

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, czerwiec 2021

Treści zadań proszę nie przepisywać. W rozwiązaniach należy opisać rozumowanie prowadzące do celu, uzasadnić wyciągnięte wnioski, zacytować wykorzystane twierdzenia, napisać zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, sporządzić czytelny rysunek. Powodzenia!

ZADANIA

1. Mamy po jednym prostokącie każdego wymiaru:

$$1 \times \frac{1}{1}, 1 \times \frac{1}{2}, 1 \times \frac{1}{3}, 1 \times \frac{1}{4}, \dots$$

Czy płaszczyznę można pokryć całkowicie tymi prostokątami tak, aby miały rozłączne wnętrza? Odpowiedź uzasadnić.

2. Niech (p_n) oznacza ciąg kolejnych liczb pierwszych. Pokazać, że istnieje funkcja f , która spełnia warunek $f^{(n)}(0) = p_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Wskazówka. Można wykorzystać nierówność $p_n \leq 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Znaleźć wielomian dwóch zmiennych, który punkcie $(0, 0)$ ma minimum lokalne właściwe, a punkcie $(2, 2)$ maksimum lokalne właściwe i są to jedyne jego ekstrema lokalne. Opisać rozumowanie prowadzące do uzyskania takiego wielomianu.

4. Pierwszy zbiornik na wodę ma kształt stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, drugi paraboloidy $z = x^2 + y^2$, a trzeci jest walcem o promieniu 1. Przekrój pionowy zbiorników pokazano na rysunku. Jak należy rozlać do nich wodę o objętości 96π , aby środek masy całej cieczy był najniżej?

