

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, 27. czerwca 2022

Treści zadań proszę nie przepisywać. Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce i dołączyć do pracy wypełniony blankiet z tabelką. Rozwiązania powinny zawierać: opis rozumowania prowadzącego do celu, uzasadnienia wyciąganych wniosków, nazwy wykorzystanych twierdzeń, zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, czytelny rysunek. Podczas pracy wolno korzystać z tzw. kalkulatora prostego. **Powodzenia!**

ZADANIA

1. Udowodnić nierówność

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{xy}}{1+xy} dx dy > 1,01.$$

2. Pokazać, że dla $p > 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n^p} - 1)$ jest zbieżny.

3. Czy istnieje wielomian dwóch zmiennych posiadający dokładnie dwa ekstrema lokalne – minimum oraz maksimum, przy czym wartość tego wielomianu w minimum lokalnym jest większa od wartości w maksimum lokalnym?

4. Powierzchnię boczną walca (bez podstaw) o promieniu R i wysokości h przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środek symetrii walca i nachyloną do jego osi pod kątem 45° . Z otrzymanych fragmentów utworzono szczelne „kolanko” i ustawiono je tak, że płaszczyzna sklejenia jest prostopadła do poziomu (rys.). Jaka jest maksymalna objętość wody, którą pomieści tak ustawione „kolanko”? Przeprowadzić obliczenia dla (a) $h = 6R$, (b) $h = 4R$.

