ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, luty 2017

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek.

Powodzenia!

ZADANIA

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}\right)^3}$.

2. Kostką n-wymiarową o krawędzi $a>0$ nazywamy zbiór

$$\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : 0\leqslant x_1\leqslant a, 0\leqslant x_2\leqslant a,\ldots,0\leqslant x_n\leqslant a\right\}.$$

Ile wymiarowa kostka o sumie długości wszystkich krawędzi równej 2017 ma największą objętość?

3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

4. Pojemnik z lakierem w sprayu ma kształt walca o średnicy D i wysokości H. Do pojemnika włożona jest stalowa kulka o średnicy d $(d<D, d<H)$, która służy do mieszania lakieru przed użyciem. Obliczyć objętość tej części pojemnika, do której dociera kulka.

Autorem zadań jest Zbigniew Skoczylas.