

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, styczeń 2018

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek.

Powodzenia!

ZADANIA

1. Niech $a_n = 20182018 \dots 2018$ będzie liczbą ułożoną dziesiętnym utworzoną z n ustawionych obok siebie czwórek cyfr 2, 0, 1, 8. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

2. Pokazać, że na każdej płaskiej ograniczonej figurze wypukłej o niepustym wnętrzu i gładkim brzegu¹ można opisać kwadrat.

3. Wyznaczyć wymiary prostokąta o największym polu, który mieści się w walcu o promieniu podstawy r i wysokości h . Sporządzić rysunek.

4. Uzasadnić równość
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x \, dx}{2 - \sin 2x} = \frac{1}{2}.$$

Źródła: zad. 2 jest powszechnie znane (folklor), zad. 4 pochodzi z czasopisma "Pi Mu Epsilon", a pozostałe zadania opracował Zbigniew Skoczylas.

¹Mówimy, że krzywa jest gładka, gdy w każdym punkcie ma styczną i styczna ta zmienia się w sposób ciągły wzdłuż krzywej.