

ALGEBRA LINIOWA 2

Egzamin na ocenę celującą, czerwiec 2010

Na pierwszej stronie pracy należy napisać: swoje imię i nazwisko, numer indeksu, wydział, kierunek, rok studiów, nazwiska wykładowcy i osoby prowadzącej ćwiczenia, datę, ocenę proponowaną na zaliczenie na podstawie kolokwium oraz sporządzić poniższą tabelkę. Ponadto należy ponumerować, podpisać i spiąć zszywaczem wszystkie kartki pracy.

1	2	3	4	Suma	Ocena

Treści zadań proszę nie przepisywać. Rozwiązanie zadania o numerze n należy napisać na n -tej kartce pracy. Na rozwiązanie zadań przeznaczono 3 godziny. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 5 punktów. Ocenę celującą otrzyma student, który uzyska co najmniej 10 punktów. **W rozwiązaniach zadań należy opisywać przebieg rozumowania, tj. formułować wykorzystywane twierdzenia, przytaczać stosowane wzory oraz uzasadniać wyciągane wnioski. Ponadto proszę sporządzać staranne rysunki z pełnym opisem.**

Zbigniew Skoczylas

ZADANIA

1. Oznaczmy przez V zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia 5, których pierwiastki tworzą pięciowyrazowy rosnący ciąg arytmetyczny. Wyznaczyć wymiar przestrzeni lin V .

2. Macierz A stopnia 44 ma elementy całkowite. Pokazać, że istnieją liczby całkowite $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2010}$, nie wszystkie równe 0, dla których zachodzi równość

$$x_0 I + x_1 A + x_2 A^2 + \dots + x_{2010} A^{2010} = \mathbb{O}.$$

3. Dla jakich wartości parametrów rzeczywistych a, b , przekształcenie liniowe $L : \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{M}_n$, gdzie $n \geq 2$, określone wzorem

$$L(X) = aX + bX^T$$

jest odwracalne. Znaleźć postać przekształcenia odwrotnego.

4. W przestrzeni euklidesowej \mathbb{E} wektory

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_n + \vec{u}_1, \text{ gdzie } n \geq 3,$$

są parami ortogonalne. Pokazać, że wektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ są liniowo niezależne.

Źródła: zad. 1 i 3 opracował ZS, zad. 2 pochodzi z konkursu matematycznego dla studentów w USA, a zad. 4 z takiego konkursu w Rosji.