Adam Bobrowski
Katedra Matematyki
Wydziału Elektrotechniki i Informatyki
Politechniki Lubelskiej

1 lipca 2024

Opinia o pracy doktorskiej
pana magistra Damiana Fafuły

1 Wstęp

Praca doktorska pana Damiana Fafuły bardzo ładnie wpisuje się w nowoczesną, zaawansowaną teorię procesów stochastycznych, która od szeregu lat rozwijana jest w ośrodku wrocławskim, na tutejszej politechnice. Zainteresowania naukowe kandydata kształtował niewątpliwie prof. dr hab. Krzysztof Bogdan, który pełnił rolę promotora jego pracy magisterskiej. Praca doktorska, napisana pod kierunkiem dr hab. inż. Pawła Sztonyka stanowi ich rozwinięcie i kontynuację.

Autor nadał jej dość ogólny tytuł *Boundary problems for nonlocal operators*, sugerujący szeroki zakres badań, ale w istocie koncentruje się w niej rozsądnie na odpowiedniku zagadnienia Neumanna dla ułamkowego laplasjanu

$$-(-\Delta)^{\alpha/2}, \quad \alpha \in (0,2) \qquad \text{w obszarze} \qquad D := (0,\infty).$$

Podstawowym obiektem jego analizy jest proces stochastyczny, przy pomocy którego można podać probabilistyczne wzory na rozwiązania ww. problemu, a który tym samym odgrywa analogiczną rolę jak ruch Browna dla klasycznego zagadnienia Neumanna.

W dotychczasowej literaturze nie ma zgody co do tego, jak proces ten się zachowuje. Ze względu na wybór tytułowego operatora nielokalnego jasne jest, że w samym D musi on być tożsamy z procesem α-stabilnym o parametrze $\alpha \in (0,2)$, a rozbieżności dotyczą tylko jego postaci poza tym obszarem. Dodać należy, że z uwagi na naturę rozważanego operatora „brzegiem" dla D jest cała półprosta

$$D' := (-\infty, 0)$$

i to tu stosowne losowe reguły zachowania należy opisać.

Autorzy pierwszej cytowanej w rozprawie publikacji — Dipierro, Ros-Oton i Valdinoci — uważali z grubsza, że wyszedłszy z D proces przez mgnienie oka przebywa w jednym z punktów $x \in D'$ ale natychmiast skacze z powrotem (przypomina to zachowanie ciągłych łańcuchów Markowa w tak zwanych *instantaneous states*) a jego rozkład po skoku zależy od x. Vondraček uzasadnił jednak później, że jest inaczej: w każdym punkcie D' proces zatrzymuje się na czas wykładniczy z parametrem jeden i dopiero potem wraca do D. Pan magister Fafuła przedstawia nieco odmienny obraz: w punkcie $x \in D'$ zatrzymujemy się na czas wykładniczy z parametrem $\nu(x, D)$, przy czym $\nu(x, D)$ jest pewną kluczową charakterystyką procesu α-stabilnego.

W rozprawie nie znalazłem wyjaśnienia jak to jest możliwe, że dwa ostatnie, różne przecież, opisy są prawdziwe jednocześnie (bo to, że nieprawdziwy jest pierwszy wydaje się jasne). Zapewne klucz leży w tym, że choć Vondraček i Fafuła otrzymują ostatecznie tę samą formę kwadratową, rozważają ją w innych przestrzeniach Hilberta. Zgaduję, że sprawę załatwia jakiś izomorfizm wspomnianych przestrzeni, który na poziomie procesów sprowadza się do oczywistej zmiany czasu.

Natomiast przejście od procesu opisanego przez kandydata do stopnia doktora do tego wymyślonego przez Dipierro, Ros-Otona i Valdinociego zapewne można byłoby otrzymać w następujący, intuicyjny sposób. Zamiast wymagać by parametr czasu oczekiwania na powrót z punktu $x \in D'$ wynosił $\nu(x, D)$, zażądajmy, by był on równy $\kappa\nu(x, D)$ dla $\kappa \gg 1$ i przejdźmy z $\kappa \to \infty$. Ciekawy jestem, czy przejście to można uzasadnić formalnie, na przykład na poziomie form kwadratowych albo — jeszcze lepiej — generatorów czy rezolwent. Przy okazji można byłoby bardziej namacalnie zobaczyć analityczne różnice między opisanymi tu obiektami.

2 Szczegóły

Rozprawa została dobrze przemyślana i posiada klarowną strukturę. Po wstępie (w wersji polskiej i angielskiej), który jasno przedstawia jej cel, znajdujemy w niej rozdział drugi zawierający pojęcia podstawowe i zebrane fakty z teorii procesów α-stabilnych, na których opiera się dalsza analiza.

Elegancki rozdział trzeci zaczyna się od konstrukcji (w podrozdziale 3.1) kluczowego dla całości rozważań, omówionego wyżej, procesu, jako konkatenacji (w sensie niedawnej pracy Wernera) ze samym sobą pewnego procesu prostszego, fellerowskiego, ale niezachowawczego. Ten ostatni na D zachowuje się jak proces α-stabilny, ale kończy się (nie jest zdefiniowany) gdy α-stabilny wyjdzie z D, natomiast w punkcie $x \in D'$ czeka przez czas wykładniczy z parametrem $\nu(x, D)$, a potem także jest niezdefiniowany. Co ciekawe, ze względu na bardzo specyficzny dobór czasów wykładniczych i miary położenia tuż po skoku, funkcję prawdopodobieństw przejścia procesu skonkatenowanego można wyrazić zgrabnie jako sumę szeregu typu Dysona–Phillipsa (mówi o tym podrozdział 3.2). Ostatnia część rozdziału trzeciego poświęcona jest funkcjom ekscesywnym (nadmiernym) dla skonstruowanego procesu, których wagę doceniamy nieco później.

Rozdział czwarty zawiera istotne informacje dotyczące długości życia zdefiniowanego uprzednio procesu oraz jego zachowania granicznego. Autor analizuje najpierw rozkład jego położeń w momencie pierwszego i kolejnych powrotów do D (podrozdziały 4.1 i 4.2). To pozwala mu później na wgląd (w podrozdziale

4.3) w rozkład czasów ww. powrotów. Główne twierdzenie tej części pracy, zawarte w podrozdziale 4.4, mówi o tym, że gdy parametr α jest „mały", to znaczy dla $\alpha \in (0,1)$ (jest to przypadek, gdy proces α-stabilny wykonuje stosunkowo duże skoki), proces skontatenowany jest zdefiniowany dla wszystkich $t \geq 0$, a jego wartość bezwzględna dąży wraz z czasem do nieskończoności. Dla $\alpha \in (1,2)$ obserwujemy zachowanie zgoła odmienne: po pewnym (losowym) czasie R_∞ proces przestaje być dobrze zdefiniowany, a gdy $t \to R_\infty$ trajektorie zdążają do 0. W przypadku granicznym ($\alpha = 1$) proces jest zdefiniowany dla wszystkich czasów dodatnich, ale dodatnie części jego trajektorii stale błąkają się między zerem a nieskończonością. Co ciekawe, dopiero ta wiedza pozwala stwierdzić fellerowską naturę skonkatenowanego procesu dla $\alpha \in (1,2)$ (pozostałe przypadki pozostają nierozstrzygnięte).

W otwierającym część kolejną podrozdziale 5.1 znajdujemy szereg skrupulatnie przeliczanych oszacowań całek, w których występują prawdopodobieństwa przejścia rozważanych procesów, a w 5.2 całek tego typu granice. Pozwalają one autorowi odkryć, jako główny wynik tej części, postać punktowego odpowiednika operatora infinitezymalnego procesu skonkatenowanego na funkcjach ekscesywnych, o których pierwsze informacje zawarte były już na końcu rozdziału trzeciego.

Rozdział szósty poświęcony został charakteryzacji formy kwadratowej związanej z ww. procesem i w szczególności opisowi jej dziedziny; główne twierdzenie autor poprzedza bardzo zgrabną nierównością typu Hardy'ego. Wreszcie, w rozdziale siódmym, stanowiącym zwieńczenie całej analizy, znajdujemy twierdzenie mówiące, iż (podobnie jak w przypadku klasycznym, to znaczy przypadku ruchu Browna) operator Greena dla omawianego procesu przekształca warunek brzegowy w rozwiązanie zagadnienie Neumanna.

3 Język, ogólne wrażenie, podsumowanie

Rozprawa została napisana w komunikatywnym języku angielskim. Czyta się ją dobrze, choć tu i ówdzie przekonujemy się, że autor myśli po polsku i przenosi typowe konstrukcje z mowy rodzimej na obcą (pisze na przykład *we make a construction* zamiast *we construct*; jak my wszyscy ma też problemy z rodzajnikami[1]). Kandydat do stopnia doktora radzi więc sobie z językiem kongresowym zupełnie nieźle, w stopniu zdecydowanie wystarczającym do opisu interesującej go matematycznej rzeczywistości.

Bardziej niepokoi to, że pewną lingwistyczną nieporadnością rażą te części pracy, które zredagowano po polsku. Nie ma co tu rozpisywać się o szczegółach, ale muszę stwierdzić, że pisanie o procesie, iż jest „czysto-skokowy" to zbrodnia na i tak już maltretowanym na różne sposoby języku Kochanowskiego, Skargi, Norwida, Parnickiego, Gombrowicza, Miłosza, Kuratowskiego, Aleksiewicza, Maurina, Engelkinga i Steinhausa. Bo autor chyba nie ma na myśli, że proces

[1] Nie odróżnia także *it* od *this*. Pisze ponadto *afterwards* w kontekstach, w których powinien raczej użyć *next*, a zamiast *we present basic facts* — *we propose basic facts*. Wypisywanie wszystkich niedociągnięć mija się celem.

ten jest po części czysty, a po części skokowy?! Mocno wątpliwy, niezgodny ze słownikami, jest też sens, w jakim p. mgr Fafuła używa słowa *postulować*.

Autor naturalnie nie ustrzegł się też różnych niedociągnięć pozalingwistycznych. Na przykład na stronie 17. pisze, że ciągłość funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ implikuje istnienie, dla każdego $\epsilon > 0$, takiego $\delta > 0$, że $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ o ile tylko $|x - y| < \delta$. Oczywiście się myli, bo wypisany wyżej warunek charakteryzuje funkcje *jednostajnie* ciągłe, a nie ciągłe. Na szczęście nie odkrywam tu błędu w rozumowaniu, a jedynie przypadek braku precyzji: z kontekstu wiemy, że funkcje rozważane przez kandydata są nie tylko ciągłe, ale też znikają w zerze i nieskończoności, co sprawia, że rzeczywiście każda z nich jest jednostajnie ciągła.

Wspomniane wyżej niedociągnięcia nie zmieniają faktu, że rozprawa wygląda dość porządnie, a przede wszystkim jest ciekawa. Tematyka wybrana przez kandydata do stopnia doktora to teren ciągle niezbadany, niemal dziewiczy, na którym na odkrywców czeka bogactwo matematycznych wyników i powiązań między nimi. Ja na przykład chętnie bym się dowiedział, jak wygląda dziedzina generatora (fellerowskiej, jak wiemy, przynajmniej w przypadku $\alpha \in (1, 2)$) półgrupy w $C_0(D' \cup D)$ opisującej proces skonkatenowany, bo można oczekiwać, że w dziedzinie tej, być może w formie „warunku brzegowego", jakoś elegancko zakodowana jest informacja o zachowaniu procesu w D'.

Intryguje mnie też pytanie, czy fakt, że dla $\alpha \in (0, 1)$ proces skonkatenowany ma nieskończony, a dla $\alpha \in (1, 2)$ skończony, czas życia, wyczytać można z samego (zależnego od α) rozkładu czasu wyjścia procesu α-stabilnego na D, lub jego kombinacji z rozkładem czasu wyjścia niezachowawczego procesu na D' rozważanego na początku rozdziału trzeciego. Jeśli bowiem jest to możliwe, to być może zamiast podejścia do konkatenacji zaproponowanego przez Wernera można zastosować nieco inne, prostsze, szybciej prowadzące do stwierdzenia, że skonkatenowany proces ma własność Fellera.

To co piszę wyżej, to oczywiście nie są w żadnej mierze zadania dla doktoranta, a tylko świadectwo tego, że temat wybrał on sobie frapujący, a przy tym wymagający specjalistycznej wiedzy i doświadczenia (którymi oczywiście w jakiejś mierze obdarzali go wprowadzający go w tę tematykę starsi naukowcy, wymienieni wyżej prof. prof. K. Bogdan i P. Sztonyk). Nie mam najmniejszych wątpliwości, że p. mgr Damian Fafuła zapracował sobie na stopień doktora nauk matematycznych. Dobre o jego osiągnięciach zdanie, które wyrobiłem sobie w trakcie lektury jego rozprawy potwierdziło się w pełni, gdy przyjechał on do Lublina i osobiście opowiedział o swoich wynikach na naszym miniseminarium. Zobaczyłem w nim młodego, uzdolnionego matematyka, który pod ochronnym parasolem starszych naukowców nie tylko poznał interesujące go obszerne fragmenty teorii procesów stochastycznych, ale i włożył w nią swą pierwszą, niebanalną cząstkę. Szkoda, że jego rozprawa nie została dotychczas opublikowana, bo zgodnie z przesłanymi mi przepisami, wyklucza to jej wyróżnienie, a moim zdaniem wyniki w niej zawarte na nie zasługują.

A. Bobrowski

Adam Bobrowski