

# ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, luty 2016

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek.

Powodzenia!

Zbigniew Skoczylas

## ZADANIA<sup>1</sup>

1. Pokazać, że dla pewnej liczby naturalnej  $n$  rozwinięcie dziesiętne  $\sqrt{n}$  zaczyna się układem cyfr 2016, a bezpośrednio po przecinku ma 7 „siódemek”. Pozostałe cyfry rozwinięcia mogą być dowolne.<sup>2</sup>

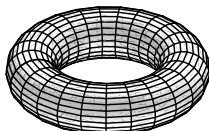
2. Jakie wartości może przyjąć granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^2)}{f(x)},$$

gdy  $f$  jest funkcją ciągłą na przedziale  $[0, 1)$  i dodatnią na  $(0, 1)$ ? Odpowiedź uzasadnić.

3. Znaleźć wielomian, który tylko w  $-1$  i  $2$  ma ekstrema lokalne właściwe (odpowiednio minimum i maksimum), a ponadto tylko w  $0$  ma punkt przegięcia.

4. Niech funkcja  $f$  będzie ciągła i nieujemna na przedziale  $[a, b]$  ( $a \geq 0$ ). Wyprowadzić wzór na objętość bryły powstałej z obrotu obszaru  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  wokół osi  $Oy$ . Korzystając z niego obliczyć objętość torusa, tj. bryły powstałej z obrotu koła o promieniu  $r$  wokół osi oddalonej o  $R$  ( $R > r$ ) od jego środka.



<sup>1</sup>Autorem zadań jest ZS.

<sup>2</sup>Tak samo jest dla innych układów cyfr na początku i po przecinku oraz dla pierwiastków dowolnego stopnia.