

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, 24 VI 2014

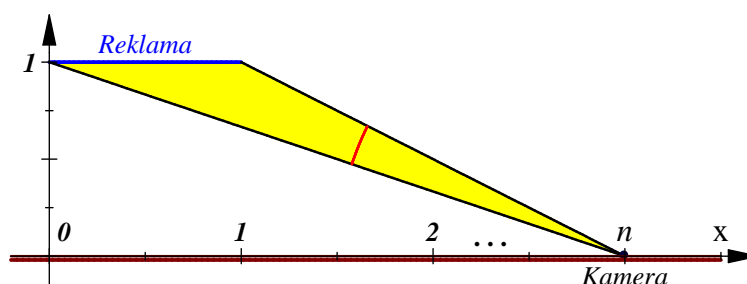
W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować zastosowane twierdzenia (wyszczególnić założenia i tezę), a także napisać potrzebne wzory ogólne (z opisem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z opisem.

Powodzenia!

Zbigniew Skoczyła

ZADANIA

1. Samochód firmy Google z kamerą do fotografowania otoczenia jedzie drogą (oś Ox). Równoległe do drogi, w odległości 1, stoi reklama o długości 1.



Niech α_n ($n \in \mathbb{N}$) oznacza kąt widzenia reklamy w chwili, gdy kamera jest w punkcie n drogi. Uzasadnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

2. Pokazać, że funkcja $f(x, y) = y^2 + x^2(1 + y)^3$ ma tylko jeden punkt stacjonarny, a w nim - minimum lokalne właściwe, ale w \mathbb{R}^2 nie przyjmuje wartości najmniejszej. Czy taka sytuacja jest możliwa dla funkcji jednej zmiennej z ciągłą pochodną na \mathbb{R} ?

3. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\sqrt{\sin \varphi} + \sqrt{\cos \varphi})^4}.$$

4. Jednorodny czworościan foremny o masie M ma krawędź a . Obliczyć moment bezwładności czworościanu względem jego osi symetrii.

Źródła: Zadanie 2. pochodzi z książki „A Century of Calculus”, zadanie 3. - z konkursu studenckiego Stanford Math Tournament. Pozostałe zadania opracował ZS.

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, 30 VI 2014

W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować zastosowane twierdzenia (wyszczególnić założenia i tezę), a także napisać potrzebne wzory ogólne (z opisem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z opisem.

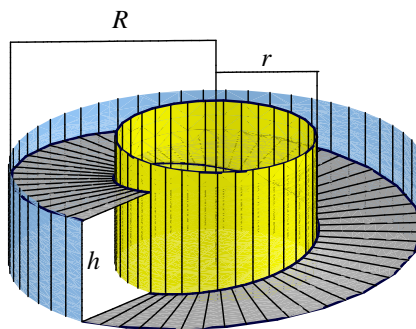
Powodzenia!
Zbigniew Skoczylas

ZADANIA

1. Symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\log_5(3^n + 4^n + 5^n)\}.$$

2. Wjazd na parking położony na wysokości h ma kształt powierzchni śrubowej, która przebiega między walcami o promieniach r i R ($r < R$) (rysunek). Obliczyć pole tej drogi.



3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{5x^3 dx}{2x^4}.$$

4. Pokazać, że ze wzorów

$$x_C = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad y_C = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n),$$

można wyznaczyć współrzędne środka masy dowolnego jednorodnego n -kąta ($n \geq 3$) wypukłego z wierzchołkami $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ tylko dla $n = 3$.