

# ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNA

## Egzamin na ocenę celującą, luty 2020

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

### ZADANIA

**1.** Podać przykład wielomianu dwóch zmiennych, którego wykres po obrocie o kąt  $\pi/3$  wokół pionowej osi układu współrzędnych nie zmieni się, ale nie będzie tak dla mniejszych kątów dodatnich. Opisać sposób otrzymania wielomianu o tej własności.

**2.** Pokazać, że istnieją liczby niewymierne  $a, b, c$  takie, iż liczby

$$a + b + c, \quad a^2 + b^2 + c^2, \quad a^3 + b^3 + c^3$$

są naturalne.

**3.** Po dodaniu 1 do wszystkich wyrazów macierzy kwadratowej stopnia  $n \geq 3$  otrzymamy macierz osobliwą. Tak samo będzie, gdy od każdego jej wyrazu odejmiemy 1. Pokazać, że macierz jest osobliwa.

**4.** W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$  ma postać

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Znaleźć analogiczne równanie sfery przechodzącej przez cztery niewspółpłaszczyznowe punkty  $W_k = (x_k, y_k, z_k)$  ( $1 \leq k \leq 4$ ).