ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

Egzamin na ocenę celującą, 9. lutego 2024

ZADANIA

1. **1.** Dana jest funkcja $f(z) = z + \frac{1}{\bar{z}}$ dla $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Rozwiązać równanie z niewiadomą zespoloną

$$f^{24}(z) = 2i,$$

gdzie zapis $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ razy}}$ oznacza odpowiednie złożenie funkcji: $f^2(z) = f(f(z))$.

2. Wyznaczyć rzeczywisty współczynnik a wielomianu

$$p(x) = x^6 + 2x^4 + ax^2 + 253$$

wiedząc, że wszystkie pierwiastki zespolone tego wielomianu są parami różne i leżą – zaznaczone na płaszczyźnie zespolonej – na pewnym okręgu o środku w zerze.

3. Każdy wiersz macierzy kwadratowej A stopnia $n \geqslant 1$ ma postać

$$\underbrace{0\ldots\ldots0}_{\text{tylko zera}}\ \underbrace{1\ldots\ldots1}_{\text{tylko jedynki}}\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{\text{tylko zera}},$$

przy czym w różnych wierszach mogą być inne liczby zer na początku/końcu oraz jedynek w środku albo może ich nie być w tych miejscach. Wykazać, że $\det(A) \in \{-1, 0, 1\}$. Poniżej przykładowa macierz piątego stopnia spełniająca te warunki.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Czworościan foremny $ABCD$ jest wpisany w sferę o środku w początku układu współrzędnych. Znamy położenie dwóch jego wierzchołków: $A = (1, 5, 1)$ oraz $B = (3, -3, 3)$. Wyznaczyć współrzędne pozostałych wierzchołków czworościanu.

Zadanie 4 jest autorstwa dr. Zbigniewa Skoczylasa, zadanie 3 jest zapożyczeniem, zaś zadania 1 i 2 zostały ułożone na potrzeby egzaminu przez Włodzimierza Bąka.