ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, 28. czerwca 2023

Treści zadań proszę nie przepisywać. Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce i dołączyć do pracy wypełniony blankiet z tabelką. Rozwiązania powinny zawierać: opis rozumowania prowadzącego do celu, uzasadnienia wyciąganych wniosków, nazwy wykorzystanych twierdzeń, zastosowane wzory oraz, jeśli jest to potrzebne, czytelny rysunek. Podczas pracy wolno korzystać z tzw. kalkulatora prostego. **Powodzenia!**

ZADANIA

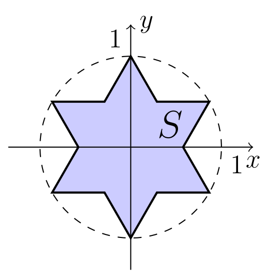
1. Czy istnieje ciągła funkcja dwóch zmiennych $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, której każda poziomica $L_n = \{(x,y)\colon f(x,y) = n\}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ jest okręgiem o promieniu 1?

2. Wiadomo, że ciąg liczb dodatnich $\{a_n\}$ jest malejący oraz szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Pokazać, że wtedy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ także jest zbieżny.

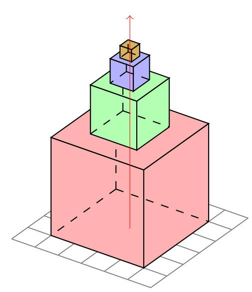
3. Niech $D \subset \mathbf{R}^2$ będzie kołem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R. Wyznaczyć taką wartość $R \geqslant 0$, dla której zachodzi równość

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

gdzie S jest foremną gwiazdą sześcioramienną (jej kąty wewnętrzne mają naprzemiennie miary 60° i 240°) wpisaną w okrąg jednostkowy.



Rysunek do zadania **3.**



Rysunek do zadania **4.**

4. Dysponujemy po jednej sześciennej kostce o krawędziach: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$ Z wszystkich kostek ustawiono wieżę wzdłuż pionowej osi przechodzącej przez geometryczne środki kolejnych kostek (na rysunku widać tylko cztery), stawiając zawsze mniejszą na większej. Na jakiej wysokości znajduje się jej środek masy? Przyjąć, że kostki są wykonane z tego samego jednorodnego materiału.

Zadanie **3** zaproponował dr Adam Abrams; zadanie **4** jest autorstwa dra Zbigniewa Skoczylasa; zadanie **2** jest zapożyczeniem, a zadanie **1** zostało ułożone przez W. Bąka na potrzeby egzaminu.