

ALGEBRA LINIOWA 2

Egzamin na ocenę celującą, czerwiec 2012

Na pierwszej stronie pracy należy napisać: swoje imię i nazwisko, numer indeksu, wydział, kierunek, rok studiów, nazwiska wykładowcy i osoby prowadzącej ćwiczenia, datę, ocenę zaproponowaną na zaliczenie na podstawie kolokwium oraz sporządzić poniższą tabelkę. Ponadto należy ponumerować, podpisać i spiąć zszywaczem wszystkie kartki pracy.

1	2	3	4	Suma	Ocena

Treści zadań proszę nie przepisywać. Rozwiązanie zadania o numerze n należy napisać na n -tej kartce pracy. Na rozwiązanie zadań przeznaczono 3 godziny. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 5 punktów. Ocenę celującą otrzyma student, który uzyska co najmniej 10 punktów. **W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane twierdzenia, zacytować zastosowane wzory oraz starannie sporządzić rysunki.**

Zbigniew Skoczylas

ZADANIA

1. Wyznaczyć wymiar przestrzeni

$$V = \text{lin} \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} : \text{ciąg } (x_n)_{n=1}^{10} \text{ jest rosnący} \right\}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

2. Czy istnieje macierz A stopnia 2 taka, że macierze

$$A, A^2, A^3, A^4$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{M}_{2 \times 2}$? Odpowiedź uzasadnić.

3. Podać przykład przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takiego, że

$$L^3 = Id, \quad \text{przy czym } L \neq Id.$$

Jakie wartości mogą przyjmować wartości własne tego przekształcenia?

4. Pokazać, że nie istnieje przekształcenie liniowe $L : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, które dwukrotnie zmniejsza kąt między wektorami, tzn. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{E}^3$ spełnia warunek

$$\sphericalangle(L(x), L(y)) = \frac{1}{2} \sphericalangle(x, y).$$