

# Streszczenie rozprawy doktorskiej pt. "Pricing time-capped American options". Autor: Paweł Stępnia

Niniejsza praca opisuje problem wyceny (zarówno analitycznej, jak i numerycznej) opcji amerykańskich z losowymi ograniczeniami nałożonymi na termin zapadalności. W ogólności, problem ten można sformułować jako zagadnienie optymalnego zatrzymania w następującej postaci:

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}, \tau \leq T} \mathbb{E}[e^{-r\tau} G(S_{\tau \wedge \theta})],$$

gdzie  $\tau$  jest optymalnym czasem zatrzymania,  $T$  to dodatni (możliwie nieskończony) termin zapadalności,  $S_t$  jest procesem stochastycznym opisującym cenę instrumentu bazowego,  $G$  to funkcja wypłaty, a  $\theta$  to losowy moment wygaśnięcia kontraktu. Ten moment określany jest mianem „time-cap” i może, ale nie musi, być powiązany z zachowaniem instrumentu bazowego.

Motywacją do napisania tej pracy jest zbadanie nowej i szerokiej klasy instrumentów finansowych, które potencjalnie mogłyby zostać wprowadzone na rynek. Rozwój opcji z ograniczeniem (*capped options*) rozpoczął się na początku lat 90. w Chicago, kiedy to Chicago Board Options Exchange wprowadziła na rynek ograniczone opcje europejskie na indeksy S&P 100 i S&P 500. Kontrakty te, które były automatycznie wykonywane, gdy indeks bazowy przekraczał z góry ustalony poziom (tzw. *cap*), stały się praktycznym przykładem tego, jak mechanizmy ograniczające wypłatę mogą zmniejszać ryzyko sprzedającego, jednocześnie zachowując atrakcyjność inwestycyjną. Od tego czasu badano wiele odmian opcji z ograniczeniem, ale niemal wszystkie z nich stosowały limit na funkcję wypłaty lub na cenę instrumentu bazowego.

W tej pracy podejście jest inne: ograniczenie nakładane jest na termin zapadalności. Każde wybrane ograniczenie czasowe tworzy nowy typ instrumentu, umożliwiając badanie szerokiej gamy produktów. Wśród rozważanych kontraktów znajdują się te, w których ograniczenie czasowe wyznaczone jest przez: pierwszy moment opuszczenia przez cenę instrumentu bazowego określonego przedziału, ostatni moment opuszczenia takiego przedziału oraz pierwszy moment, gdy stosunek bieżącej ceny do historycznego maksimum (ang. *drawdown*) przekracza pewien próg. Ostatni moment opuszczenia nie jest czasem zatrzymania, co utrudniałoby praktyczną implementację takiego kontraktu; niemniej jednak został on tutaj uwzględniony jako interesujący przykład analityczny, wpisujące się w ogólny zakres pracy.

Dynamika cen instrumentu bazowego modelowana jest za pomocą spektralnie ujemnego geometrycznego procesu Lévy’ego, który pozwala na nagłe spadki (skoki w dół), zachowując jednocześnie analityczną przystępność. Część analityczna pracy wykorzystuje metodę „guess-and-verify”: na podstawie racjonalnych przesłanek proponowana jest reguła optymalnego zatrzymania, a następnie jej poprawność weryfikowana jest przy użyciu twierdzenia weryfikacyjnego oraz układu Hamiltona–Jacobiego–Bellmana. W części numerycznej zastosowana została zmodyfikowana wersja metody Monte Carlo oparta na regresji najmniejszych kwadratów (*Least Squares Monte Carlo*), specjalnie dostosowana do ram z ograniczeniem czasowym, aby zilustrować i wesprzeć wyniki teoretyczne. Układ pracy przedstawia się następująco.

Rozdział 1 zawiera teoretyczne wprowadzenie do rynków finansowych i opcji, a także przegląd przestrzeni probabilistycznej, procesów Lévy’ego, funkcji skali i kluczowych parametrów używanych w dalszej części pracy.

Rozdział 2 koncentruje się na wycenie wieczystej amerykańskiej opcji sprzedaży z losowym terminem zapadalności będącym pierwszym momentem opuszczenia przez cenę instrumentu bazowego zadanego zbioru. Choć podobne instrumenty były badane w przeszłości, wprowadzenie skoków w dół w tym modelu umożliwia Poissonowskie spadki poniżej dolnej granicy. W takim przypadku kontrakt nie zostaje zakończony, lecz wymuszana jest wcześniejsza realizacja, co oznacza, że posiadacz może nadal uzyskać dodatnią wypłatę. W zaproponowanym rozwiązaniu zakładamy, że optymalny czas zatrzymania to pierwszy moment, gdy cena instrumentu spada poniżej określonego poziomu, a następnie wyznaczamy cenę opcji przy tym założeniu. Teza ta zostaje następnie zweryfikowana w dalszej części rozdziału. Na koniec przedstawiona jest także analiza numeryczna.

Rozdział 3 bada opcje zatrzymywane przez zdarzenie typu *drawdown*, definiowane jako pierwszy moment, gdy stosunek ceny instrumentu bazowego do jego historycznego przeszłego maksimum przekracza ustalony próg. Głównym wynikiem tego rozdziału jest dowód, że optymalny czas zatrzymania to pierwszy moment, gdy cena spada poniżej wartości pewnej funkcji przyjmującej jako argument jej historycznego maksimum. Rozpoczynamy od analizy szczególnego przypadku rynku Blacka–Scholesa, w którym nie występują skoki cenowe. Następnie analizujemy przypadek z dodatkowymi wykładniczymi skokami w dół. W obu scenariuszach pokazujemy, że optymalna strategia polega albo na czekaniu aż cena spadnie poniżej ustalonej bariery, albo na zatrzymaniu opcji przez proces spadku (*drawdown*). Podobnie jak w poprzednim przypadku, zdarzenie to nie kończy opcji, lecz wymusza jej wcześniejszą realizację, co może skutkować dodatnią wypłatą dla posiadacza.

Rozdział 4 dotyczy opcji zatrzymywanej w momencie, gdy cena instrumentu bazowego po raz ostatni przekracza pewien ustalony próg. Ponieważ moment ten nie jest czasem zatrzymania, kontrakt byłby trudny do wprowadzenia w praktyce. Jest on jednak bardzo interesujący z matematycznego punktu widzenia i prowadzi do ciekawych analiz. Podobnie jak wcześniej, stosujemy metodę „guess-and-verify”, proponując optymalną stra-

tegię, którą następnie weryfikujemy i wyprowadzamy odpowiadającą jej cenę opcji. Rozdział ten oparty jest na [1].

Rozdział 5 przedstawia opis i dowód zbieżności zmodyfikowanej metody Monte Carlo najmniejszych kwadratów, zaprojektowanej do wyceny opcji amerykańskich, których zapadalność ograniczona jest przez dowolny czas zatrzymania. Rozdział kończy się prezentacją wyników numerycznych dla kilku wybranych instrumentów tego typu. Rozdział ten oparty jest na [2].

## Literatura

- [1] Palmowski, Z. i Stępnia, P. (2023) *Last-Passage American Cancelable Option in Lévy Models*. Journal of Risk and Financial Management **16(2)**.
- [2] Palmowski, Z. i Stępnia, P. (2025) *Pricing time-capped American options using Least Squares Monte Carlo method*. Journal of Computational Finance, **28(3)**.

