Algebra Liniowa 2

Zadania do samodzielnych ćwiczeń
Wydział Elektroniki, I rok

Karina Olszak i Zbigniew Olszak

Podobieństwo macierzy, diagonalizacja macierzy

1. Znaleźć macierze przekształcenia liniowego

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (3x-2y, 2x+3y)$$

w podanych bazach przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^2$

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ = baza standardowa; (b) $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} = \{(3,2),(-2,3)\}$; (c) $\mathcal{B}''_{\mathbb{R}^2} = \{(-1,2),(-2,2)\}$.

2. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego

$$T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z,t) = (-2x+y-2z+t, x-2y+z-2t)$$

w podanych bazach przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^2$

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}$ = baza standardowa, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ = baza standardowa;
(b) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{(0,1,1,-1),(1,0,-1,0),(-1,-1,0,1),(0,0,0,1)\}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(2,1),(-1,0)\}$;

3. O przekształceniu liniowym $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ wiemy, że

$$T(1,1) = (1,2,3,4,5), \quad T(2,-1) = (5,4,3,2,1).$$

Jak wyglądają $T(1,0)$, $T(0,1)$ i ogólnie $T(x,y)$ dla dowolnego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

4. Przekształcenie liniowe $T\colon V \to V$ ma w bazie $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierze A', A'' przekształcenia T w podanych bazach

(a) $\mathcal{B}'_V = \{v'_1 = 2v_1, v'_2 = v_2 + v_3, v'_3 = -v_1 + 2v_2 - v_3\}$;
(b) $\mathcal{B}''_V = \{v'_1 = -v_1 + v_2 + v_3, v'_2 = v_1 - v_2 + v_3, v'_3 = v_1 + v_2 - v_3\}$

5. Pokazać, że poniższe macierze A i A' są podobne

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Wykazać, że jeśli macierze A i B są podobne, to:

   (a) dla dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ macierze $A + \lambda E$ i $B + \lambda E$ też są podobne (E oznacza macierzą jednostkową);

   (b) dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$ macierze A^k i B^k też są podobne.

7. Skorzystać z poprzedniego zadania i pokazać, że poniższe macierze A i B nie są podobne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Sprawdzić, dla jakich wartości parametrów a i b macierz A jest diagonalizowalna

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

9. Dla podanej macierzy A skonstruować macierz podobną A', która ma postać diagonalną (wykonać proces diagonalizacji macierzy):

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & -8 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

W każdym przypadku wskazać macierz P realizującą podobieństwo, tzn. taką, że $A' = P^{-1}AP$.

Przestrzenie euklidesowe

10. Sprawdzić, czy funkcja $\langle .,. \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, jeśli

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & n = 2,\ \langle x, y \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1, \\
\text{(b)} & n = 2,\ \langle x, y \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2, \\
\text{(a)} & n = 3,\ \langle x, y \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_3 y_3, \\
\text{(b)} & n = 4,\ \langle x, y \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4.
\end{array}$$

11. Wiadomo, że $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Sprawdzić, czy $\mathcal{B}'$ jest bazą ortogonalną, ortonormalną w tej przestrzeni, jeśli:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \mathcal{B}' = \Big\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} v_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} v_3,\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_3, \\
& \qquad u_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} v_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} v_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} v_3 \}, \\
\text{(b)} & \mathcal{B}' = \{ u_1 = v_1 - v_2 + 3v_3,\ u_2 = 10v_1 + v_2 - 3v_3,\ u_3 = 6v_2 + 2v_3 \}.
\end{array}$$

12. Zastosować ortogonalizację Grama-Schmidta i skonstruować bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$ startując z podanej bazy $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \mathcal{B} = \big\{ (1,1,1), (1,2,3), (-1,0,-1) \big\}, \\
\text{(b)} & \mathcal{B} = \big(\{1,2,3), (-1,0,-1), (1,1,1) \big\}.
\end{array}$$

13. Skonstruować bazę ortogonalną w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, jeśli

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & V = \mathrm{Lin} \big\{ (1,0,0,-1), (1,1,1,-1), (1,2,0,-2) \big\}, \\
\text{(b)} & V = \mathrm{Lin} \big\{ (1,0,0,-1), (1,1,1,-1), (1,2,0,-2), (0,-3,-1,1) \big\},
\end{array}$$

a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym w indukowanym na podprzestrzeni liniowej V przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^4$ wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny.

14. Podać bazę ortonormalną przestrzeni $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, w której iloczyn skalarny jest indukowany z przestrzeni $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + z + t = 0 \}, \\
\text{(b)} & V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x - 2y + z - 3t = 0 \}, \\
\text{(c)} & V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + z + t = 0 \wedge x - 2y + z - 3t = 0 \}.
\end{array}$$

15. Wyznaczyć dopełnienie ortogonalne $V^{\perp}$ podprzestrzeni liniowej V w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym, jeśli

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y - z = 0 \}, \\
\text{(b)} & V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y - z = 0 \wedge 3x + 2y - 5z = 0 \}, \\
\text{(c)} & V = \mathrm{Lin} \{ (-1,2,3) \}, \\
\text{(d)} & V = \mathrm{Lin} \{ (-1,2,-1), (1,2,1) \}.
\end{array}$$

16. Wyznaczyć dopełnienie ortogonalne $V^\perp$ podprzestrzeni liniowej V w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym, jeśli

(a) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x - y - z - t = 0\}$,
(b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x - y - z - t = 0 \wedge x + y - z + t = 0\}$,
(c) $V = \mathrm{Lin}\{(1, 1, 0, 0)\}$,
(d) $V = \mathrm{Lin}\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, -1)\}$,
(e) $V = \mathrm{Lin}\{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\}$,
(f) $V = \mathrm{Lin}\{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2), (1, 1, 0, 0)\}$.

17. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora v na wektor u w podanej przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^n$ wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny

(a) $v = (3, 4),\ u = (1, 1),\ \mathbb{R}^2$,
(b) $v = (1, 1, 1),\ u = (1, -1, 1),\ \mathbb{R}^3$,
(c) $v = (1, 1, 2, 2),\ u = (2, 2, 1, 1),\ \mathbb{R}^4$.

18. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora v na podprzestrzeń liniową V przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^n$ wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny, jeśli

(a) $v = (3, 4),\ V = \mathrm{Lin}\{(1, 1)\},\ \mathbb{R}^2$,
(b) $v = (1, 1, -1),\ V = \mathrm{Lin}\{(2, -1, 0)\},\ \mathbb{R}^2$,
(c) $v = (1, 1, -1),\ V = \mathrm{Lin}\{(2, -1, 0), (0, -1, 2)\},\ \mathbb{R}^3$,
(d) $v = (1, 2, 3, 4),\ V = \mathrm{Lin}\{(1, 0, 1, 1), (0, 0, -1, 1)\},\ \mathbb{R}^4$,
(d) $v = (1, 2, 2, 0, -2),\ V = \mathrm{Lin}\{(1, 1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1, 0)\},\ \mathbb{R}^5$

19. Napisać macierz podanej formy kwadratowej f. Jak wygląda symetryczna forma dwuliniowa F odpowiadająca formie kwadratowej f?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \\ \text{(b)} & f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3, \\ \text{(c)} & f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 - x_2x_3, \\ \text{(d)} & f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 3x_4^2. \end{array}$$

20. Sprowadzić do postaci kanonicznej formy kwadratowe z zadania poprzedniego.

Odp. Np. (a) $-x_1'^2 + \frac{5}{4}x_2'^2$, $x_1' = x_1 + \frac{1}{2}x_2$, $x_2' = x_2$,

(b) $2x_1'^2 - \frac{11}{2}x_2'^2 + \frac{74}{11}x_3'^2$, $x_1' = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $x_2' = x_2 - \frac{7}{11}x3$, $x_3' = x_3$,

(c) $x_1'^2 - x_2'^2$, $x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)$, $x_2' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3)$,

(d) $-\frac{1}{3}x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 + \frac{1}{2}x_3'^2 + 3x_4'^2$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2 + x_3$, $x_3' = x_2 - x_3$, $x_4' = \frac{1}{3}x_1 + x_4$.

21. Napisać macierz symetrycznej formy dwuliniowej F. Jak wygląda forma kwadratowa f odpowiadająca formie dwuliniowej F?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x_1,x_2,y_1,y_2) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_2, \\ \text{(b)} & f(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3, \\ \text{(c)} & f(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4) = -6x_1y_4 - 6x_4y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2. \end{array}$$

22. Dla jakiej wartości parametru λ forma kwadratowa f jest dodatnio określona?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 9x_2^2, \\ \text{(b)} & f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3, \\ \text{(c)} & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3, \\ \text{(d)} & f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_4. \end{array}$$

Odp.: (a) $-3 < \lambda < 3$, (b) $\lambda > 2$, (c) $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$, (d) $-\sqrt{\frac{5}{3}} < \lambda < \sqrt{\frac{5}{3}}$.

23. Dla jakiej wartości parametru λ forma kwadratowa f jest ujemnie określona?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x_1,x_2) = -x_1^2 + \lambda x_2^2 + 4x_1x_2, \\ \text{(b)} & f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 2\lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3, \\ \text{(c)} & f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2\lambda(x_1x_3 + x_2x_4). \end{array}$$

Odp.: (a) $\lambda < -4$, (b) $\lambda < -10$, (c) $-1 < \lambda < 1$.

24. Korzystając z algorytmu Euklidesa, znaleźć największy wspólny dzielnik liczb $a, b \in \mathbb{Z}$, a następnie zapisać go w postaci

$$NWD(a,b) = a \cdot x + b \cdot y, \quad \text{gdzie} \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Polecenie wykonać dla

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad a = 379, \quad b = 77;\\
&\text{(b)} \quad a = 975, \quad b = 442;\\
&\text{(c)} \quad a = 2849, \quad b = 1258;\\
&\text{(d)} \quad a = 34307, \quad b = 34216;\\
&\text{(e)} \quad a = 22869, \quad b = 11025.
\end{aligned}$$

Odp.: (a) 1, $x = -13$, $y = 64$; (b) 13, $x = 5$, $y = -11$; (c) 37, $x = -15$, $y = 34$; (d) 91, $x = 1$, $y = -1$; (e) 63, $x = 27$, $y = -56$.

25. Sprawdzić, która para liczb a, b to liczby względnie pierwsze, jeśli

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad a = 1273, \quad b = 858;\\
&\text{(b)} \quad a = 1037, \quad b = 793;\\
&\text{(c)} \quad a = 273, \quad b = 231;\\
&\text{(d)} \quad a = 27333, \quad b = 23134.
\end{aligned}$$

Odp.: Względnie pierwsze są pary liczb w (a) i (d).

26. Obliczyć resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b, jeśli

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad a = 1946, \quad b = 26;\\
&\text{(b)} \quad a = 1946^{1972}, \quad b = 26;\\
&\text{(c)} \quad a = 1972, \quad b = 26;\\
&\text{(d)} \quad a = 1972^{1946}, \quad b = 26;\\
&\text{(e)} \quad a = 1946^{1972} + 1972^{1946}, \quad b = 26.
\end{aligned}$$

Odp.: (a) 22; (b) 22; (c) 22; (d) 16; (e) 12.

27. Obliczyć resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b, jeśli

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad a = 5555, \quad b = 191;\\
&\text{(b)} \quad a = 5555^{190}, \quad b = 191;\\
&\text{(c)} \quad a = 5555^{7777}, \quad b = 191;\\
&\text{(d)} \quad a = 7777^{5555}, \quad b = 191;\\
&\text{(e)} \quad a = 5555^{7777} + 7777^{5555}, \quad b = 191.
\end{aligned}$$

Odp.: (a) 16; (b) 1; (c) 40; (d) 185; (e) 34.

28. Obliczyć resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b, jeśli

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & a = 295500^{18}, \quad b = 19; \\
\text{(b)} & a = 295500^{18n}, \quad b = 19, \quad n \in \mathbb{N}; \\
\text{(c)} & a = 295500^{19}, \quad b = 19; \\
\text{(d)} & a = 295500^{18n+1}, \quad b = 19, \quad n \in \mathbb{N}; \\
\text{(e)} & a = 295500^{18n+13}, \quad b = 19, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{array}$$

Odp.: (a) 1; (b) 1; (c) 12; (d) 12; (e) 12.

29. Wyznaczyć ostatnie dwie cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczb 9^9, 9^{10}, 9^{9^9}, 7^9, 7^{9^9}, $7^{9^{9^9}}$.

Odp.: 89, 1, 89, 7, 7, 7.

30. Korzystając z własności kongruencji (m.in. małego twierdzenia Fermata) sprawdzić, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & 31 \mid 2^{5n} - 1, \\
\text{(b)} & 13 \mid 1 + 3^{3n+1} + 9^{3n+1}, \\
\text{(c)} & 13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}.
\end{array}$$

31. Sprawdzić, czy para $(G, *)$ jest grupą, jeśli

(a) $G = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x| \leqslant 1\}, \quad x * y = xy$ (mnożenie liczb x, y), gdy $x, y \in G$;

(b) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\}$,
$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1 + x_1y_2)$, gdy $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$;

(c) $G = \mathbb{R}, \quad a * b = a + b - ab$, gdy $a, b \in G$;

(d) $G = \{a \in \mathbb{R} \colon a \neq 1\}, \quad a * b = a + b - ab$, gdy $a, b \in G$.

Odp.: (a) nie; (b) tak; (c) nie; (d) tak.

32. Sprawdzić, czy w Zadaniu 32 (b) i (d) grupy są abelowe.

33. W grupie $(G, *)$ z Zadania 32 (b) definiujemy dwa podzbiory

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq 0\}, \\ H_2 &= \{(1, y) \colon y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Pokazać, że H_1 i H_2 są podgrupami w tej grupie.

34. Rozważmy zbiór $K = \mathbb{R}^2$ z dwoma działaniami $\oplus$ i $\odot$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ (x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) &= (x_1y_1, x_2y_2), \end{aligned}$$

gdy $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in K$. Sprawdzić, czy $(K, \oplus, \otimes)$ jest (a) pierścieniem; (b) ciałem.

35. Wykazać, że zbiór

$$K = \{c \in \mathbb{R} \colon c = a + b\sqrt{2} \ \wedge \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

z dodawaniem i mnożeniem liczb (rzeczywistych) tworzy ciało. Wyznaczyć elementy odwrotne do liczb (a) $c = 1 + \sqrt{2}$, (b) $c = 1 - \sqrt{2}$, (c) $c = -2 - 3\sqrt{2}$.

Odp. (a) $c^{-1} = -1 + \sqrt{2}$.

36. Niech

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \colon a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sprawdzić, że trójka $(K, +, \cdot)$ jest ciałem, jeśli $+$ i $\cdot$ oznaczają zwykłe dodawanie i mnożenie macierzy.

37. Wyznaczyć podane elementy (liczby) w podanym ciele liczbowym

(a) $-1, -2, -5, -9$ w ciele $\mathbb{Z}_{13}$;

(b) $2^{-1}, 2^{-2}, 7^{-1}, 7^{-5}$ w ciele $\mathbb{Z}_{13}$;

(c) $-1, -10, -15, -88$ w ciele $\mathbb{Z}_{89}$;

(d) $10^{-1}, 10^{-2}, 15^{-1}, 15^{-5}$ w ciele $\mathbb{Z}_{89}$;

(e) $7^{-1}, 7^{-2}, 7^{-8}$ w ciele $\mathbb{Z}_{89}$;

(f) $20^{-1}, 21^{-1}$ w ciele $\mathbb{Z}_{23}$;

(g) $100^{-1}, 499^{-1}$ w ciele $\mathbb{Z}_{5503}$.

W przypadkach trudnych skorzystać m.in. z małego twierdzenia Fermata. Porównać też zadanie następne.

Odp.: (a) $-5 = 8$; (b) $2^{-2} = -3 = 10$; (d) $10^{-2} = -8 = 81$; (e) $7^{-1} = -38 = 51$, $7^{-2} = (7^{-1})^2 = 51^2 = 20$, $7^{-8} = 20^4 = -22 = 67$; (g) $100^{-1} = 1816$, $499^{-1} = -1180 = 4323$.

38. Do wyznaczania elementu odwrotnego a^{-1} w ciele $\mathbb{Z}_n$ można wykorzystywać algorytm Euklidesa. Istotnie, jeśli $a \in \mathbb{Z}_n$ i n jest liczbą pierwszą, to $NWD(a, n) = 1$. Korzystając z (rozszerzonego) algorytmu Euklidesa znajdujemy $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$a \cdot x + n \cdot y = 1 = NWD(a, n).$$

Wówczas mamy $a \cdot x \equiv 1 \mod n$. Zatem x to szukane a^{-1}. Zrobić zadanie poprzednie korzystając z tej procedury.

39. Rozwiązać równania diofantyczne

$$\begin{array}{rl} \text{(a)} & 2x+3y=1; \\ \text{(b)} & 696x-16y=88; \\ \text{(c)} & 999x-49y=5000; \\ \text{(d)} & 903x+731y=2107. \end{array}$$

Odp.: (a) $x = \ -1+3p$, $y=1-2p$; (b) $x=11-2p$, $y=473-87p$; (c) $x=-90000-49p$, $y=-1835000-999p$; (d) $x=-196+17p$, $y=245-21p$, $p\in\mathbb{Z}$.

40. Rozwiązać układy równań diofantycznych

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x+4y=-1; \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x+2y=1; \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} 253x-207y=69, \\ 207x+253y=3013. \end{cases}$$

Odp.: (a) $x=-7$, $y=5$; (b) nie ma rozwiązań; (c) $x=6$, $y=7$.

41. W ciele $\mathbb{Z}_{113}$ znaleźć rozwiązania równań

$$\begin{array}{rl} \text{(a)} & 2x=77; \\ \text{(b)} & 77x=2; \\ \text{(c)} & 10x=112. \end{array}$$

Odp.: (a) $x=95$; (b) $x=69$; (c) $x=79$.

42. Pokazać, że $17|\,(2x+3y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $17|\,(9x+5y)$.