ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

Egzamin na ocenę celującą, styczeń 2018

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek.

Powodzenia!

ZADANIA

1. Obliczyć

$$\left[\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^{20}.$$

Wynik zapisać w postaci algebraicznej.

2. Liczby -1 i 1 są jedynymi rozwiązaniami rzeczywistymi równania $x^5+px^2+qx+r=0$ $(p,q,r\in\mathbb{R})$. Wyznaczyć wszystkie trójki (p,q,r), dla których jest to możliwe.

3. Czy każdą macierz osobliwą[1] można przedstawić jako sumę dwóch macierzy nieosobliwych? Jeśli odpowiedzią jest tak, to podać dowód, a jeśli nie, to wskazać kontrprzykład.

4. Pokazać, że jeżeli wszystkie wierzchołki sześcianu mają współrzędne całkowite, to długość jego krawędzi jest liczbą naturalną.

Autorzy lub źródła zadań: 1 - Jerzy Cisło, 2 - Studencka Olimpiada Matematyczna w Rosji, 3 - Zbigniew Skoczylas, 4 - miesięcznik „Delta” (to zadanie zasugerował mi Jerzy Cisło).

---

[1] Mówimy, że macierz A jest osobliwa, gdy spełnia warunek $\det(A)=0$.