**Tadeusz Inglot**

# RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA
## 2018/2019
*na 30 godzin ćwiczeń*

## LITERATURA PODSTAWOWA

J. Jakubowski, R. Sztencel, Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego, Script, Warszawa 2006.

## LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, cz. I i II, PWN, Warszawa 2019.
2. M. Fisz, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1967.
3. T. Gernstenkorn, T. Śródka, Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1972.
4. T. Inglot, T. Ledwina, Z. Ławniczak, Materiały do ćwiczeń z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1984.
5. W. Kordecki, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Definicje, twierdzenia, wzory, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.
6. W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, cz. I i II, PWN, Warszawa 2019.
7. A. Papoulis, Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 1972.
8. A. Plucińska, E. Pluciński, Probabilistyka, WNT, Warszawa 2018.
9. A. Plucińska, E. Pluciński, Zadania z probabilistyki, PWN, Warszawa 1983.

**Lista zadań nr 1. Przestrzeń probabilistyczna**

1. Niech $A, B, C \subset \Omega$. Za pomocą diagramów Venna udowodnić tożsamości

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Napisać te tożsamości z użyciem operacji dopełnienia. Zauważyć, że dla $A = \Omega$ otrzymujemy prawa de Morgana.

2. Urządzenie składa się z dwóch modułów I typu oraz trzech modułów II typu. Niech $A_i$, $i = 1, 2$, oznacza zdarzenie, że $i$-ty moduł I typu jest sprawny, a $B_j$; $j = 1, 2, 3$, że $j$-ty moduł II typu jest sprawny. Za pomocą $A_i$ oraz $B_j$ zapisać zdarzenie $C$, że urządzenie jest sprawne, jeśli do sprawnego działania potrzeba co najmniej jednego modułu I typu i co najmniej dwóch modułów II typu.

3. Wiadomo, że $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ oraz $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Obliczyć $P(A)$ i $P(A \setminus B)$.

4. Przy dwukrotnym rzucie pewną monetą zaobserwowano, że konfiguracja $OR$ pojawia się w 4/9 przypadków. Czy moneta, którą wykonywano rzuty jest symetryczna? Określić przestrzeń probabilistyczną tak, aby powyższy warunek był spełniony. Czy przestrzeń probabilistyczna jest wyznaczona jednoznacznie?

5. **Nierówność Bonferroniego.** Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n$ zachodzi nierówność

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \geqslant P(A_1) + ... + P(A_n) - (n-1).$$

6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przy grze w brydża gracz otrzyma a) 7 pików, b) 7 kart w jednym kolorze.

7. Dziecko bawi się literami A,A,A,E,K,M,M,T,T,Y. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że przypadkowo ułoży słowo MATEMATYKA.

8. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rzucie pięcioma kostkami wypadnie konfiguracja 1-2-3-4-5 lub 2-3-4-5-6.

9. W pewnym mieście znajdują się trzy hotele. Pewnego dnia przyjechało do tego miasta pięciu podróżnych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy podróżni zgłoszą się do tego samego hotelu? Jakie założenie tutaj czynimy?

10. Rozmieszczamy losowo $n$ kul w $n$ komórkach. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie jedna komórka będzie pusta. Podać wynik dla $n = 5$. **Wsk.** Wprowadzić zdarzenia $A_{ij}$ oznaczające, że $i$-ta komórka będzie pusta, a $j$-ta będzie zawierała dwie kule.

11. Na nieograniczoną szachownicę o boku kwadratu długości $a$ rzucono losowo monetę o promieniu $R$, $2R < a$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że moneta zmieści się całkowicie w jednym z pól szchownicy?

12. (**Zadanie Buffona**) Płaszczyznę podzielono prostymi równoległymi odległymi o $2a$. Na płaszczyznę tę rzucamy w sposób przypadkowy igłę o długości $2l < 2a$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie jedną z prostych?

13. Wybrano losowo trzy liczby z odcinka $[0,1]$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma tych liczb będzie w przedziale $[1, \frac{3}{2}]$?

14. Losujemy liczbę naturalną. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy liczbę podzielną przez dwa lub przez trzy. Wyjaśnić nieprecyzyjność tego pytania i skonstruować dwie różne przestrzenie probabilistyczne dające różne odpowiedzi na postawione pytanie.

### Lista zadań nr 2. Prawdopodobieństwo warunkowe. Niezależność

15. Dla zdarzeń $A$, $B$ mamy: $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$ oraz $P(A \cap B) = r$. Jaki warunek winna spełniać liczba $r$ ? Wyrazić za pomocą $r$ prawdopodobieństwa $P(A \cup B \mid A' \cup B')$ oraz $P(A \setminus B \mid A \cup B)$.

16. Pewna metoda izotopowa wykrywania uszkodzeń daje następujące wyniki:
jeśli urządzenie ma uszkodzenie to metoda ta wykrywa je w 90% przypadków i nie wykrywa w 10% przypadków;
jeśli urządzenie nie ma uszkodzenia to metoda ta daje w 99% przypadków wynik zgodny ze stanem faktycznym i w 1% przypadków informuje o defekcie, którego nie ma.
W pewnej partii urządzeń jest 10% mających defekt. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że urządzenie, które przeszło pozytywnie kontrolę izotopową jest w rzeczywistości uszkodzone.

17. Wśród 5 monet jedna jest z dwoma orłami. Wylosowano jedną monetę i rzucono nią 7 razy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rzucano monetą z dwoma orłami, jeśli otrzymano same orły.

18. Z urny zawierającej 5 kul białych i 5 kul czarnych losujemy bez zwracania 3 kule. Następnie wylosowane kule wrzucamy do urny zawierającej 4 kule białe i 3 czarne, po czym losujemy z niej bez zwracania 2 kule. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie (tj. pięć) wylosowane kule będą białe.

19. W urnie znajduje się $k + 1$ niesymetrycznych monet; $i-$ta moneta pokazuje orła z prawdopodobieństwem $i/k$, $i = 1, 2, ..., k$. Wyciągamy losowo monetę z urny i rzucamy nią. Obliczyć prawdopodobieństwo $p_{kn}$ tego, że $n + 1$ rzut tą monetą da orła, jeśli $n$ pierwszych rzutów dało same orły. Pokazać, że $\lim_{k\to\infty} p_{kn} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

20. Przy masowej produkcji pewnych detali uzyskuje się 20% braków. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród 5 przypadkowo wziętych detali będzie co najmniej jeden brak. Ile detali wystarczy wziąć, aby prawdopodobieństwo tego, że będzie wśród nich co najmniej jeden brak było 0.99 ?

21. Trzech strzelców oddało po jednym strzale. Dwa pociski trafiły w cel. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trafił trzeci strzelec, jeśli prawdopodobieństwa trafienia dla kolejnych strzelców są 0.6, 0.5, 0.4.

22. Zdarzenia $A, B, C$ są niezależne. Wykazać, że zdarzenia $A \cup B$, $C$ są także niezależne. Czy wystarczy warunek $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$? Rozważyć następujący przykład: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $P-$ klasyczne, $A = \{1, 2, 3, 4\}$,$B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 6, 7, 8\}$.

23. Zdarzenia $A$, $B$, $C$ spełniają warunek $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\, P(B \mid C)$. Czy wynika stąd, że zdarzenia $A$, $B$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnić.

## Lista zadań nr 3. Zmienna losowa. Dystrybuanta

24. Niech $\Omega = [0, 2]$, a $P$ prawdopodobieństwo geometryczne na $\Omega$. Zmienna losowa $X$ jest określona wzorem

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in [0, \frac{2}{3}] \\ 3 - 3\omega & \text{dla } \omega \in (\frac{2}{3}, 1] \\ 0 & \text{dla } \omega \in (1, \frac{3}{2}] \\ 2\omega - 3 & \text{dla } \omega \in (\frac{3}{2}, 2] \end{cases}.$$

Znaleźć dystrybuantę zmiennej $X$. Czy zmienna losowa $X$ ma rozkład (absolutnie) ciągły? Jeśli tak, to znaleźć jej gęstość, a jeśli nie to przedstawić dystrybuantę jako kombinację wypukłą dystrybuanty rozkładu dyskretnego i dystrybuanty rozkładu ciągłego. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(X \in [0.8, 1.8])$.

25. Niech $Y$ oznacza moment pojawienia się pierwszego sukcesu w ciągu prób Bernoulliego, w których prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p$. Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej $Y$ i określić typ rozkładu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwszy sukces pojawi się w momencie parzystym.

26. Wygrana $W$ w pewnej loterii przyjmuje wartości $0, 1, 2, 10$ przy czym $P(W = 0) = \frac{2}{5}$, a $P(W = 10)$ jest dziesięć razy mniejsze niż $P(W = 1)$ i cztery razy mniejsze niż $P(W = 2)$. Napisać rozkład zmiennej $W$ i obliczyć prawdopodobieństwo, że $W$ będzie liczbą parzystą. Narysować dystrybuantę zmiennej $W$. Obliczyć $EX$.

27. Znaleźć warunki, jakie powinna spełniać funkcja ciągła na prostej $f(x)$, aby funkcja $F(x) = e^{-f(x)}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej.

28. Dobrać stałe $A$, $B$ tak, aby funkcja $F(x) = A + B \operatorname{arctg} 2x$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej $X$. Znaleźć gęstość tej zmiennej i obliczyć $P(X > 4)$.

29. Tygodniowa sprzedaż benzyny $Y$ (w tys. hl) na pewnej stacji ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} c(x - x^2) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{poza tym} \end{cases}.$$

Obliczyć $c$ oraz $P(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4})$. Znaleźć i wykreślić dystrybuantę. Na wykresie dystrybuanty i gęstości zaznaczyć obliczone uprzednio prawdopodobieństwo. Jaką pojemność winien mieć zbiornik na tej stacji, aby prawdopodobieństwo tego, że zabraknie benzyny przed końcem tygodnia było nie większe niż 0.01 ?

30. Wybrano losowo liczbę z odcinka [0,1]. Niech $V$ oznacza iloraz długości krótszego z otrzymanych dwóch odcinków przez długość dłuższego. Znaleźć i narysować dystrybuantę oraz gęstość zmiennej losowej $V$. Obliczyć jej wartość oczekiwaną i wariancję.

31. Za pomocą całki Riemanna-Stjeltjesa obliczyć $E\,X$ oraz $E\sqrt{X}$ dla zmiennej losowej z zad. 24. Sprawdzić, że

$$EX = \frac{1}{2} \int_0^2 X(\omega) d\omega.$$

32. Zmienna losowa $X$ ma dystrybuantę

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{1}{5}(x+1)^2 & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Znaleźć wartość oczekiwaną, wariancję i medianę tej zmiennej oraz $Ee^X$.

33. Wykazać, że dla dowolnej zmiennej losowej $X$ o skończonym drugim momencie oraz dla dowolnego $c \in R$ prawdziwa jest równość $E(X-c)^2 = \operatorname{Var} X + (EX - c)^2$. Jaka własność wariancji stąd wynika?

## Lista zadań nr 4. Zmienne losowe dyskretne

34. Student zna odpowiedź na 20 spośród 30 pytań. Losuje 5 pytań. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y$ oznaczającej liczbę pytań, na które student udzieli poprawnej odpowiedzi. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że student udzieli poprawnej odpowiedzi na co najmniej 3 pytania. Obliczyć $EY$ i $\operatorname{Var} Y$.

35. Znaleźć najbardziej prawdopodobną liczbę studentów urodzonych w niedzielę w grupie 60 osób. Ile wynosi to prawdopodobieństwo?

36. Prawdopodobieństwo trafienia w '10' wynosi 0.3, a w '9' wynosi 0.7. Niech $S$ oznacza liczbę punktów zdobytych w 10 strzałach. Wyznaczyć rozkład $S$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że strzelec zdobędzie co najmniej 98 punktów.

37. Punkt startuje z początku układu współrzędnych i porusza się po prostej: przesuwa się o jednostkę w prawo z prawdopodobieństwem 0.5 i o jednostkę w lewo z prawdopodobieństwem 0.5. Przyjmując, że poszczególne przesunięcia są niezależne, wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $D_6$ oznaczjącej położenie punktu po 6 przesunięciach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po 10 przesunięciach punkt znajdzie się w przedziale $[-2, 2]$. Zaproponować interpretację fizyczną opisanego zjawiska losowego i otrzymanego wyniku.

38. Aparatura zawiera 3000 jednakowo niezawodnych elementów. Prawdopodobieństwo zepsucia się każdego z nich w okresie czasu $T$ wynosi 0.001. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w okresie $T$ zepsują się co najmniej cztery elementy? Ile elementów zapasowych trzeba przygotować, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 wystarczło ich do wymiany wszystkich zepsutych elementów? Obliczyć $ET$ oraz $\operatorname{Var} T$.

39. Centrala telefoniczna obsługuje 300 abonentów. Każdy abonent, niezależnie od pozostałych abonentów, może z prawdopodobieństwem 0.02 zamówić połączenie zewnętrzne. Jaka powinna być minimalna liczba łączy zewnętrznych do tej centrali, aby z prawdopodobieństwem 0.9 były zrealizowane wszystkie zamówienia abonentów na połączenia zewnętrzne?

40. Prawdopodobieństwo wyprodukowania wybrakowanego wiertła wynosi 0.02. Niech $X$ oznacza liczbę sprawdzonych wierteł wziętych z bieżącej produkcji do momentu znalezienia wiertła wybrakowanego. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba przebadanych wierteł przekroczy 30, oraz prawdopodobieństwo, że liczba przebadanych wierteł będzie podzielna przez 10.

41. Rzucamy dwiema kostkami. Oznaczmy przez $X$ liczbę rzutów pierwszą kostką do chwili otrzymania *szóstki*, a przez $Y$ liczbę rzutów drugą kostką do chwili otrzymania parzystej liczby oczek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wykonamy tę samą liczbę rzutów obiema kostkami. **Wsk.** Zapisać rozważane zdarzenie za pomocą zmiennych losowych $X$ i $Y$. Porównać wartości oczekiwane obu zmiennych.

## Lista zadań nr 5. Zmienne losowe ciągłe. Funkcje zmiennych losowych

42. Czas poprawnej pracy systemu złożonego z jednostki zasadniczej oraz zapasowej ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{poza tym} \end{cases} .$$

Obliczyć $c$, $EX$, prawdopodobieństwo tego, że system będzie pracował poprawnie przez co najmniej 5 jednostek czasu oraz współczynnik skośności. **Wsk.** Skorzystać z faktu, że dla zmiennej losowej $W$ o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda$ mamy $EW^n = n!/\lambda^n,\ n \geqslant 1$.

43. Zmienna losowa $Y$ ma rozkład o gęstości $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{dla } x > 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$. Czy istnieje $EY$? Obliczyć $E\sqrt{Y}\ln Y$.

44. Gęstość zmiennej losowej $X$ ma postać $f(x) = \dfrac{p-1}{(|x|+1)^p}$, gdzie $p > 1$. Dla jakich $p$ istnieje moment rzędu $k$ (i wobec tego wszystkie momenty niższego rzędu) zmiennej $X$, ale nie istnieje moment rzędu $k+1$, $k = 1, 2, \ldots.$ Obliczyć współczynnik spłaszczenia dla $p = 6$.

45. Zmienna losowa $X$ ma gęstość

$$f_k(x) = 2^k \frac{k!}{[1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)]\pi} \frac{1}{(1+x^2)^{k+1}}, \ x \in \mathbb{R},$$

gdzie $k \geqslant 1$. Obliczyć $EX$ oraz $\operatorname{Var} X$. Dla $k = 2$ obliczyć współczynnik skośności i spłaszczenia. Rozkład zmiennej losowej $t_{2k+1} = \sqrt{2k+1}X$ nazywa się rozkładem Studenta z $2k+1$ stopniami swobody. Podać wariancję rozkładu Studenta z 5 stopniami swobody.

46. Wykazać, że zmienna losowa $X$ o rozkładzie wykładniczym ma następującą własność braku pamięci

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t), \quad s, t \geq 0.$$

Podać interpretację tej własności. Wykazać, że jedynym rozkładem ciągłym o tej własności jest rozkład wykładniczy.

47. Czas trwania rozmowy telefonicznej $T$ ma rozkład wykładniczy o średniej $m$ minut. Co $a$ sekund automat zalicza jeden impuls w cenie 30 gr. Niech $K$ oznacza koszt przeprowadzonej rozmowy. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $K$.

48. Promień $R$ kuli jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku [49, 51] mm. Znaleźć gęstość rozkładu masy $M$ kuli, jeśli kulę wykonano z żelaza o gęstości 7.88 g/cm$^3$.

49. Niech $M$ oznacza największą spośród 4 losowo wybranych liczb z odcinka [0,1]. Wykazać, że $P(M \leqslant x) = x^4$ dla $x \in [0,1]$. Wywnioskować stąd, że zmienna $M$ ma gęstość
$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}.$$
Obliczyć $EM$ i Var$M$ oraz współczynnik zmienności. Nazwać ten rozkład.

50. Pomieszczenie jest oświetlone za pomocą dwóch żarówek pracujących w niezależnych obwodach. Czasy życia $X, Y$ żarówek mają rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 0.1$. Niech $T$ oznacza moment przepalenia się ostatniej sprawnej żarówki. Znaleźć gęstość $T$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $T$ przekroczy 20.

## Lista zadań nr 6. Rozkład normalny. Nierówności

51. Dobrać stałą $c$ tak, aby funkcja $f(x) = c\exp\{8x - 2x^2\},\ x \in \mathbb{R}$, była gęstością pewnego rozkładu. Jakiego?

52. Długość (w mm) produkowanych detali ma rozkład normalny z parametrami $m = 9$, $\sigma = 0.03$. Norma przewiduje wyroby o wymiarach $9\pm 0.05$ mm. Jaki procent produkowanych detali nie spełnia wymogów normy? Jakie może być dopuszczalne $\sigma$, aby procent detali nie spełniających wymagań normy nie przekroczył 0.1% ?

53. Przy dużej liczbie pomiarów wykonanych pewnym przyrządem stwierdzono, że 75% błędów nie przekracza co do wartości bezwzględnej 1.25 mm. Obliczyć odchylenie standardowe błędu pomiaru, zakładając, że ma on rozkład normalny o średniej zero.

54. Temperatura $T$ gazu (w ${}^0C$) znajdującego się w zamkniętym naczyniu o stałej objętości $v = 0.01$ m$^3$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym N(20, 0.5). Wyznaczyć rozkład ciśnienia $P$ tego gazu, korzystając z równania Clapeyrona: $\frac{Pv}{t} = nR$, gdzie $R = 8.31$ J/K mol, a $n = 1$ mol gazu oraz $t = T + 273.15$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ciśnienie nie przekroczy $2.45 \cdot 10^5$ Pa.

55. Roczny opad deszczu (w cm) w pewnym regionie ma rozkład normalny $N(100, 10)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w roku bieżącym oraz dwu kolejnych latach roczny opad nie przekroczy 112 cm?

56. Niech $\Phi(x)$ będzie dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Wykazać, że dla $x > 1$ zachodzi nierówność
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x),$$
gdzie $\varphi(x) = \Phi'(x)$ jest gęstością standardowego rozkładu normalnego. Za pomocą tej nierówności oszacować $\Phi(2)$, $\Phi(3)$, $\Phi(5)$ oraz $\Phi(10)$. Porównać oszacowania z wartościami w tablicach.

57. Zmienna losowa $X$ ma rozkład $N(0, \sigma)$. Dla jakich $c$ mamy $Ee^{cX^2} < \infty$. Znaleźć funkcję $M(t) = Ee^{tX},\ t \in \mathbb{R}$ (funkcja tworząca momenty $X$).

58. Niech $Z$ będzie zmienną losową o rozkładzie $N(0, \sigma)$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Y = Z^2$, wyznaczając najpierw jej dystrybuantę. Uzasadnić, że $Y$ ma rozkład gamma. Podać parametry tego rozkładu.

59. Niech $h(x)$ będzie funkcją różniczkowalną ściśle wypukłą na prostej, a $X$ zmienną losową taką, że $EX$ oraz $Eh(X)$ istnieją. Udowodnić nierówność Jensena $Eh(X) \geq h(EX)$. Wykazać, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy $P(X = EX) = 1$.

60. Dodatnia zmienna losowa $X$ ma wartość oczekiwaną 4. Za pomocą nierówności Jensena oszacować $EX^3$, $E \ln X$, $E\frac{2X}{1+X}$. Jeśli ponadto $\operatorname{Var} X = 9$, to czy można poprawić znalezione oszacowania.

61. Rzucamy sto razy kostką do gry. Za pomocą odpowiednich nierówności oszacować prawdopodobieństwo tego, że liczba szóstek wyniesie co najmniej 10 oraz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek znajdzie się w przedziale od 300 do 400.

62. 64% studentów zdaje egzaminy w pierwszym terminie. Za pomocą odpowiedniej nierówności oszacować prawdopodobieństwo tego, że w grupie 5000 studentów w pierwszym terminie zda od 3100 do 3250 studentów.

63. 4% osób ma krew typu AB $\text{Rh}^-$. Za pomocą odpowiedniej nierówności oszacować prawdopodobieństwo, że w grupie 150 osób będzie co najmniej 10 osób z tą grupą krwi.

64. Za pomocą generatora liczb pseudolosowych w kalkulatorze wygenerować po 10 obserwacji zmiennych losowych z zad. 50 oraz zad. 55 i obliczyć częstości zdarzeń określonych w tych zadaniach.

## Lista zadań nr 7. Zmienne losowe dwuwymiarowe

65. Dobrać stałą $c$ tak, aby funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \textit{dla } \ 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \textit{poza tym}, \end{cases}$$

była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej $(X,Y)$. Obliczyć $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$ oraz współczynnik korelacji zmiennych $X, Y$. Znaleźć gęstość $X$ oraz zmiennej losowej $V = XY$. Uzasadnić, że $X, Y$ są zależne.

66. Dwuwymiarowa dyskretna zmienna losowa ma rozkład określony następująco: $P(X = 1, Y = 1) = 0.2$, $P(X = 1, Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2, Y = 2) = 0.1$, $P(X = 3, Y = 1) = 0.4$. Zapisać ten rozkład w tabeli. Wyznaczyć $P(XY < 4)$, współczynnik korelacji zmiennych $X, Y$, $\operatorname{Var}(2X + Y)$ oraz rozstrzygnąć kwestię niezależności zmiennych $X, Y$.

67. Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X,Y)$ ma gęstość $f(x,y) = c(x^2 + \frac{c}{6}xy)$ dla $0 < x < 1$ i $0 < y < 2$ oraz 0 poza tym. Obliczyć $c$, $P(X > Y)$, macierz kowariancji oraz $E(Y|X = x)$. Znaleźć gęstość sumy $X + Y$.

68. Wiadomo, że $EX = 0$, $EY = -1$, $\operatorname{Var} X = 2$, $\operatorname{Var} Y = 3$, $\rho_{X,Y} = -\frac{2}{3}$. Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych $U = X + Y, V = 2X - Y + 3$. Powtórzyć to samo obliczenie przy założeniu, że $X, Y$ są niezależne.

69. Niech $X, Y$ będą współrzędnymi losowo wybranego punktu z kwadratu $K = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$. Napisać gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej $(X,Y)$. Uzasadnić, że współczynnik korelacji tych zmiennych jest równy zero, ale zmienne są zależne.

70. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma gęstość $f(x,y) = c\exp\{-x^2 + 2xy - 3y^2\}$. Obliczyć $c$ oraz współczynnik korelacji zmiennych $X, Y$. Znaleźć rozkład sumy $X + Y$.

71. Średnia ocen z egzaminów w czasie studiów $E$ ma rozkład $N(3.6, 0.3)$, a średnia ocen z zaliczeń $Z$ ma rozkład $N(4.2, 0.35)$. Współczynnik korelacji tych zmiennych wynosi $\rho_{EZ} = \frac{2}{3}$. Przyjmując, że łączny rozkład zmiennych $E, Z$ jest normalny znaleźć rozkład średniej oceny ze studiów obliczanej ze wzoru $S = \frac{2E+Z}{3}$. Obliczyć $P(S \geq 4)$.

72. Długość zapałek ma rozkład normalny o średniej 43 mm z odchyleniem standardowym 3 mm, a długość pudełek ma także rozkład normalny z odchyleniem standardowym 4 mm. Wyznaczyć nominalną długość pudełek, przy której prawdopodobieństwo tego, że zapałka nie zmieści się w pudełku było mniejsze niż 0.002. Przyjąć, że długości zapałek i pudełek są niezależnymi zmiennymi losowymi.

73. Wzrost (w cm) i waga (w kg) mężczyzn mają łączny rozkład normalny z parametrami $m_1 = 175,\ m_2 = 74,\ \sigma_1^2 = 64,\ \sigma_2^2 = 25,\ \rho = 0.8$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przypadkowo wybrany mężczyzna waży więcej niż 80 kg, jeśli wiadomo, że ma wzrost 171 cm. Ile wynosi to prawdopodobieństwo bez uwzględnienia informacji o wzroście?

## Lista zadań nr 8. Funkcje charakterystyczne. Twierdzenia graniczne. Centralne twierdzenie graniczne

74. Obliczyć gęstość drugiej i trzeciej potęgi splotowej rozkładu jednostajnego na odcinku [0,1].

75. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu Laplace'a o gęstości $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$. Korzystając z tego wyniku znaleźć funkcję charakterystyczną rozkładu Cauchy'ego o gęstości $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$.

76. Znaleźć funkcję charakterystyczną rozkładu dwupunktowego $P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p$. Przedstawiając zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego w postaci sumy niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym, wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu Bernoulliego.

77. Stosując metodę funkcji charakterystycznych wykazać, że splot rozkładu gamma z parametrami $b,\ p_1$ z rozkładem gamma z parametrami $b,\ p_2$ jest rozkładem gamma z parametrami $b.\ p_1 + p_2$.

78. Zmienna losowa $X$ ma funkcję charakterystyczną $\phi(t)$. Znaleźć funkcje charakterystyczne zmiennych $-X$ oraz $X_1 - X_2$, gdzie $X_1, X_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co $X$.

79. Niech $X_n$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładach Poissona z parametrami odpowiednio $\lambda_n$, gdzie $\lambda_n \to \infty$. Za pomocą funkcji charakterystycznych wykazać, że ciąg $X_n$ jest asymptotycznie normalny $N(\lambda_n, \sqrt{\lambda_n})$.

80. Liczba zgłoszeń klientów do systemu obsługi w ciągu godziny ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 120$. Korzystając z poprzedniego zadania, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w najbliższej godzinie będzie co najwyżej 140 zgłoszeń klientów.

81. Rozwiązać zadania 61 oraz 62, korzystając z centralnego twierdzenia granicznego.

82. Komputer dodaje 1200 liczb rzeczywistych, z których każdą zaokrągla do najbliższej liczby całkowitej. Zakłada się, że błędy zaokrągleń są wzajemnie niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że błąd bezwzględny całego obliczenia nie przekroczy 10.

83. W Towarzystwie Ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 10000 samochodów. Każdy z właścicieli opłaca roczną składkę 200 zł za samochód. Średnio dla 11 samochodów na 1000 jest zgłoszona szkoda w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu Towarzystwo wypłaca 10 tys. zł. Koszty prowadzenia działalności są stałe i wynoszą rocznie 600 tys. zł. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po roku działalności: a) Towarzystwo nie poniesie strat; b) zysk Towarzystwa przekroczy 200 tys. zł ?

84. Czas pracy lampy pewnego typu ma rozkład wykładniczy o średniej 900 godzin. Ile lamp trzeba mieć w zapasie, aby wystarczyło ich na 4 lata nieprzerwanej pracy z prawdopodobieństwem 0.99 ? Przyjmujemy, że spalona lampa jest natychmiast wymieniana na nową.

85. Zmienne losowe niezależne $X_1, X_2, ...$ mają rozkład wykładniczy z parametrami odpowiednio $1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, ....$ Czy dla ciągu $(X_n)$ zachodzi prawo wielkich liczb? Czy ciąg średnich arytmetycznych $\dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$ jest zbieżny? Jeśli tak, to do jakiej granicy.

86. Zmienne losowe niezależne $X_1, X_2, ...$ mają rozkłady: a) $P(X_n = \pm n) = n^{-\alpha}$, $P(X_n = 0) = 1 - 2n^{-\alpha}$, $n = 1, 2, ...$; b) $P(X_n = \pm n^\alpha) = 1/(2n)$, $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, ...$ Sprawdzić dla jakich $\alpha$ zachodzi prawo wielkich liczb dla tak określonych ciągów.

87. Niech $Z_1, Z_2, ...$ ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie standardowym normalnym. Znaleźć granice (według prawdopodobieństwa lub według rozkładu) ciągów

$$\frac{(Z_1 + Z_2 + ... + Z_n)^2}{Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2}, \qquad \frac{Z_1^4 + Z_2^4 + ... + Z_n^4}{Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_{2n}^2}.$$

88. (**Obliczanie całki metodą Monte Carlo**). Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$ przyjmującą wartości w przedziale $[0, M]$, czyli $0 \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant M$ oraz $I = \int_a^b f(x)dx$. Niech $U_1, U_2, ...$ będzie ciągiem liczb losowych. Wtedy ciąg punktów $Q_i(a + (b - a)U_{2i-1}, M\, U_{2i})$ jest ciągiem punktów losowych z kwadratu $[a, b] \times [0, M]$. Oznaczmy przez $I_n$ liczbę tych punktów $Q_i, i \leqslant n$, które leżą pod wykresem funkcji $f(x)$. Z prawa wielkich liczb wywnioskować, że $I_n/n \xrightarrow{P} I$. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, znaleźć minimalną liczbę $n$ dla której

$$P\left(\left|\frac{I_n}{n} - I\right| > \delta\right) \leqslant \alpha$$

dla dowolnych małych liczb $\delta$ i $\alpha$.

89. Rozważmy całki

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \qquad J = \int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Wiadomo, że $J = (3\ln(2 + \sqrt{5}) + 10\sqrt{5})/8 \approx 3.336$. Natomiast, rozwijając funkcję podcałkową w $I$ w szereg potęgowy, obliczyć jej wartość z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

Wybrać odpowiednie wartości stałej $M$, o której mowa w zadaniu poprzednim, dla obu całek. Za pomocą generatora liczb pseudolosowych w kalkulatorze (lub tablic liczb losowych), wylosować 20 punktów z odpowiedniego prostokąta i znaleźć przybliżone wartości obu całek. Porównać otrzymane częstości z wartościami całek. Sporządzić rysunek. Dla obu całek obliczyć minimalne $n$, dla którego otrzymamy przybliżone wartości całek z dokładnością do 0.01 z prawdopodobieństwem co najmniej 0.95.