ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, czerwiec 2018

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek.

Powodzenia!

ZADANIA

1. Funkcje $f, g : [1, \infty) \to [0, \infty)$ są nierosnące, a ponadto dla naturalnych n prawdziwa jest nierówność $f(n) \geqslant g(n)$. Pokazać implikację

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ jest zbieżna} \implies \int_1^\infty g(x)\,dx \text{ jest zbieżna.}$$

2. Udowodnić równość $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{12}{(n^3 - n)\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n3^n} - 3.$

3. Na płaszczyźnie narysowano trójkąt o bokach $a = 3.00$, $b = 4.00$, $c = 5.00$, przy czym boki te odmierzono z dokładnością 0.01. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można przyjąć, że kąt między bokami a i b jest prosty?

4. Obliczyć pole tej części stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, która jest zawarta w walcu $x^2 + (z-1)^2 \leqslant 1$.

Źródła: zadanie 2. pochodzi z **„Jawnej puli zadań na kolokwia z analizy matematycznej”** ogłoszonej na stronie internetowej Wydziału Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, zadanie 4. zaproponował Jerzy Cisło, autorem pozostałych zadań jest Zbigniew Skoczylas.