

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Egzamin na ocenę celującą, 3. lutego 2023

ZADANIA

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\underbrace{2222 \dots 22^n}_{2n \text{ cyfr}} + \underbrace{2323 \dots 23^n}_{2n \text{ cyfr}}}.$$

2. Wyznaczyć odległość pomiędzy krzywymi o równaniach $y = \ln x$ oraz $y = e^{x+2} + 2$. (tzn. długość najkrótszego odcinka, którego jeden koniec znajduje się na jednej krzywej, a drugi koniec leży na drugiej krzywej).

3. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{(1+x)^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej przez powierzchnię powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x) = x^2$ dla $x \in [0, 1]$ wokół prostej $y = x$.

