

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, 7. lutego 2022

ZADANIA

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

2. Znaleźć funkcję ciągłą $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ taką, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a równanie

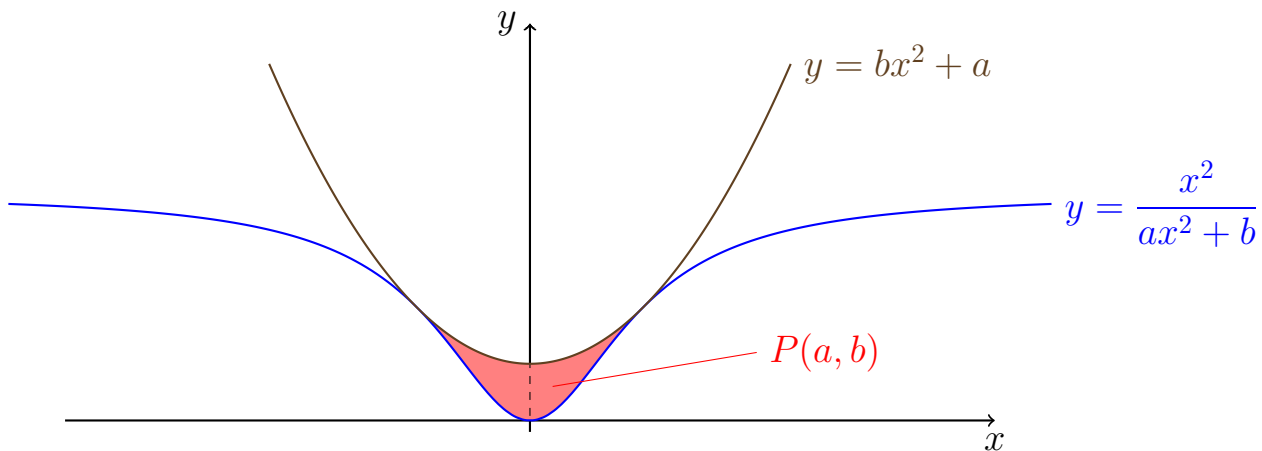
$$f(x) = a$$

ma dokładnie pięć różnych rozwiązań.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{x^3 - x^2 - x + 1 - \sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

4. Niech a, b oznaczać dodatnie parametry, dla których krzywe $y = bx^2 + a$ oraz $y = \frac{x^2}{ax^2 + b}$ są styczne¹. Obliczyć pole $P(a, b)$ obszaru ograniczonego przez takie krzywe.



¹Mówimy, że dwie krzywe są styczne, gdy mają punkt wspólny, a styczne do nich w tym punkcie pokrywają się.

Zadanie 2 jest prostą przeróbką znanego problemu, w którym funkcja przyjmuje każdą wartość dokładnie trzy razy; zadanie 3 pochodzi z czasopisma *CruX Mathematicorum*; zadania 1 i 4 zostały ułożone na potrzeby egzaminu przez Włodzimierza Bąka.