

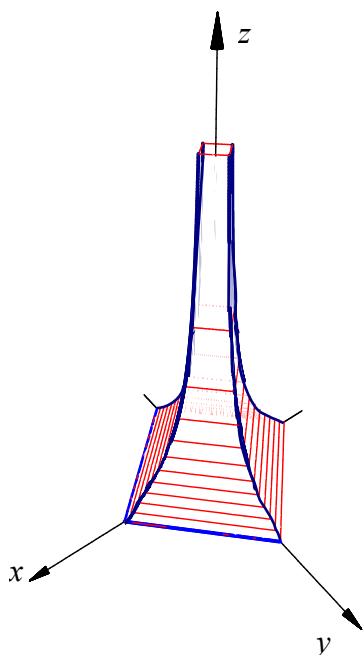
ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, czerwiec 2020

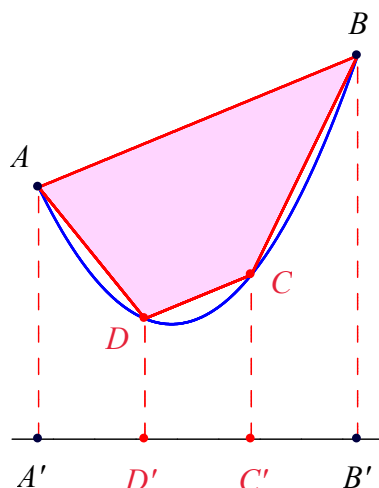
Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

ZADANIA

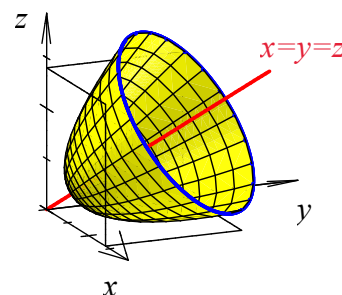
1. Jedna z czterech podpór, na których jest rozpięta powierzchnia nieograniczonej od góry „wieży Eiffla”, ma równanie $z = \operatorname{ctg} x$ ($0 < x \leq \pi/2$), $y = 0$. Pozostałe podpory mają ten sam kształt i są położone symetrycznie (rysunek 1). Czy objętość bryły ograniczonej tą powierzchnią oraz płaszczyzną xOy jest skończona?



Rysunek 1



Rysunek 2



Rysunek 3

2. Na ustalonym łuku AB paraboli wybrano punkty C, D tak, aby pole czworokąta $ABCD$ było największe (rysunek 2). Pokazać, że rzuty prostokątne C', D' punktów C, D na prostą prostopadłą do osi paraboli dzielą odcinek $A'B'$ na trzy jednakowe części.

3. Znaleźć równanie paraboloidy, której osią obrotu jest prosta $x = y = z$, jej wierzchołek ma współrzędne $(1, 1, 1)$, a ponadto jest ona styczna do wszystkich płaszczyzn pierwszego oktantu (rysunek 3).

4. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną p , dla której zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^3} \right)^{n^p}.$$

Odpowiedź uzasadnić.