Toruń, 16.10.2024

dr hab. Joanna Kułaga-Przymus, prof. UMK
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Recenzja rozprawy doktorskiej pana Sebastiana Kopacza
"Dynamics of countable amenable group actions"

Rozprawa mgra Sebastiana Kopacza jest skupiona wokół tematyki kafelkowań i quasi-kafelkowań. Składa się ze wstępu i czterech rozdziałów. Pierwszy rozdział (Preliminaries) zawiera potrzebne definicje i twierdzenia wykorzystywane w dalszej części tekstu. Kolejne rozdziały odpowiadają trzem współautorskim artykułom, z których dwa zostały już opublikowane w bardzo dobrych czasopismach:

- Dawid Huczek, Sebastian Kopacz, Factoring strongly irreducible group shift actions onto full shifts of lower entropy. *Groups Geom. Dyn.* 18 (2024), no. 4, pp. 1185–1199,
- Dawid Huczek, Sebastian Kopacz, Jacek Serafin, Residuality of dynamical morphisms for amenable group actions, *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 73, No. 3, (2024), 855–881,

a trzeci

- Sebastian Kopacz, Jacek Serafin, Uniquely ergodic tilings of amenable groups

jest w recenzji. Każdy z tych trzech rozdziałów stanowi zatem odrębną całość. We wszystkich rozdziałach rozpatruje się podshifty, tzn. domknięte podzbiory $\{0, 1, \dots, r\}^G$, które są niezmiennicze ze względu na działanie ablowej grupy G poprzez przesunięcia $g(x)_h = x_{h+g}$, $g \in G$.

Przedstawię teraz pokrótce najważniejsze wyniki zawarte w rozdziałach 2-4. Rozdział drugi dotyczy problemu faktoryzacji układu symbolowego (podshiftu) na pełen shift o mniejszej entropii niż entropia wyjściowego układu. Wiadomo, że w przypadku $G = \mathbb{Z}$ odpowiedź na pytanie o istnienie takiego odwzorowania faktoryzującego jest twierdząca jeśli tylko podshift X jest skończonego typu (tj. mamy pewną skończoną listę "zakazanych bloków" wyznaczającą elementy zbioru X). Twierdzenie to jest prawdziwe nawet w przypadku gdy entropia X oraz entropia podshiftu są sobie równe. Dla $G = \mathbb{Z}^d$ sytuacja zaczyna się komplikować, mianowicie potrzebna jest ostra nierówność pomiędzy entropiami (dla równej entropii znane są kontrprzykłady) oraz zakłada się pewien warunek mieszania (związany z możliwością sklejania "narożników"). Autor rozprawy uogólnia to twierdzenie na grupy abelowe z tzw. własnością porównywania (ang. comparison property).[1] Założenie o tym, że X jest skończonego typu oraz warunek sklejania zostają zastąpione założeniem, że układ X jest silnie nieredukowalny. Dodatkowo wymaga się istnienia bloków nieokresowych dla dowolnego okresu (tzw. aperiodyczność układu).[2] Jak zauważa autor rozprawy, nawet dla działań $\mathbb{Z}$ własność silnej nieredukowalności oraz bycia podshiftem skończonego typu nie są powiązane implikacją w żadną ze stron. A zatem wynik mgra Kopacza jest nie tylko uogólnieniem znanych wcześniej rezulatów na grupy abelowe, ale jest też dołożeniem pewnej "cegiełki" także dla działań $\mathbb{Z}$. Sam dowód jest techniczny (poziom trudności jest zdecydowanie wyższy niż w przypadku $G = \mathbb{Z}$, gdzie kafelkami na ogół są przedziały, podczas gdy w sytuacji ogólnej kształty mogą być o wiele bardziej skomplikowane), nie czyta się go łatwo, natomiast widać, że autor starał się zadbać o czytelnika i w wielu miejscach wypunktował poszczególne kroki dowodów – bez tego lektura moim zdaniem byłaby niemożliwa.

W przeciwieństwie do czysto topologicznego rozdziału drugiego, rozdział trzeci dotyczy teorii miary. Jego głównym celem jest zaprezentowanie wspólnego podejścia do trzech klasycznych twierdzeń (w wersji dla grup abelowych): Kriegera o skończonym generatorze, Sinaja o homomorfizmie i Ornsteina o izomorfizmie. Przypomnijmy, iż pierwsze z tych twierdzeń głosi, że każdy układ o skończonej entropii jest (teoriomiarowo) izomorficzny z podshiftem na s symbolach (gdzie $\log s$ jest równe przynajmniej entropii układu wyjściowego). Na twierdzenie Sinaja można patrzeć jak na odpowiednik teoriomiarowy głównego wyniku z rozdziału poprzedniego (dla faktora jako miarę bierze się dowolną miarę Bernoulliego spełniającą odpowiednią nierówność entropijną). Ostatnie z tych twierdzeń dotyczy izomorfizmu układów Bernoulliego o równej entropii. Główna idea przedstawionych dowodów jest taka, że czasem łatwiej jest pokazać istnienie wielu obiektów (w tym wypadku homomorfizmów czy izomorfizmów) niż jeden konkretny – podejście zaprezentowane w rozprawie bazuje na pomyśle Burtona i Rothsteina z lat 70-tych ubiegłego wieku. Punktem wyjścia jest udowodnienie twierdzenia Kriegera, dalej należy użyć metryki $\bar{d}$ i pojęcia skończonej determinowalności (ang. finite determinedness) aby otrzymać twierdzenie Sinaja. Wówczas twierdzenie o izomorfizmie staje się szybkim wnioskiem z twierdzenia poprzedniego. Ponownie, przeniesienie pomysłów z przypadku $G = \mathbb{Z}$ na sytuację ogólną nie jest trywialne. Główną rolę odgrywa tu przeformułowanie technicznego lematu z pracy Conley et al. "Følner tilings for actions of amenable groups" (*Math. Ann. 2018*) dotyczącego pewnych wież zbudowanych ze zbiorów Følnera.[3]

Ostatni rozdział dotyczy kafelkowań monoergodycznych dla grup ze średnią. Jest on najbardziej technicznym i najbardziej "kafelkowym" rozdziałem całej

[1] Wszystkie grupy przeliczalne ze średnią z podwykładniczym wzrostem mają tę własność. Ponadto, otwarty jest problem, czy istnieją grupy przeliczalne ze średnią bez tej własności.

[2] To ostatnie założenie jest niezbędne, gdyż faktor układu, który nie jest aperiodyczny również nie jest aperiodyczny, podczas gdy pełen shift posiada własność aperiodyczności.

[3] Pomysł na ten lemat tak naprawdę pochodzi z dużo wcześniejszej pracy (1987) Ornsteina i Weissa, trochę szkoda, że w tym miejscu autor o tym nie wspomniał, zwłaszcza, że ta praca i tak jest cytowana w rozprawie.

MKr

rozprawy. Główne twierdzenie tej części rozprawy głosi o istnieniu monoergodycznych kafelkowań o zerowej entropii, których kształty są dowolnie mocno niezmiennicze. Konstrukcja tego rozdziału jest dobrze przemyślana. Po wprowadzeniu potrzebnych definicji przedstawiono pewne ogólne wyniki, które w dalszej części rozdziału są używane do zbudowania pewnej bardzo zaawansowanej procedury indukcyjnej. Tak więc, jako podstawowe narzędzia, mamy wyniki dotyczące: a) dobrych frekwencji bloków na dużych zbiorach, b) ograniczania zbioru miar niezmienniczych, c) tworzenia kafelkowania z quasi-kafelkowania. W skrócie, a) związane jest z tym, że aby kontrolować frekwencje bloków, nie musimy mieć pełnej wiedzy – mogą występować niezbyt duże obszary, których nie kontrolujemy. Dalej, centralny w b) lemat 4.2.5 zawiera pewną procedurę kopiowania fragmentów kafelkowania w inne miejsca przestrzeni. Wreszcie, c) wykorzystuje lemat o małżeństwach do zastąpienia quasi-kafelkowania prawdziwym kafelkowaniem (patrz lemat 4.2.7). Chciałam tu podkreślić, że mój opis zawartości tego fragmentu rozprawy jest ogromnym uproszczeniem. Żaden z tych kroków nie jest trywialny i na dodatek zostały one bardzo czytelnie zaprezentowane. Dalsza część tego rozdziału to misterna procedura indukcyjna wykorzystująca a), b), c), która również została opisana z dużą dbałością o czytelnika. Autor szczegółowo tłumaczy, na czym będzie ta indukcja polegała, wprowadza potrzebne obiekty (a jest ich niemało: ciąg punktów w przestrzeni shiftowej odpowiadający ciągowi kafelkowań, ciąg miar niezmienniczych skupionych na orbitach odpowiednich elementów ciągu poprzedniego, ciąg $\varepsilon_n \to 0$, dwa ciągi quasi-kafelkowań oraz ciąg zbiorów Følnera) i wyjaśnia ich rolę w dowodzie. Pierwsze kroki indukcji przedstawione są osobno dla ułatwienia lektury.[4] Ten rozdział zrobił na mnie największe wrażenie i sam w sobie jest dowodem, że autor rozprawy osiagnął bardzo wysoki poziom jeśli chodzi o umiejętności techniczne.

Zanim przejdę do uwag krytycznych, chciałabym podkreślić, że wyniki zawarte w rozprawie mi się podobają. Z rozprawy widać, że autor bardzo dobrze panuje nad zaganieniami związanymi z tematem kafelkowań (dotyczy to zarówno pojęć i twierdzeń z dynamiki topologicznej, jak i teoriomiarowej) i dostępną literaturą w tym zakresie. Gdy zaczynałam czytać tekst, wydawało mi się, że "najlżejszy" (dla mnie) w lekturze będzie teoriomiarowy rozdział trzeci. Tak się jednak składa, że rozdziały w rozprawie zamieszczone są w kolejności chronologicznej, tak, jak powstawały. W mojej ocenie redakcja każdego kolejnego rozdziału jest bardziej przystępna dla czytelnika niż rozdziału poprzedniego i widać gołym okiem rozwój naukowy autora rozprawy w trakcie pracy nad kolejnymi zagadnieniami. W efekcie, za najlepiej zredagowany uważam rozdział ostatni (i to pomimo całego jego technicznego charakteru i wyjątkowo zawiłej indukcji, jaką autor uprawia, aby osiągnąć żądany efekt). W mojej ocenie cenne w całej rozprawie są ilustracje, na których autor stara się zobrazować swoje rozumowania dotyczące kafelkowań. Bez tego typu intuicji geometrycznych być może dałoby się zweryfikować poprawność rozumowań, ale na pewno wymyślać

[4] Oraz, jak się domyślam, dla ułatwienia także samej redakcji – opis kroku indukcyjnego od razu w pełnej ogólności byłby bardzo nieprzyjemny i dla czytelnika, i dla samego autora.

TKP

dowody i głębiej je rozumieć już nie.

Strona redakcyjna rozprawy pozostawia jednak pewien niedosyt. Często podczas lektury brakowało mi dokładniejszych odnośników do wcześniejszych partii tekstu. Zdarzają się w rozprawie miejsca, gdzie bez komentarza czy wyjaśnienia pojawia się jakaś formuła (często nawet zupełnie elementarna), którą wcale nie jest łatwo uzasadnić. Domyślam się, że powodem jest fakt, iż rozdziały to niemal dokładne kopie artykułów, w których pewne przejścia zostały pozostawione czytelnikowi. Jestem jednak zdania, że rozprawa doktorska jest formą, w której takie przeskoki należałoby uzupełnić.

Poniżej pewne uwagi szczegółowe, które nie mają wpływu na pozytywną ocenę całej rozprawy.

- (str. 17) W twierdzeniu 2.1.4 pojawia się na końcu przeformułowanie części tezy na język dynamiki topologicznej ($\mathcal{T}^\circ$ jest faktorem $\mathcal{T}$). Nigdzie w rozprawie autor nie tłumaczy się z tego, dlaczego można to tak przeformułować. Doktorat moim zdaniem zyskał by na dodaniu wyjasnień.

- (str. 18) W pierwszym akapicie autor odwołuje się do twierdzenia 2.1.5. Wydaje się, że należało by również zacytować 1.0.20, gdyż w 2.1.5 brak informacji o entropii, a ma ona być zerowa. Wydaje się również, że brak tu stwierdzenia, że kształty kafelkowania $\mathcal{T}$ pochodzą z ciągu Følnera.

- (str. 21 pkt 2) Ostatnie dwa zawierania są elementarne, jednak lektura byłaby łatwiejsza, gdyby autor dodał odpowiednie rachunki.[5]

- (str. 21 pkt 4) Fraza "invariance property established earlier" jest myląca i czytelnikowi trudno się zorientować do czego się odnosi. Ponadto, przy lekturze punktu 4 można odnieść wrażenie, że procedura się zapętla (nie jest jasne w jakiej kolejności są dobierane kafelkowanie $\mathcal{T}$ oraz δ, po wczytaniu się problem znikna, niemniej czytelnik ma prawo się tu czuć zagubiony).

- (str. 24 przed uwagą 2.2.3) Warto byłoby ten fragment rozwinąć. Intuicja faktycznie jest taka, że jak będziemy sklejać ze sobą kafelki, to nie utracimy pożądanych własności, ale wydaje się, że nigdzie w pracy nie jest to formalnie przedstawione.

- (str. 25 pkt 3) Przydałoby się gdzieś wprowadzić "sliding block code" (np. w rozdziale 1).

- (str. 25 ostatnia "kropka") Przydałaby się jakaś wskazówka dla czytelnika skąd się wziął początek tego zdania.

- (str. 30 lemat 3.1.1) Jest to lemat, który zasadniczo pochodzi z pracy [8]. W [8] ma on dość długą historię i wydaje się, że samo zacytowanie [8] w tym miejscu to troszkę za mało. Absolutnym minumum byłoby wskazanie

[5] Tego typu miejsc w rozprawie jest więcej, na tej liście wymieniłam wybrane z nich.

dokładnego miejsca z [8], z którego pochodzi przeformułowany lemat (domyślam się, że chodzi o lemat 3.4). Warto by było przytoczyć oryginalny rezultat i wytłumaczyć czytelnikowi jak jedne pojęcia (wieże Rochlina) tłumaczą się na drugie (kafelki). Cały dowód jest zredagowany pospiesznie. Zrozumienie go wymaga ciągłego zaglądania do [8]. Domyślam się, że zbiory C_i pochodzą z lematu 3.3 w [8], trzeba by to więc przynajmniej zasygnalizować. Dalej, wypadałoby podać definicję "lower Banach density", a nie znów odwoływać się do [8] (jak rozumiem, dowód wypełniania $(1-\eta)$-części przestrzeni bazuje na porównaniu obu definicji dolnej gęstości Banacha i skorzystaniu z lematu 3.4 z pracy [8]).

- (str. 32, definicja frekwencji) Ta definicja pojawia się już we wstępie. Pojawia się też w dalszej części rozprawy. Nie wydaje się ona na tyle trudna, aby musiała być powtarzana aż tyle razy (inne, często trudniejsze, pojęcia nie zostały w ten sposób wyróżnione). Domyślam się, że to pośpiech.

- (str. 33, komentarz przed lematem 3.1.6) Ten komentarz jest zupełnie niezrozumiały.

- (str. 34, wniosek 3.1.7) Brak założenia ergodyczności (zakładam, że to przeoczenie).

- (str. 35, pod koniec strony) Autor pisze: "combining this with the previous inequality". Zarówno w tym miejscu, jak i w wielu innych podobnych odnośnik z "numerkiem" mocno by ułatwił odnalezienie odpowiedniej nierówności i całość lektury.

- (str. 36, dowód lematu 3.1.10) Definicję entropii warunkowej lepiej by było dać do wstępnego rozdziału zamiast przytaczać ją wewnątrz dowodu lematu. Domyślam się, że zostało to tu, bo tak jest w artykule, który takiego wstępnego rozdziału siłą rzeczy nie zawiera.

- (str. 36, dowód lematu 3.1.10) Z dowodu nie widać, czy t zależy od B czy też nie. To mocno utrudnia lekturę tego fragmentu. W trzeciej linii nierówności nie bardzo widać skąd się bierze drugi i trzeci składnik. Ostatecznie wydaje się, że to jest dobrze, ale tych wyjaśnień naprawdę tu brakuje.

- (str. 37, u góry) Zamiast odwoływać się do strony 40 wydaje się, że lepiej by było odpowiednią definicję przesunąć / wyjąć przed lemat / ...

- (str. 40 na dole) Doktorat zyskałby na uzupełnieniach (np. w rozdziale wstępnym) związanych z przestrzeniami Baire'a. Podobnie w dalszej części tego rozdziału jest sporo przejść uważanych za oczywiste. W rozprawie chętnie bym zobaczyła przynajmniej niektóre z nich rozpisane z większą ilością szczegółów.

- (str. 42 step 3) Czy argument jest tu taki, że jeśli mamy do czynienia z dużymi podzbiorami zbiorów Følnera, to wówczas można stosować 3.1.9?

+1CP

- (str. 44 krok 5) Przydałaby się tu większa dbałość o czytelnika, by było widać, że ten dobór stałych się tu nie "zapętla".
- (str. 45, druga wyśrodkowana nierówność) Przydałby się odnośnik, by łatwiej zrozumieć skąd wynika nierówność. Podobnie na str 46, akapit zaraz za "3" (tam by się przydał odnośnik do pierwszego wyśrodkowanego wzoru na stronie 45).
- (str. 52) Warto by dodać jakiś odnośnik do literatury, gdzie pojawia się fakt 4.2.1.[6]
- (str. 53, "good frequencies...") Warto przemyśleć redakcję. Czytelnik jeszcze nie wie, czym jest H oraz $\hat{y}(H)$.
- (str. 54) Przy pierwszym wyśrodkowanym wzorze z nierównościami można jakoś zasugerować czytelnikowi czytanie "od środka" lub po prostu można to rozbić na dwie części, obie zaczynające się od ułamka z licznikiem H_{good}.
- (str. 55) Autor pisze: "Since S could have been chosen to be arbitrarily large...". Czy dobrze rozumiem, że to, że kształty mogą być dowolnie duże mogliśmy zagwarantować tam, gdzie dobieraliśmy L?
- (str. 56, sam koniec) Czy nie powinno być $1 - 3\omega$ zamiast $1 - 2\omega$?
- (str. 58) Warto by było dać dokładniejszy odnośnik do [12] i wyjaśnić dokładniej co to znaczy "slightly altered".
- (str. 59, uwaga 4.2.8) Czy w tej uwadze chodzi o to, że jeśli $\hat{z}$ nie spełnia warunku na ξ to wówczas możemy zmienić rodzinę kształtów przez ich posklejanie?
- (str. 59, lemat 4.2.9) Zamieniłabym na $e \in R \subset G$ (zamiast nawiasu dotyczącego e), aby było jasne, że nie żądamy, żeby e należało do G.
- (str. 60, remark) Wydaje się, że jest literówka i $S = T$.
- (str. 65, przedostatnia "kropka") Czy "Moreover, we can assume..." wiąże się z ewentualnym powiększeniem kafelków w razie potrzeby?
- (str. 66) Mylące jest zdanie "We begin the first step... by using Lemma 4.2.5"; bo tak naprawdę nie używa się go od razu, tylko potrzebne są pewne przygotowania.
- (str. 67, początek strony) Nawias z "recall" dobrze by było przenieść kawałek dalej. Umieszczony w tym miejscu, tj. przed "on the domain" powoduje, że czytelnik zaczyna się mocno zastanawiać, skąd to się wzięło i dlaczego ma być prawdziwe.

[6] Nieprzekonujące dla recenzentki jest używanie środowiska "fakt" tu i w inncyh miejscach. Wydaje się, że standardowe "twierdzenie", "stwierdzenie", "lemat" i "wniosek" są wystarczające. Rola środowiska "fakt" w rozprawie nie jest spójna. Czasem "fakt" oznacza coś niekoniecznie standardowego, ale w miarę łatwego do sprawdzenia, np. 1.0.21, a czasem jakiś klasyczny wynik jak 4.2.1.

- (str. 67 i inne w tym samym dowodzie) Jest potrzeba zmiany definicji zbiorów $D_{\mathcal{W}}$ oraz $D_{\mathcal{L}}$. W przeciwnym razie pojawia się problem z uzasadnieniem zawierania $\mathcal{L}_1 \subset D_{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}'_1$.[7]
- W pracy dostrzegłam trochę literówek, nie uważam za istotne wypisywanie ich tutaj. Ponadto, podział tekstu na akapity nie zawsze wydawał mi się trafiony. Tu również szczegóły pominę.

Konkluzja W mojej ocenie przedstawiona do recenzji rozprawa spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgra Sebastiana Kopacza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Joanna Kitapa-Prymus

[7] Ten kłopot przedyskutowałam z autorem rozprawy i przekonał mnie on, że można te miejsca zmienić niedużym kosztem tak, by dowód był poprawny.