

# ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Egzamin na ocenę celującą, 28. czerwca 2024

## ZADANIA

1. Dla  $n = 1, 2, \dots$  niech  $x_n$  będzie jedynym dodatnim rozwiązaniem równania

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = x^n.$$

Zbadać zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[24]{2 - x_n}$ .

2. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji dwóch zmiennych

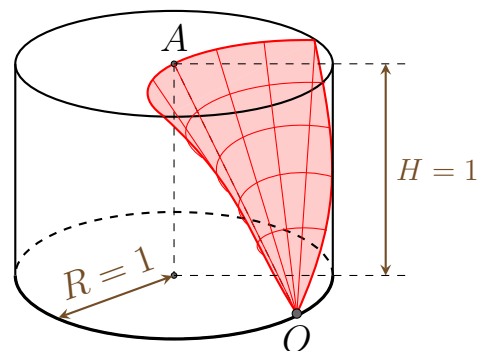
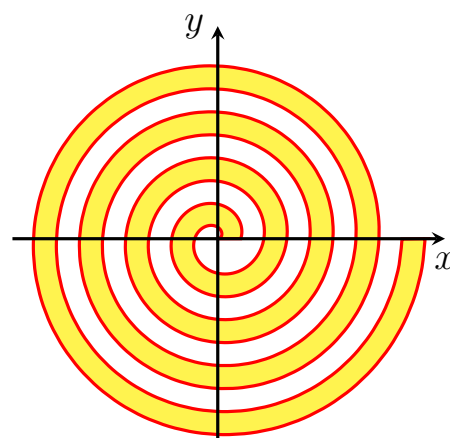
$$f(x, y) = \frac{2y^2 - 3x}{x^2 + y^2 + 3} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

3. Jednorodny „ślimak” jest ograniczony  $n$  zwojami dwóch spiral Archimedesusa i we współrzędnych biegunowych ma opis:

$$\varphi \leq r \leq \varphi + \pi, \quad \text{gdzie } 0 \leq \varphi \leq n \cdot 2\pi,$$

(na rysunku obok pokazano  $n = 4$  zwoje spiral). Obliczyć współrzędne środka masy „ślimaka”. Wyznaczyć graniczne położenie środka masy, gdy  $n \rightarrow \infty$ .

4. Silos w kształcie walca o promieniu podstawy 1 i wysokości 1 jest zapełniony całkowicie ziarnem. W wyniku nieszczelności dolnej krawędzi silosu, z punktowego otworu  $O$  wysypało się częściowo ziarno. Pusta przestrzeń w zbiorniku utworzyła fragment stożkowatego „leja” z osią przechodzącą przez punkt  $O$  i którego górna krawędź podstawy dotyka pionowej osi symetrii silosu w punkcie  $A$ . Obliczyć objętość wysypanego ziarna.



---

Zadanie 3 zaproponował dr Zbigniew Skoczylas, pozostałe zadania zostały ułożone przez W. Bąka na potrzeby egzaminu.