ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, 4 lutego 2019

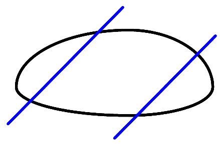
Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

ZADANIA

1. Czy istnieją ciągi $(x_n)\,,(y_n)$ liczb naturalnych takie, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{y_n}=\sqrt{2019}?$$

2. Pokazać, że brzeg dowolnego zbioru ściśle wypukłego[1] na płaszczyźnie można podzielić dwiema prostymi równoległymi na cztery krzywe o jednakowych długościach.

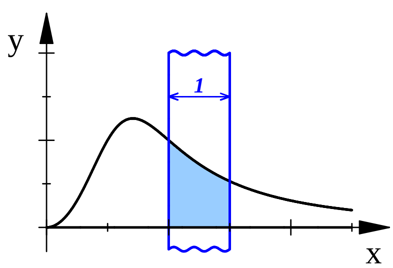


3. Pewną substancję o objętości V chcemy przechować w kopcu w kształcie stożka. Jaki powinien być kąt nachylenia tworzącej stożka do podstawy, aby powierzchnia parowania substancji, czyli powierzchnia boczna stożka, była najmniejsza?

4. W którym miejscu należy umieścić pionowy pas o szerokości 1, aby przykrył fragment obszaru

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{x^2}{x^4+4}\right\}$$

o największym polu?



Źródła: zadanie 3. jest powszechnie znane (folklor), autorem pozostałych zadań jest Zbigniew Skoczylas.

[1] Mówimy, że zbiór jest ściśle wypukły, gdy jest wypukły a jego brzeg nie zawiera żadnego odcinka.

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

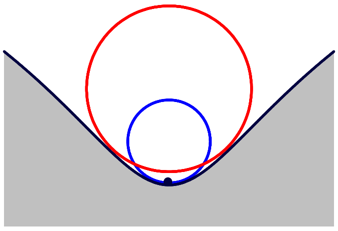
Egzamin na ocenę celującą, 11 lutego 2019

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

ZADANIA

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\log_2 n}-\left(3+\frac{1}{n}\right)^{\log_3 n}\right)$.

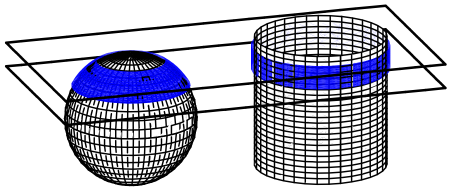
2. Przekrój poprzeczny rowu ma kształt krzywej $y=\ln\left(1+x^2\right)$. Znaleźć największą średnicę rury, która dotyka najniżej położonego punktu rowu (rysunek).



3. Obliczyć całkę

$$\int e^x \sin^4 x dx.$$

4. Udowodnić twierdzenie Archimedesa: jeśli sferę i opisany na niej walec przetniemy dwiema płaszczyznami prostopadłymi do osi walca, to pasy na sferze i walcu położone między płaszczyznami będą miały jednakowe pola.



Źródła: zadania 3. i 4. są powszechnie znane (folklor), autorem pozostałych zadań jest Zbigniew Skoczylas.