

# ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNA

## Egzamin na ocenę celującą, luty 2011

Na pierwszej stronie pracy należy napisać: swoje imię i nazwisko, numer indeksu, wydział, kierunek, rok studiów, nazwiska wykładowcy i osoby prowadzącej ćwiczenia, datę, ocenę zaproponowaną na zaliczenie na podstawie kolokwium oraz sporządzić poniższą tabelkę. Ponadto należy ponumerować, podpisać i spiąć zszywaczem wszystkie kartki pracy.

1	2	3	4	Suma	Ocena

Treści zadań proszę nie przepisywać. Rozwiązanie zadania o numerze  $n$  należy napisać na  $n$ -tej kartce pracy. Na rozwiązanie zadań przeznaczono 3 godziny. Za rozwiązanie każdego zadania można dostać od 0 do 5 punktów. Ocenę celującą otrzyma student, który zdobędzie co najmniej 10 punktów. **W rozwiązaniach należy opisywać przebieg rozumowania, formułować stosowane twierdzenia, przytaczać wzory, uzasadniać wyciągane wnioski. Ponadto proszę sporządzać staranne rysunki z pełnym opisem.**

Powodzenia!

Zbigniew Skoczylas

## ZADANIA

1. Niech  $z_1, z_2$  będą różnymi liczbami zespolonymi. Co przedstawia zbiór

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \right\} ?$$

2. Pokazać, że jeżeli liczba zespolona  $\omega$  jest pierwiastkiem wielomianu  $P(z) = z^4 + z^3 - 1$ , to liczba  $\omega^2$  jest pierwiastkiem wielomianu  $Q(z) = z^4 - z^3 - 2z^2 + 1$ .

3. Trzy początkowe wiersze wyznacznika stopnia czwartego są wypełnione liczbami, ale nie widać ich na ekranie komputera. Gdy dwukrotnie do czwartego wiersza wpisano znane liczby, to pokazały się wyniki:

$$\det \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} = 7, \quad \det \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix} = 13. \quad \text{Czy można obliczyć } \det \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} ?$$

4. W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  dany jest prostopadłościan. Rzutem prostokątnym tej bryły na płaszczyznę  $xOy$  jest sześciokąt o wierzchołkach:

$$W_1 = (2, 0), \quad W_2 = (4, 1), \quad W_3 = (5, 3), \quad W_4 = (2, 5), \quad W_5 = (0, 4), \quad W_6 = (-1, 2).$$

Obliczyć objętość prostopadłościanu.

**Źródła:** zadania 1 i 3 opracował ZS, zadanie 2 pochodzi z konkursu studenckiego w USA, a zad. 4 jest przeróbką problemu z egzaminu wstępnego do jednej z uczelni w Rosji.