ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

Egzamin na ocenę celującą, 8 lutego 2019

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

ZADANIA

1. Ania i Bartek będą wpisywać na przemian wybrane przez siebie liczby naturalne do pustego wyznacznika stopnia piątego. Ania zaczyna i chce otrzymać wyznacznik podzielny przez 2019, a Bartek jej w tym przeszkadza. Czy Ania może osiągnąć swój cel?

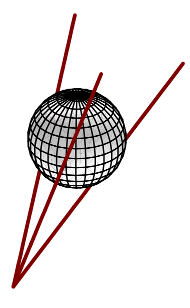
2. Liczby zespolone u_1, u_2, u_3, u_4 tworzą ciąg arytmetyczny o niezerowej różnicy. Pokazać, że rozwiązania z_1, z_2, z_3 równania

$$\frac{1}{z-u_1}+\frac{1}{z-u_2}+\frac{1}{z-u_3}+\frac{1}{z-u_4}=0$$

można tak ustawić, aby tworzyły ciąg arytmetyczny.

3. Kolorowe fotografie cyfrowe zapisywane są w formie macierzy, których elementami są liczby od 0 do 9 (barwy). W programach komputerowych do obróbki zdjęć można obrócić fotografię o 90° wokół jej środka. Jak wykonując standardowe działania, tj. dodawanie, mnożenie oraz transponowanie, na macierzy fotografii oraz na pewnych stałych macierzach można otrzymać macierz obróconej fotki?

4. Znaleźć zbiór środków kul stycznych do półprostych: $k:(x,y,z)=t\,(0,3,4)\,,\ l:(x,y,z)=t\,(2,2,1)\,,\ m:(x,y,z)=t\,(6,3,2)\,,$ gdzie $t\geqslant 0$.



Źródła: zadanie 2. jest przeniesieniem na liczby zespolone znanego problemu, zadanie 4. zaproponował Jerzy Cisło, a pozostałe zadania opracował Zbigniew Skoczylas.

ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ
Egzamin na ocenę celującą, 15 lutego 2019

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

ZADANIA

1. Liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_5$ mają moduły równe 1 oraz spełniają warunki: $z_1 + z_2 + \ldots + z_5 = 0$, $(z_1)^2 + (z_2)^2 + \ldots + (z_5)^2 = 0$. Pokazać, że punkty $z_1, z_2, \ldots, z_5$ płaszczyzny zespolonej tworzą wierzchołki pięciokąta foremnego.

2. Znaleźć wszystkie wielomiany rzeczywiste W, które dla każdego x spełniają tożsamość $(x+10)\,W(2x) = 8\,(x-4)\,W(x+6)\,.$

3. Pokazać, że w każdej macierzy nieosobliwej można zmienić pewien wyraz tak, aby stała się osobliwa. Ponadto udowodnić, że w dowolnej macierzy osobliwej można zmienić wyrazy na głównej przekątnej tak, aby stała się nieosobliwa.

4. Wyprowadzić wzór na promień kuli wpisanej w czworościan rozpięty na niewspółpłaszczyznowych wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Źródła: zadanie 1. pochodzi z Olimpiady Matematycznej w Rumunii, z zadanie 2. z Olimpiady Matematycznej krajów Ameryki Środkowej. Pozostałe zadania opracował Zbigniew Skoczylas.