Wrocław, 28.10.2024

prof. dr hab. inż. Błażej Wróbel
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
&
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Michała Gutowskiego pod tytułem "Hardy-Stein identity and Littlewood-Paley theory for nonlocal operators"

1 Informacje wstępne

Rozprawa doktorska mgr. inż. Michała Gutowskiego liczy 113 stron, jest więc obszerna jak na standardy matematyczne. Składa się z 8 rozdziałów oraz dwóch dodatków (Appendix). Pierwsze dwa rozdziały stanowią wstęp i wprowadzenie definicji. W kolejnych 6 rozdziałach zaprezentowane są podstawowe wyniki rozprawy. Wyniki zawarte w rozdziałach 3-7 są oparte na trzech pracach matematycznych

G1 Krzysztof Bogdan, Michał Gutowski, Katarzyna Pietruska-Pałuba. *Polarized Hardy–Stein identity*, wysłane w 2023

G2 Michał Gutowski and Mateusz Kwaśnicki. *Beurling–Deny formula for Sobolev–Bregman forms,* wysłane w 2023.

G3 Michał Gutowski. *Hardy–Stein identity for pure-jump Dirichlet forms.*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 71(1):65–84, 2023.

Jak widać, jedna z powyższych prac [G3] została już opublikowana, zaś pozostałe są w recenzji. Dwie z prac wchodzący w skład doktoratu są współautorskie - [G1] i [G2], natomiast jedna samodzielna - [G3]. Samodzielną pracą doktoranta jest też większość rozdziału 8., jednak wyniki tam zawarte nie zostały jeszcze wysłane do publikacji.

2 Omówienie wyników

Rozprawa dotyczy kilku tematów związanych z nierównościami Hardy'ego-Steina, formami Sobolewa-Bregmana oraz funkcjami Littlewooda-Paleya głównie dla operatorów nielokalnych. Rozważane są mocno-ciągłe półgrupy kontrakcji $\{P_t\}_{t\geq 0}$ na przestrzeniach $L^p(m)$, które spełniają warunek (pod)Markowski. Każda taka półgrupa jest związana w jednoznaczny sposób z pewną formą Dirichleta $\mathcal{E}$. Związek między półgrupą P_t a stowarzyszoną z nią formą Dirichleta dany jest wzorem

$$\mathcal{E}(u,v) = \lim_{t\to 0^+} \mathcal{E}^{(t)}(u,v) := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\langle u - P_t u, v\rangle,$$

gdzie $\mathcal{E}^{(t)}$, $t > 0$, to forma aproksymująca. W dalszej części opisu będziemy oznaczać $\mathcal{E}[u] = \mathcal{E}(u,u)$ oraz $\mathcal{E}^{(t)}[u] = \mathcal{E}^{(t)}(u,u)$. Z punktu widzenia rozprawy istotny jest także wzór Beurlinga-Deny, który pozwala zapisać każdą (regularną) formę Dirichleta jako

$$\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}^{(c)}(u,v) + \frac{1}{2} \iint\limits_{E\times E\setminus \mathrm{diag}} (\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x))\,(\tilde{v}(y) - \tilde{v}(x))\; J(dx,dy) + \int\limits_E \tilde{u}(x)\tilde{v}(x)\, k(dx).$$

Symbol J powyżej oznacza miarę skoków (jumping measure), zaś k miarę zabijającą (killing measure). Tylda nad funkcjami u i v oznacza zaś ich kwazi-ciągłą modyfikację. Wyrażenie $\mathcal{E}^{(c)}$ to lokalna część formy $\mathcal{E}$. Mówimy, że forma $\mathcal{E}$ jest lokalna gdy $J = 0$ i $k = 0$.

Przejdę teraz do opisu wyników.

2.1 Tożsamości Hardy'ego-Steina

W przypadku gdy forma Dirichleta stowarzyszona z półgrupą jest czysto skokowa ($\mathcal{E}^{(c)} = 0$ i $k = 0$) są to tożsamości typu

$$\int_E |f(x)|^p m(dx) = \int_0^\infty \iint_{E\times E\setminus\mathrm{diag}} F_p(P_tf(x), P_tf(y))\, J(dx, dy)\, dt,$$

dla $f \in L^p(m)$, $1 < p < \infty$. Powyżej J oznacza miarę skoków, symbol F_p to dywergencja Bregmana (Bregman divergence)

$$F_p(a, b) = |b|^p - |a|^p - pa^{\langle p-1\rangle}(b - a),$$

zaś $a^{\langle\gamma\rangle} = |a|^\gamma \operatorname{sgn}(a)$ to francuska potęga (French power). Tego typu wzór jest uogólnieniem do przypadku nielokalnego formuły otrzymanej przez E.M. Steina w przypadku lokalnym vide [Ste 70a]. Pojawił się pierwszy raz w pracy Bañuelos-Bogdan-Luks [BBL16] w szczególnym przypadku translacyjnie niezmienniczej miary Lévy'ego J.

Najogólniejsze wyniki w kontekście tożsamości Hardy'ego-Steina są zawarte w rozdziale 7. rozprawy. Są to wyniki uzyskane wspólnie z promotorem - dr. hab. inż. Mateuszem Kwaśnickim - w pracy [G2]. W szczególności najbardziej ogólna wersja tożsamości Hardy'ego-Steina z Corollary 7.4 orzeka, że

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p\, m(dx) &= \lim_{T\to\infty} \|P_Tf\|_p^p + \frac{4(p-1)}{p}\int_0^\infty \mathcal{E}^{(c)}[(P_tf)^{\langle p/2\rangle}]\, dt \\ &+ \int_0^\infty \iint_{E\times E\setminus\mathrm{diag}} F_p(P_tf(x), P_tf(y))\, J(dx, dy)\, dt + p\int_0^\infty\int_E |P_tf(x)|^p k(dx)\, dt.\end{aligned} \tag{HS}$$

Dowód (HS) opiera się na zbadaniu własności formy Sobolewa-Bregmana $\mathcal{E}_p$. Obiekt ten jest uogólnieniem formy Dirichleta $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$ z przypadku $p = 2$ do dowolnych $p \in (1, \infty)$. Forma $\mathcal{E}_p$ jest zadana przez

$$\mathcal{E}_p[u] = \lim_{t\to 0^+} \mathcal{E}^{(t)}(u, u^{\langle p-1\rangle}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\langle u - P_tu, u^{\langle p-1\rangle}\rangle,$$

zaś jej dziedziną $\mathcal{D}(\mathcal{E}_p)$ jest zbiór tych $u \in L^p(m)$ dla których powyższa granica istnieje. Kluczową z punktu widzenia rozprawy własnością formy Sobolewa-Bregmana jest tożsamość

$$\frac{d}{dt}\|P_tf\|_p^p = -p\mathcal{E}_p[P_tf], \qquad t > 0,$$

która jest uzasadniona w rozdziale 3. Wzór (HS) jest konsekwencją powyższej formuły i równości

$$\mathcal{E}_p[u] = \frac{4(p-1)}{p^2}\mathcal{E}^{(c)}[u^{\langle p/2\rangle}] + \frac{1}{p}\iint_{E\times E\setminus\mathrm{diag}} F_p(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y))\, J(dx, dy) + p\int_E |\tilde{u}(x)|^p k(dx), \tag{EP}$$

która zachodzi dla wszystkich regularnych form Dirichleta, vide Theorem 7.1. Dowód wzoru (EP) jest oparty na pewnych subtelnych argumentach aproksymacyjnych, w szczególności na istotnym technicznym Lemacie 7.5.

We wcześniejszych rozdziałach rozprawy - 4. i 6. - autor udowodnił wzór (EP) oraz tożsamość Hardy'ego-Steina (HS) przy dodatkowych założeniach na miarę skoków J oraz miarę zabijającą k. W szczególności zakłada się tam, że część lokalna $\mathcal{E}^{(c)}$ znika. Wyniki zawarte w rozdziale 6. są oparte na samodzielnej pracy [G3].

Z kolei w rozdziale 5. przedstawione są spolaryzowane warianty formy Sobolewa-Bregmana i tożsamości Hardy'ego Steina. Rozdział ten jest oparty na pracy wspólnej [G1]. Zakłada się tam, że forma Dirichleta $\mathcal{E}$ jest czysto skokowa, tzn. $\mathcal{E}^{(c)} = 0$ i $k = 0$. W tym kontekście udowodniono następującą spolaryzowaną wersję tożsamości Hardy'ego-Steina vide Theorem 5.6

$$\int_E f(x)g^{\langle p-1\rangle}m(dx) = \int_0^\infty \iint_{E\times E\setminus\mathrm{diag}} \mathcal{J}_p(P_tf(x), P_tf(y))\, J(dx,dy)\, m(dx)m(dy)\, dt,$$

gdzie $\mathcal{J}_p(w_1, w_2, z_1, z_2)$ jest pewną funkcją czterech zmiennych, która zgadza się z $F_p(a,b)$ gdy $w_1 = w_2 = a$ i $z_1 = z_2 = b$. W dowodzie powyższego wzoru istotna była między innymi wypukłość funkcji $\mathbb{R}^2 \ni z \mapsto z_1z_2^{\langle p-1\rangle} + |z|^p$, która jest uzasadniona w dodatku B.

2.2 Zastosowania w Teorii Littlewooda-Paley'a

W ostatnim - 8. - rozdziale rozprawy autor bada różne funkcje kwadratowe typu Littlewooda-Paleya. Większość wyników tu otrzymanych to samodzielna praca naukowa doktoranta, która jeszcze nie została wysłana do publikacji. W rozdziale 8. zakłada się, że forma Dirichleta stowarzyszona z półgrupą P_t jest czysto skokowa, z częścią lokalną $\mathcal{E}^{(c)} = 0$ i częścią zabijającą $k = 0$. Ten kontekst jest ogólniejszy niż badany w pracy [BBL16], gdzie zakładano dodatkowo, że część skokowa jest translacyjnie niezmiennicza. Przykładami rozważanych funkcji kwadratowych są

$$G^2(x) = \int_0^\infty \Gamma[P_tf](x)\, dt, \qquad \tilde{G}^2(x) = \int_0^\infty \tilde{\Gamma}[P_tf](x)\, dt$$

oraz dwie podobne funkcje H i $\tilde{H}$, vide sekcja 8.1.2. Symbol Γ powyżej oznacza operator carré du champ, natomiast $\tilde{\Gamma}$ jest jego modyfikacją, która sprawia, że $\tilde{G} \leq \sqrt{2}G$ punktowo. Autor udowodnia, że norma L^p funkcji f szacuje normę L^p funkcji $\tilde{G}$; z góry dla $1 < p \leq 2$ (Theorem 8.13) oraz z dołu dla $2 \leq p < \infty$ (Theorem 8.14). Ważnym składnikiem w dowodach obydwóch oszacowań jest tożsamość Hardy'ego-Steina udowodniona w poprzednim rozdziale. Pewnym mankamentem rozważanych tutaj funkcji kwadratowych jest fakt, że ich normy L^p nie muszą być porównywalne z normą L^p funkcji f. Dla przykładu, dla $p > 2$ nie musi zachodzić nierówność $\|\tilde{G}\|_p \leq C_p\|f\|_p$. Zaprezentowany w rozprawie kontrprzykład (Example 8.15) pochodzi od promotora. Co ciekawe, w przypadku gdy ograniczymy się do form rozważanych w [BBL16] i J translacyjnie niezmienniczych, to porównywalność $\|\tilde{G}\|_p \approx_p \|f\|_p$ zachodzi dla wszystkich $1 < p < \infty$.

W tym rozdziale dowodzone są także nierówności na L^p, $1 < p < \infty$, dla funkcji H oraz $\tilde{H}$. Głównym narzędziem są tu techniki martyngałowe i nierówność Burkholdera-Daviesa-Gundy'ego. Zaadaptowanie tych technik wymagało użycia między innymi użycia odpowiedniości Revuz (Revuz correspondence).

3 Ocena redakcyjna

Od strony redakcyjnej praca jest napisana dość chaotycznie. Zawiera także całkiem sporo usterek językowych; w tym wtrącone zdania po polsku, które nie zostały usunięte na etapie redakcji tekstu.

Same rozumowania są natomiast zazwyczaj przedstawione klarownie, pomimo, że dowody są czasem zaawansowane technicznie. Bibliografia i cytowania są zaprezentowane poprawnie.

4 Ocena merytoryczna

Funkcje kwadratowe typu Littlewooda-Paleya to jedne z najistotniejszych narzędzi w analizie harmonicznej. Ich ograniczoność na przestrzeniach L^p jest istotnym składnikiem dowodów wielu twierdzeń, m.in. twierdzeń mnożnikowych czy twierdzeń o zbieżności prawie wszędzie. Podejście do szacowania norm tych funkcji kwadratowych przy użyciu tożsamości Hardy'ego-Steina jest jednym z niewielu dostępnych przy rozważaniach operatorów nielokalnych. Tego rodzaju badania zostały zapoczątkowane kilka lat temu w pracy [BBL16], zaś badania prowadzone w rozprawie doktorskiej stanowią ich naturalną i potrzebną kontynuację.

Dowody wymagały opanowania kilku zagadnień nowoczesnej analizy matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa. W rozprawie doktorskiej doktorant wykazał się m.in. bardzo dobrą znajomością teorii form Dirichleta oraz metod martyngałowych. Niektóre z dowodów wymagały także skomplikowanych i wysoce nietrywialnych argumentów technicznych.

Wyniki otrzymane w rozprawie stanowią solidny wkład do analizy funkcji kwadratowych typu Littlewooda-Paleya i to zarówno z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa jak i analizy harmonicznej. Istotnie uzupełniają znaną teorię i mogą znaleźć zastosowania w przyszłości do szacowania norm różnych operatorów na przestrzeniach L^p.

Słabszą stroną recenzowanej rozprawy jest fakt, że jak dotąd tylko jedna praca oparta na jej wynikach została opublikowana lub przyjęta do publikacji. Zdaję sobie jednak sprawę, że autor nie ma wpływu na tempo recenzji, dlatego nie uważam tego za poważny problem. Tym bardziej, że wyniki, które zostały lub zostaną wysłane do publikacji są moim zdaniem wyższej klasy niż te już opublikowane.

5 Konkluzja

Nie mam wątpliwości, że praca mgr. inż. Michała Gutowskiego spełnia wszystkie wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuję o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora.

Błażej Wróbel

Wróbel Błażej