



UNIwersytet  
Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki  
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

Warszawa, 2 grudnia 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. inż. Michała Gutowskiego pt. „Hardy–Stein identity and Littlewood–Paley theory for non-local operators”

Niniejsza recenzja dotyczy drugiej wersji rozprawy doktorskiej, przygotowanej przez mgr. inż. Michała Gutowskiego pod opieką dr. hab. inż. Mateusza Kwaśnickiego. Jest to druga, listopadowa wersja pracy, w odniesieniu do której autor dokonał poprawek po uwagach zawartych w pierwszej recenzji. Wersja czerwcowa nie zawierała wymaganych ustawą streszczeń w języku polskim i angielskim.

Tematyka rozprawy dotyczy teorii tożsamości Hardy’ego–Steina oraz funkcji kwadratowych Littlewooda–Paley’a w kontekście operatorów nielokalnych. Autor uogólnia wyniki znane dla operatorów Lévy’ego i form Dirichleta na zagadnienia ze wzrostem potęgowym. Rozprawa jest podzielona na osiem rozdziałów, z których każdy skupia się na innym aspekcie problematyki. Całość pracy charakteryzuje się spójnością i logiczną strukturą.

Głównymi obiektami tej rozprawy są formy Dirichleta  $\mathcal{E}$  oraz  $p$ -formy  $\mathcal{E}_p$ , zwane też formami Sobolewa–Bregmana, które są konstruowane na podstawie form aproksymacyjnych  $\mathcal{E}^{(t)}$  poprzez  $\mathcal{E}_p[u] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{E}^{(t)}(u, u^{(p-1)})$ , gdzie  $\mathcal{E}^{(t)}(u, P_t v) = \frac{1}{t} \langle u - P_t u, v \rangle$ , a  $P_t$  reprezentuje półgrupę związaną z formą Dirichleta  $\mathcal{E}$ .

Najważniejszymi osiągnięciami pracy jest uogólnienie wzoru Beurlinga–Deny’ego dla form Sobolewa–Bregmana ( $p$ -form) oraz opracowanie spolaryzowanej wersji tożsamości Hardy’ego–Steina. Wzór Beurlinga–Deny’ego jest zawarty w Twierdzeniach 4.6, 6.2 oraz 7.1, które charakteryzują dziedzinę  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_p)$  za pomocą dziedziny  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ , dostarczają precyzyjnych oszacowań postaci  $\mathcal{E}_p[u] \simeq_p \mathcal{E}[|u|^{p/2} \text{sgn}(u)]$ , oraz pokazują rozkład  $p$ -formy na składniki: silnie lokalny, skokowy i związany z zabijaniem. Wynik ten jest istotny, ponieważ pozwala na zastosowanie klasycznych narzędzi analizy form Dirichleta w znacznie szerszym kontekście, uwzględniającym

przestrzenie  $L^p$ , gdzie  $1 < p < \infty$ . Drugim istotnym wynikiem jest wyprowadzenie nowej, ogólnej wersji tożsamości Hardy'ego–Steina, patrz Twierdzenie 3.2 oraz Wniosek 7.4. Tożsamość ta została wyrażona przy użyciu naturalnej dla badania zagadnień z potęgowym wzrostem dywergencji Bregmana. Dalsze zastosowania tego wyniku obejmują zarówno operator Laplace'a, jak i szeroką klasę operatorów nielokalnych, w tym operatorów Lévy'ego i form czysto skokowych. Kolejnym znaczącym osiągnięciem autora jest opracowanie spolaryzowanej wersji tożsamości Hardy'ego–Steina z Twierdzenia 5.6. Została ona wyrażona przy użyciu spolaryzowanej wersji dywergencji Bregmana  $J_p$ . Ten wynik ma znaczenie dla badania operatorów czysto skokowych, w szczególności w kontekście ich zastosowań w teorii procesów Markowa.

Rozdział 8 poświęcony jest zastosowaniom tożsamości Hardy'ego–Steina w teorii Littlewooda–Paley. Autor definiuje funkcje kwadratowe związane z operatorami nielokalnymi oraz ich formami Dirichleta. Klasyczne definicje funkcji kwadratowych (dla operatorów lokalnych) są rozszerzane na przestrzenie Sobolewa–Bregmana i operatory skokowe. Głównym wynikiem jest wyprowadzenie oszacowań na normę  $L^p$  funkcji kwadratowych Littlewooda–Paley, patrz Twierdzenie 8.1. Warte zauważenia jest wprowadzenie odpowiedniości Revuza jako narzędzia do analizy procesów skokowych i funkcji kwadratowych. Autor dodatkowo wskazuje nienaprawialny błąd w artykule Li i Wanga identyfikując operatory, dla których klasyczne oszacowania nie obowiązują. Dowodzi to dokładności i krytycznego podejścia do literatury przedmiotu. Dzięki temu rozprawa nie tylko wprowadza nowe wyniki, ale również poddaje rewizji wcześniejsze twierdzenia. Ciekawym wynikiem jest również propozycja alternatywnych definicji funkcji kwadratowych.

Tematyka rozprawy nie należy do ścisłego centrum moich zainteresowań naukowych, jednak nie mam wątpliwości, że prezentuje wysoki poziom naukowy i wnosi nowe wyniki do teorii operatorów nielokalnych. Dowody zawarte w rozprawie wykorzystują zaawansowane narzędzia z zakresu analizy funkcjonalnej i teorii prawdopodobieństwa, co wymagało od autora gruntownego zapoznania się z szeroką dziedziną wiedzy. Wyniki i stosowane metody są różnorodne, terminologia matematyczna jest używana precyzyjnie, a przedstawienie wyników jest staranne (pozostały nieliczne nieścisłości matematyczne, jak brak wypisanych założeń na  $p$  w Twierdzeniu 4.6). Dowody są przedstawione w sposób kompletny i dokładny.

Rozprawa doktorska opiera się na jednym artykule jednoautorskim oraz dwóch nieopublikowanych jeszcze pracach współautorskich, co wskazuje na szeroki za-

kres prowadzonych badań. Zgodnie z oświadczeniem kandydata, jego wkład w prace współautorskie był znaczący i obejmował kluczowe aspekty merytoryczne oraz opracowanie wyników. Wskazana w pierwszej recenzji rażąca niedbalość edycyjna została poprawiona, a większość błędów typograficznych, które występowały w pierwszej wersji pracy, została usunięta.

Rozprawa mgr. Michała Gutowskiego spełnia wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskich w dyscyplinie matematyka. Osiągnięte wyniki mają istotne znaczenie naukowe, a ich prezentacja świadczy o głębokiej znajomości tematyki i umiejętności prowadzenia badań na wysokim poziomie. Rekomenduję przyznanie autorowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Z poważaniem



dr hab. Iwona Chlebicka, prof. ucz.  
Uniwersytet Warszawski



UNIwersytet  
Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki  
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

Warszawa, 5 sierpnia 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. inż. Michała Gutowskiego pt. „Hardy–Stein identity and Littlewood–Paley theory for non-local operators”

Rozprawa podejmuje aktualną tematykę zagadnień nielokalnych, pokazując naturalne odpowiedniki klasycznych własności. Zakres badań jest ciekawy, a przedstawiane wyniki istotne, jednak rozprawa nie może zostać pozytywnie oceniona, gdyż nie spełnia warunków formalnych i dlatego wstrzymuję się na razie z napisaniem szczegółowej recenzji.

Rozprawa nie zawiera żadnego streszczenia, a w myśl art. 187 ust. 4. *Ustawy o Szkolnictwie Wyższym* powinny być dołączone streszczenia zarówno w języku polskim, jak i angielskim. Bez uzupełnienia tego braku rozprawa nie może być dopuszczona do obrony.

Niestety autor nie opisał również swojego wkładu w powstanie prac współautorских, na podstawie których napisane są fragmenty rozprawy, co istotnie utrudnia ocenę jego dokonań. Proszę o dołączenie oświadczeń kandydata dotyczących jego wkładu w poszczególne części pracy. Wyczerpywałoby to oczekiwanie ustawodawcy z art. 187 ust. 3 dotyczącego określenia samodzielnej i wyodrębnionej części prac zbiorowych.

Dodatkowo chciałabym zwrócić uwagę na jeszcze jeden mankament rozprawy. Jej czytanie jest utrudnione przez niezwykle liczne literówki (capacity, strees, partucular, exacly, ulitize, calculs, contrations...), problemy z podstawową interpunkcją (w tym zdania, które nie kończą się kropkami), powtórzenia (and and), niezdefiniowane obiekty, nie wspominając o kwestii rodzajników. Liczba niedociągnięć jest przytłaczająca. Problem dotyczy również literówek matematycznych (np. str. 23, przy wspomnieniu pracy [BGM94]) i referencji (np. str. 23 jedno [BGPPR20] powinno być [BGPPR23]). Lepiej byłoby, aby główne obiekty nie miały nakładającej się notacji;  $\mathcal{E}^{(c)}$  to nie jest  $\mathcal{E}^{(t)}$  dla  $t = c$ . W niektórych miejscach trudno odnieść wrażenie,

że czyta się ostateczną wersję pracy. Na przykład w akapicie wprowadzającym do Appendixu A znajduje się nie tylko słowo „derivatives”, ale też komentarz po polsku „Czy można tak to nazwać, skoro jest w Appendixie?”. Literatura mogłaby być uporządkowana całkiem alfabetycznie. Nieznaczące rozszerzenie rysu tła historycznego mogłoby nie tylko wzbogacić merytoryczną zawartość rozprawy, ale także ułatwić zrozumienie genezy oraz rozwoju przedstawianych zagadnień. Sugeruję szczegółowe przejrzanie tekstu, poprawienie błędów językowych i technicznych.

Podsumowując, uchybienia formalne są istotne i bez ich poprawy nie mogę napisać pozytywnej recenzji, mimo że rozprawa przedstawia interesujące wyniki badań. Wnoszę o zwrócenie pracy do poprawek zgodnie z par. 9 pkt 1 Regulaminu nadawania stopni naukowych na Politechnice Wrocławskiej. Proszę o uzupełnienie streszczeń i oświadczeń oraz mocno sugeruję redakcję tekstu.

Z poważaniem



dr hab. Iwona Chlebicka, prof. ucz.

Uniwersytet Warszawski