenia opiera się na spostrzeżeniu, że dla dowolnego $i \in \{1, \dots, s\}$ zbiór strategii mieszanych skupionych na kolejnych elementach zbioru E_i jest homeomorficzny ze zbiorem $X_i := [1, k_i]$. Jeśli następnie zdefinujemy grę ze zbiorami strategii graczy $X_1, \dots, X_s, \Delta(E_{s+1}), \dots, \Delta(E_n)$ oraz funkcjami wypłaty graczy będącymi wypłatami oczekiwanymi w wyjściowej grze odpowiadającymi strategiom homeomorficznym z odpowiednimi strategiami ze zbiorów X_i, gra taka spełnia założenia uogólnienia twierdzenia Nasha o istnieniu równowagi w strategiach niezrandomizowanych w grach z quasi-wklęsłymi funkcjami wypłaty (por. [24]). Równowaga w strategiach czystych w zmodyfikowanej grze odpowiada równowadze, której istnienie chcemy udowodnić w Twierdzeniu 24. W przypadku Twierdzenia 25 również definiujemy zmodyfikowaną grę – tym razem jest to gra zdefiniowana w twierdzeniu ze zbiorami strategii czystych obciętymi do zbiorów $\{1, k_1\}, \dots, \{1, k_s\}$, $E_{s+1}, \dots$, E_n. Gra taka posiada równowagę w strategiach mieszanych na mocy twierdzenia Nasha. W sposób elementarny można pokazać, że równowaga w zmodyfikowanej grze jest równowagą w wyjściowej grze, której szukamy.

W pracy [P9] przedstawiamy uogólnienia powyższych wyników oraz rezultatów przedstawionych w pracach [50, 51, 45, 46] na gry dwuosobowe, w których jeden z graczy ma skończoną liczbę strategii czystych, a drugi ma tych strategii przeliczalnie wiele (lub, w przypadku części twierdzeń, jego zbiór strategii czystych jest zwartym (ale w domyśle nieskończonym) podzbiorem przestrzeni metrycznej). Siedem twierdzeń tam zawartych podaje warunki podobne do tych pojawiających się w Twierdzeniach 24 i 25 na istnienie w tych grach równowag Nasha lub ε-równowag Nasha, w których gracze używają strategii czystych lub strategii zrandomizowanych o nośniku dwupunktowym o pewnej określonej strukturze.

5.4 Wybór sieci (kanału) w sieciach bezprzewodowych (prace [P10,P11])

Ostatnie dwie prace, które tutaj omówimy, dotyczą pewnych zastosowań teorii gier niekooperacyjnych w telekomunikacji bezprzewodowej. W pracy [P10] rozważamy grę pomiędzy telefonami komórkowymi, które decydują o tym, do której z dwóch sieci bezprzewodowych się podłączyć. W przypadku jednej sieci jakość połączenia jest zagwarantowana przez operatora. Jakość połączenia w drugiej sieci zależy natomiast od jakości kanału, do jakiego gracz uzyskuje dostęp – może być zatem zarówno lepsza jak i gorsza od tej w pierwszej sieci. Dodatkowo zakładamy, że gracz nie ma dostępu do dokładnej informacji na temat jakości kanału – wie tylko, czy współczynnik określający jakość, oznaczany przez h_i, jest większy, czy mniejszy od pewnej wielkości Ψ_i oraz zna rozkład, z którego on pochodzi (w rzeczywistych sieciach bezprzewodowych omawiana wielkość ma rozkład wykładniczy, którego parametr można oszacować na podstawie danych historycznych). Wie także, że poza jakością kanału jakość połączenia zależy także od liczby telefonów podłączonych do sieci. Sytuację tę można zatem opisać jako n-osobową grę jednoetapową z niepełną informacją. Główne wyniki w pracy możemy podzielić na dwie grupy. Pierwszą stanowią twierdzenia o postaci równowag Bayesa-Nasha w powyższej grze dla przypadku 2-osobowego (Proposition 1 w [P10]) oraz w symetrycznym[20] przypadku n-osobowym (Proposition 5). Druga grupa wyników jest próbą odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób wybierać progi Ψ_i, aby osiągnąć jeden z możliwych praktycznych celów:

(a) zmaksymalizować wartość oczekiwaną przesyłu przeciętnego gracza;

(b) zmaksymalizować całkowity przesył pierwszej z sieci.

W pracy podajemy sposoby obliczania progów Ψ_i, które umożliwiają zrealizowanie powyższych celów dla przypadku dwuosobowego (Proposition 3) oraz symetrycznego przypadku n-osobowego (Proposition 6). Przeprowadzamy ponadto analizę złożoności obliczeniowej algorytmu zdefiniowanego w Proposition 6 (w Proposition 8) oraz przedstawiamy kompleksową analizę numeryczną zaproponowanych rozwiązań.

W pracy [P11] rozważamy sytuację, w której dwa telefony komórkowe przesyłają dane korzystając z sieci bezprzewodowej z K kanałami, biorąc pod uwagę jakość poszczególnych kanałów, która może być różna zarówno dla różnych telefonów, jak i dla różnych kanałów (tym razem zakładamy, że gracze mają pełną wiedzę o jakości kanałów, zarówno swoich, jak i przeciwnika). W tym celu wybierają moce, z

[20] Symetria tutaj oznacza, że rozkłady, z których pochodzą poszczególne wielkości h_i są takie same oraz że progi Ψ_i są takie same dla wszystkich graczy – w przypadku dwuosobowym rozważaliśmy również przypadek, gdy są one różne.

jakimi transmitują na poszczególnych kanałach. Nie maksymalizują jednak ilości danych, którą udaje im się przesłać, ale *efektywność energetyczną przesyłu*, którą możemy zdefiniować jako iloraz pewnej miary jakości przesyłu oraz ilości energii potrzebnej do przesłania danych (formalnie efektywność energetyczna przesyłu zdefiniowana jest w [27]). Problem taki był już rozważany w literaturze w pracy [41], gdzie został przedstawiony w postaci gry niekooperacyjnej oraz gdzie podano heurystyczny algorytm pozwalający na obliczenie równowagi Nasha w tej grze. Pytanie, na jakie chcieliśmy odpowiedzieć w naszej pracy, było następujące: jak wprowadzenie hierarchii wśród graczy (czyli zastosowanie rozwiązania Stackelberga zamiast równowagi Nasha) wpłynie na rozwiązanie gry oraz jego wydajność. Wbrew pozorom nie jest to pytanie pozbawione praktycznego znaczenia – w rzeczywistych sieciach decyzje prawie nigdy nie są podejmowane równocześnie. Głównymi rezultatami pracy [P11] były algorytmy obliczania rozwiązania Stackelberga w powyższym modelu (Proposition 3 w [P11]), jeśli takie rozwiązanie istnieje, oraz obliczania ε-rozwiązania Stackelberga w przeciwnym wypadku (Proposition 4). Kolejne wyniki (Proposition 7–Proposition 10) porównywały na kilka sposobów wydajność rozwiązania uzyskanego przez nas z równowagą Nasha obliczoną w pracy [41]. Przedstawiliśmy także numeryczne ilustracje uzyskanych wyników.

Literatura

[1] S. Adlakha, R. Johari, *Mean field equilibrium in dynamic games with strategic complementarities.* Operations Research 61(4) (2013), 971–989

[2] M. Aghassi, D. Bertsimas, *Robust game theory.* Mathematical Programming 107 (2006), 231–273

[3] A. Alj, A. Haurie, *Dynamic equilibria in multigenerational stochastic games.* IEEE Trans. Automat. Control 28 (1983), 193–203

[4] R. Amir R, *Complementarity and Diagonal Dominance in Discounted Stochastic Games.* Annals of Operations Research 114 (2002), 39–56

[5] Ł. Balbus, K. Reffett, Ł. Woźny, *A Constructive Study of Markov Equilibria in Stochastic Games with Strategic Complementarities.* Journal of Economic Theory 150 (2014), 815–840

[6] R. Basna, A. Hilbert, V.N. Kolokoltsov, *An approximate Nash equilibrium for pure jump Markov games of mean-field-type on continuous state space.* Stochastics 89(6–7) (2017), 967–993

[7] D. Bauso, *Game Theory with Engineering Applications (Advances in Design and Control).* SIAM–Society for Industrial and Applied Mathematics (2016)

[8] A. Bensoussan, J. Frehse, P. Yam, *Mean field games and mean field type control theory.* Springer, New York (2013)

[9] J. Bergin, D. Bernhardt, *Anonymous sequential games with aggregate uncertainty.* Journal of Mathematical Economics 21 (1992), 543–562

[10] J. Bergin, D. Bernhardt, *Anonymous sequential games: existence and characterization of equilibria.* Economic Theory 5(3) (1995), 461–89

[11] D.P. Bertsekas, S.E. Shreve, *Stochastic optimal control: the discrete time case.* Academic Press, New York (1978)

[12] E. Boissard, *Simple bounds for convergence of empirical and occupation measures in 1-Wasserstein distance.* Electronic Journal of Probability 16 (2011), 2296–2333

[13] L. Campi, M. Fischer, *N-player games and mean-field games with absorption.* Ann. Appl. Probab. 28(4) (2018), 2188–2242

[14] R. Carmona, F. Delarue, *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications.* Springer International Publishing (2018)

[15] A. Cecchin, M. Fischer, Probabilistic Approach to Finite State Mean Field Games. M. Appl Math Optim. (2018), https://doi.org/10.1007/s00245-018-9488-7

[16] S.K. Chakrabarti, *Pure strategy Markov equilibrium in stochastic games with a continuum of players.* J. Math. Econom. 39(7) (2003), 693–724

[17] L. Curtat, *Markov Equilibria in Stochastic Games with Complementarities.* Games and Economic Behavior 17 (1996), 177–199

[18] R.M. Dudley, *Real analysis and probability.* Cambridge University Press (2004)

[19] R. Elliot, X. Li, Y. Ni, *Discrete time mean-field stochastic linear-quadratic optimal control problems.* Automatica 49 (2013), 3222–3233

[20] A. Federgruen, *On N-Person Stochastic Games with Denumerable State Space.* Adv. Appl. Prob. 10 (1978), 452–471

[21] E. Ferreira, D.A. Gomes, *On the convergence of finite state mean-field games through* Γ*-convergence.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 418(1) (2014), 211–230

[22] J. Geanakoplos, I. Karatzas, M. Shubik, W.D. Sudderth, *A strategic market game with active bankrupcy.* Journal of Mathematical Economics 34 (2000), 359–396

[23] D. Gillette, *Stochastic games with zero stop probabilities.* W Dresher M., Tucker A.W., Wolfe P. (eds.), Contributions to the Theory of Games, Vol. III, Annals of Mathematics Studies 39, Princeton University Press, Princeton, NJ (1957), pp. 179–187.

[24] I. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani's fixed point theorem with applications to Nash equilibrium points.* Proceedings of the American Mathematical Society 38 (1952), 170–174

[25] D.A. Gomes, J. Mohr, R.R. Souza, *Continuous Time Finite State Mean Field Games.* Appl Math Optim 68 (2013), 99–143

[26] D.A. Gomes, J. Saúde, *Mean field games models—a brief survey.* Dyn. Games Appl. 4(2) (2014), 110–154

[27] D. Goodman, N. Mandayam, *Power control for wireless data.* IEEE Pers. Commun. 7(2) (2000), 48–54

[28] E. Green, *Noncooperative Price Taking in Large Dynamic Markets.* Journal of Economic Theory 22 (1980), 155–181

[29] E. Green, *Continuum and Finite–Player Noncooperative Models of Competition.* Econometrica 52 (1984), 975–993

[30] A. Haurie, J.B. Krawczyk, G. Zaccour, *Games and Dynamic Games.* World Scientific (2012)

[31] U. Horst, *Stationary Equilibria in Discounted Stochastic Games with Weakly Interacting Players.* Games and Economic Behavior 51(1) (2005), 83–108

[32] D. Housman, *Infinite Player Noncooperative Games and the Continuity of the Nash Equilibrium Correspondence.* Mathematics of Operations Research 13 (1988), 488–496

[33] M. Huang, R.P. Malhamé, P.E. Caines, *Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle.* Communications in Information Systems 6 (2006), 221-252

[34] B. Jovanovic, R.W. Rosenthal, *Anonymous sequential games.* Journal of Mathematical Economics 17 (1988), 77–87

[35] I. Karatzas, M. Shubik, W.D. Sudderth, *Construction of Stationary Markov Equilibria in a Strategic Market Game.* Math. Oper. Res. 19(4) (1992), 975–1006

[36] I. Karatzas, M. Shubik, W.D. Sudderth, *A Strategic Market with Secured Lending.* J. Math. Econ. 28 (1997), 207–247

[37] E. Koutsoupias, C. Papadimitriou, *Worst-case equilibria.* Computer Science Review 3(2) (1999), 65–69

[38] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, *Mean field games.* Jpn. J. Math. 2(1) (2007), 229–260

[39] A.B. MacKenzie, L.A. DaSilva, *Game Theory for Wireless Engineers.* Morgan & Claypool Publishers (2006)

[40] M. Maschler, E. Solan, S. Zamir, *Game Theory.* Cambridge University Press (2013)

[41] F. Meshkati, M. Chiang, H.V. Poor, S.C. Schwartz, *A game-theoretic approach to energy-efficient power control in multicarrier CDMA systems.* IEEE J. Sel. Areas Commun. 24(6) (2006), 1115–1129

[42] A.S. Nowak, *On Stochastic Games in Economics.* Mathematical Methods of Operations Research 66(3) (2007), 513–530

[43] A.S. Nowak, *On a Noncooperative Stochastic Game Played by Internally Cooperating Generations.* Journal of Optimization Theory and Applications 144(1) (2010), 88–106

[44] E.S. Phelps, R.A. Pollak, *On second-best national savings and game equilibrium growth.* Rev. Econ. Stud. 35 (1968), 195–199

[45] W. Połowczuk, *Pure Nash equilibria in finite two-person non-zero-sum games.* International Journal of Game Theory 32 (2003), 229–240

[46] W. Połowczuk, *On almost-pure-strategy Nash equilibria in bimatrix games with convexity properties.* Applicationes Mathematicae 33 (2006), 71-84

[47] L. Pontiggia, *Topics in stochastic games.* Ph.D. dissertation, University of Minnesota, United States (2004)

[48] J.G. Proakis, *Communication Systems Engineering.* Prentice Hall International Editions (1994)

[49] M. Puterman, *Markov Decision Processes.* Wiley-Interscience, New York (1994)

[50] T. Radzik, *Pure-strategy ε-Nash equilibrium in two-person non-zero-sum games.* Games and Economic Behavior 3 (1991), 356–371

[51] T. Radzik, *Characterization of optimal strategies in matrix games with convexity properties.* International Journal of Game Theory 29 (2000), 211–227

[52] S.M. Ross, *Stochastic Processes.* 2nd Edition, John Wiley & Sons (1996)

[53] H. Sabourian, *Anonymous repeated games with a large number of players and random outcomes.* Journal of Economic Theory 51(1) (1990), 92–110

[54] N. Saldi, T. Başar, M. Raginsky, *Markov-Nash equilibria in mean-field games with discounted cost.* (2016), arXiv:1612.07878

[55] D. Schmeidler, *Equilibrium points of nonatomic games* J. Statist. Physics 17 (1973), 295–300

[56] A. Schwartz, A. Weiss, *Large Deviations for Performance Analysis.* Chapman & Hall, London (1995)

[57] P. Secchi, W.D. Sudderth, *A Two-person Strategic Market Game.* Quaderni di Dipartamento 83(6-98) (1998), Dipart. di Econ. Polit. e Met. Quant., Università di Pavia

[58] P. Secchi, W.D. Sudderth, *A Simple Two-Person Stochastic Game with Money.* W Nowak A.S., Szajowski K. (eds.) Advances in Dynamic Games. Applications to Economics, Finance, Optimization, and Stochastic Control. Ann. of ISDG vol. 7. Birkhäuser, Boston (2005), pp. 39–66

[59] M. Shubik, W. Whitt, *Fiat Money in an Economy with One Nondurable Good and No Credit. A Noncooperative Sequential Game.* W Blaquiere (ed.) Topics in Differential Games. North Holland, Amsterdam (1973), pp. 401–449

[60] C. Sleet, *Markov perfect equilibria in industries with complementarities.* Economic Theory 17(2) (2001), 371–397

[61] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications.* Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), 285–309

[62] D.M. Topkis, *Supermodularity and complementarity.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1998)

[63] X. Vives, *Strategic Complementarity in Multi-Stage Games.* Economic Theory 40(1) (2009), 151–171

[64] J.G. Wardrop, *Some theoretical aspects of road traffic research.* Proc. Inst. Civ. Eng. 2 (1952), 325–378