

# ANALIZA MATEMATYCZNA 1

## Egzamin na ocenę celującą, styczeń 2011

Na pierwszej stronie pracy należy napisać swoje imię i nazwisko, numer indeksu, wydział, kierunek, rok studiów, nazwiska wykładowcy i osoby prowadzącej ćwiczenia, datę, ocenę zaproponowaną na zaliczenie na podstawie kolokwium oraz sporządzić poniższą tabelkę. Ponadto należy ponumerować, podpisać i spiąć zszywaczem wszystkie kartki pracy.

1	2	3	4	Suma	Ocena

Treści zadań proszę nie przepisywać. Rozwiązanie zadania o numerze  $n$  należy napisać na  $n$ -tej kartce pracy. Na rozwiązanie zadań przeznaczono 3 godziny. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 5 punktów. Ocenę celującą otrzyma student, który uzyska co najmniej 10 punktów. **W rozwiązaniach należy opisywać przebieg rozumowania, tj. formułować stosowane twierdzenia, przytaczać wzory, uzasadniać wyciągane wnioski. Ponadto proszę sporządzać staranne rysunki z pełnym opisem.** Powodzenia!

*Zbigniew Skoczylas*

### ZADANIA

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5} \right)^n.$$

2. Pokazać, że logarytm naturalny nie jest funkcją wymierną, tzn. w przedziale  $(0, \infty)$  nie można go przedstawić w postaci

$$\ln x = \frac{L(x)}{M(x)},$$

gdzie  $L$  oraz  $M$  są pewnymi wielomianami.

3. Środek okręgu o promieniu 1 jest punktem przecięcia środkowych trójkąta o bokach 13, 14, 15. Niech  $M$  i  $N$  będą jedynymi punktami okręgu, których suma odległości od boków trójkąta jest odpowiednio najmniejsza i największa. Wyznaczyć długość odcinka  $MN$ .

4. Obliczyć całkę

$$\int \operatorname{tg}^{10} x \, dx.$$

**Źródła:** zadania 1, 2 i 4 opracował ZS, a zadanie 3 jest modyfikacją problemu z egzaminu wstępnego do jednej z uczelni w Rosji.