

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, styczeń 2012

Na pierwszej stronie pracy należy napisać swoje imię i nazwisko, numer indeksu, wydział, kierunek, rok studiów, nazwiska wykładowcy i osoby prowadzącej ćwiczenia, datę, ocenę zaproponowaną na zaliczenie na podstawie kolokwium oraz sporządzić poniższą tabelkę. Ponadto należy ponumerować, podpisać i spiąć zszywaczem wszystkie kartki pracy.

| 1 | 2 | 3 | 4 | Suma | Ocena | Zaliczenie ćwiczeń |
|---|---|---|---|------|-------|--------------------|
| | | | | | | |

Treści zadań proszę nie przepisywać. Rozwiązanie zadania o numerze n należy napisać na n -tej kartce pracy. Na rozwiązanie zadań przeznaczono 3 godziny. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 5 punktów. Ocenę celującą otrzyma student, który uzyska co najmniej 10 punktów. **W rozwiązaniach należy: opisać rozumowanie, sformułować wykorzystane twierdzenia, zacytować zastosowane wzory, uzasadnić wyciągnięte wnioski. Ponadto proszę sporządzać staranne rysunki wraz z opisem. Powodzenia!**

Zbigniew Skoczylas

ZADANIA

1. Z lewej strony przedziału $[0, 1]$ odcięto $1/3$ długości i otrzymano przedział $P_1 = [1/3; 1]$. Następnie z prawej strony przedziału P_1 odcięto $1/3$ długości i otrzymano przedział $P_2 = [1/3; 7/9]$. Obie te czynności powtórzono nieskończenie wiele razy i otrzymano kolejno przedziały: P_3, P_4, \dots . Wyznaczyć przekrój

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i,$$

tj. zbiór złożony z punktów, które należą do wszystkich przedziałów P_i .

2. Czy istnieje funkcja ciągła i rosnąca na przedziale $[0, 1]$, która w punkcie 0 nie ma pochodnej prawostronnej właściwej ani niewłaściwej? Podać dowód albo wskazać kontrprzykład.

3. Trójkąt ma boki o długościach $a = 4, b = 5, c = 6$. Znaleźć najkrótszy odcinek, który dzieli ten trójkąt na dwie części o jednakowych polach.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1} dx \quad (x > 3).$$