ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, luty 2021

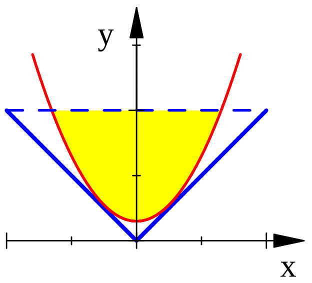
Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

ZADANIA

1. Znaleźć liczbę rzeczywistą p taką, że ciąg $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}$ dąży do e szybciej niż ciąg $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, tzn. spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-x_n}{e-e_n} = 0.$$

2. Parabole $y = ax^2 + b$ o zmiennych parametrach $a, b > 0$ są styczne do wykresu funkcji $y = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Wyznaczyć wartości a, b, dla których pole obszaru zaznaczonego na rysunku jest największe.



3. Dla jakich liczb naturalnych n istnieje wielomian, który ma tylko n punktów przegięcia i nie ma żadnego ekstremum lokalnego? Odpowiedź uzasadnić.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\, dx}{1+e^x}$.

Zadanie 1. jest przeróbką znanego problemu. Zadanie 4. pochodzi z konkursu studenckiego na Litwie. Pozostałe zadania opracował dr Zbigniew Skoczylas.