

# ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

Egzamin na ocenę celującą, 6. lutego 2023

## ZADANIA

1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczyć zbiór tych liczb zespolonych  $z$ , dla których spełniony jest warunek

$$|z^2 + z + 1 - i| + 4 \leq 2|z - i| + 2|z + i + 1|.$$

2. Dany jest wielomian  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 2023$  stopnia  $n$ , mający współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wszystkie pierwiastki tego wielomianu także są liczbami całkowitymi, to liczba  $P(2023)$  jest podzielna przez  $2023 \cdot 2^n$ .

3. Dla danej liczby naturalnej  $n$  obliczyć wyznacznik macierzy kwadratowej  $A = [a_{ij}]$  stopnia  $n$ , gdy

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{dla } i + j \neq n + 1 \\ 3 & \text{dla } i + j = n + 1 \end{cases}, \quad \text{gdzie } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

4. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka  $S$  czworościanu  $ABCS$  wiedząc, że  $A = (1, 2, 0)$ ,  $B = (-2, 1, 1)$ ,  $C = (0, 3, -1)$  i wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku  $S$  są proste.