Dominik Kwietniak
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
dominik.kwietniak@uj.edu.pl

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Kraków, 22 września 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana Sebastiana Kopacza
Dynamics of countable amenable group actions

Wydział Matematyki
i Informatyki
Instytut Matematyki

Postępowanie w sprawie nadania panu mgr. Sebastianowi Kopaczowi stopnia doktora w dyscyplinie matematyka jest prowadzone przez Radę Dyscypliny Naukowej Matematyka Politechniki Wrocławskiej na podstawie przepisów ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.), zwanej dalej po prostu ustawą. Artykuł 187 punkty 1–2 ustawy stanowią, że rozprawa doktorska z dyscypliny matematyka *prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata [...] oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej [...]* a *[p]rzedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego*[1].

Po zapoznaniu się z przesłaną mi do recenzji rozprawą doktorską pana Sebastiana Kopacza mogę bez najmniejszych wątpliwości stwierdzić, że **spełnia ona wymagania stawiane rozprawom doktorskim przez ustawę**. Dalsza część tej recenzji zawiera omówienie zawartości rozprawy oraz uzasadnienie tej oceny.

Zawartość rozprawy w skrócie

Praca liczy sobie 77 stron i zawiera: spis treści, wstęp, cztery numerowane rozdziały oraz bibliografię. Rozdział pierwszy zawiera wprowadzenie do tematyki pracy. Główna zawartość rozprawy znajduje się w rozdziałach 2–4, które powstały na podstawie trzech prac złożonych przez pana Sebastiana Kopacza i jego współautorów do recenzji w czasopismach matematycznych. Dwie pierwsze z tych prac zostały niedawno opublikowane.

Rozdział drugi pokrywa się z pracą

(1) Dawid Huczek, Sebastian Kopacz, *Factoring strongly irreducible group shift actions onto full shifts of lower entropy.* Groups Geom. Dyn. **18** (2024), no. 4, str. 1185–1199. DOI 10.4171/GGD/808

Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie, które mówi, że jeśli G jest przeliczalną grupą ze średnią z własnością porównywania (ang. comparison property), a X jest silnie nieredukowalnym G-przesunięciem G (ang. strongly irreducible G-shift) spełniającym pewien warunek aperiodyczności, to X jest faktorem pełnego przesunięcia G na N symbolach, o ile logarytm z N jest mniejszy niż entropia topologiczna G.

Wyniki zawarte w rozdziale trzecim pochodzą z pracy

(2) Sebastian Kopacz, Jacek Serafin, Dawid Huczek, *Residuality of dynamical morphisms for amenable group actions*, Indiana Univ. Math. J. **73** No. 3 (2024), str. 855–881. DOI: 10.1512/iumj.2024.73.60075

Autorzy przenoszą klasyczne podejście korzystające z metody kategorii Baire'a, stosowane w dowodzeniu dla działań grupy $\mathbb{Z}$ następujących twierdzeń:

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

[1] Pominięty fragment nie ma znaczenia z punktu widzenia tej recenzji.

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

- twierdzenia Kriegera o skończonym generatorze, orzekające, że dla każdego zachowującego miarę ergodycznego przekształcenia $T\colon X \to X$ przestrzeni prawdopodobieństwa X istnieje taki mierzalny podział X na N części, że najmniejsza T-niezmiennicza sigma-algebra zawierająca ten podział jest (z dokładnością do miary zero) sigma-algebrą wszystkich zbiorów mierzalnych w X, o ile logarytm z N jest mniejszy niż entropia Kołmogorowa–Sinaja T względem zachowywanej miary. Podział spełniający powyższą własność jest nazywany generatorem T.
- twierdzenia Sinaja o homomorfizmie, które mówi, że proces ergodyczny o dodatniej entropii h jest dziedziną teoriomiarowego homomorfizmu (rozszerzeniem), którego obrazem jest przesunięcia Bernoulliego o entropii mniejszej lub równej h,
- twierdzenia Ornsteina o izomorfizmie, które mówi, że dwie transformacje Bernoulliego są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają taką samą entropię,

na przypadek działań przeliczalnie nieskończonych grup ze średnią (ang. amenable). Idea dowodu jest w zasadzie identyczna z rozumowaniami w pracy Burtona, Keane'a i Serafina [R. M. Burton, M. S. Keane i J. Serafin, *Residuality of dynamical morphisms*, Colloq. Math. **84/85** (2000), nr 2, 307317] (autorami pomysłu byli Burton i Rothstein). Metoda polega na pokazaniu, że miary definiujące odpowiednie homomorfizmy lub izomorfizmy tworzą zbiory rezydualne w odpowiednio dobranych przestrzeniach połączeń (ang. joinings).

Rozdział czwarty powstał w oparciu o preprint

(3) Sebastian Kopacz, Jacek Serafin, *Uniquely ergodic tilings of amenable groups*, złożona.

Autorzy konstruują jednoznacznie ergodyczne (monoergodyczne) kafelkowanie przeliczalnej grupy ze średnią, które generuje symboliczny układ dynamiczny o zerowej entropii. Co więcej, kształty tego kafelkowania są dowolnie mocno niezmiennicze.

Ocena wyników zawartych w rozprawie

Praca doktorska Sebastiana Kopacza poświęcona jest układom dynamicznym generowanym przez działania przeliczalnych grup mierzalnych (grup ze średnią) na przestrzeniach probabilistycznych (w przypadku układów teoriomiarowych) lub przestrzeniach metrycznych zwartych (w przypadku układów topologicznych). Te dwa typy układów są ze sobą powiązane. Każde ciągłe działanie przeliczalnej grupy ze średnią na przestrzeni metrycznej zwartej ma zawsze co najmniej jedną borelowską niezmienniczą miarę probabilistyczną. Układy ciągłe, które mają dokładnie jedną miarę niezmienniczą nazywamy monoergodycznymi (jednoznacznie ergodycznymi). Ustalając jedną taką miarę otrzymujemy z układu topologicznego układ zachowujący miarę.

Układy zadane przez działania przeliczalnych grup ze średnią stanowią uogólnienie układów pochodzących od działań addytywnej grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, czyli działań indukowanych przez iterację automorfizmu zachowującego pewną miarę (w przypadku układów teoriomiarowych) lub homeomorfizmu (w przypadku układów topologicznych) na przestrzeni zwartej[2]. Te ostatnie układy będą dalej nazywane *klasycznymi.*

Teoria działań przeliczalnych grup ze średnią jest stale rozwijana i rozszerzana i jest ona jednym z najważniejszych obszarów badawczych współczesnej dynamiki. Średniowalność (mierzalność) grupy przeliczalnej grupy charakteryzuje się istnieniem ciągu w przybliżeniu niezmienniczych zbiorów, które wyczerpują grupę; takie zbiory są odpowiednikami przedziałów $[-N, N]$ w $\mathbb{Z}$. Ponieważ wiele argumentów ergodycznych bazuje na

[2] W przypadku teoriomiarowym przestrzeń fazowa układu nie musi być zwarta, ale jeżeli nasza przestrzeń z miarą jest standardową przestrzenią Lebesgue'a, to możemy przyjąć, że jest to odcinek $[0, 1]$.

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

odpowiednio zdefiniowanym pojęciu uśredniania, zbiory te pozwalają na uśrednianie różnych wielkości po całej grupie. Grupy mierzalne tworzą więc naturalne środowisko, w którym można rozszerzyć teorię ergodyczną działań $\mathbb{Z}$ na bardziej ogólne grupy. Wiadomo od dawna, że klasa grup ze średnią jest najszerszą możliwą klasą grup przeliczalnych na której działania można próbować rozszerzać pewne wyniki klasycznej teorii układów dynamicznych. Wiadomo bowiem, że to właśnie mierzalność (średniowalność) grupy gwarantuje istnienie miar niezmienniczych dla działań na przestrzeniach metrycznych zwartych, Dla działań przeliczalnych grup ze średnią możliwe jest także zdefiniowania pojęć entropii topologicznej i entropii miarowej oraz powiązanie ich ze sobą za pomocą zasady wariacyjnej. Wiadomo też, że najbardziej satysfakcjonujące uogólnienia klasycznych twierdzeń ergodycznych na działania grup wymagają oczywiście, by działająca grupa była grupą ze średnią.

Podstawowe pytanie dotyczy tego, czy działania grup ze średnią wykazują zasadniczo inne zachowanie niż działania $\mathbb{Z}$.

Jak już wspomniano, klasyczna teoria ergodyczna i dynamika topologiczna koncentrują się na działaniach addytywnej grupy liczb całkowitych zadanych czy to przez automorfizmy zachowujących miarę, czy przez homeomorfizmy przestrzeni zwartych. Standardowe dowody w tych teoriach często opierają się na istnieniu uporządkowania grupy $\mathbb{Z}$. Przenosząc te wyniki na działania bardziej ogólnych klas grup przeliczalnych musimy opracować nowe metody. W przypadku działań grupy $\mathbb{Z}^d$ dla $d \geqslant 2$ możemy korzystać z tego, że d-wymiarowe kostki $\mathbb{I}^d = [-N, N]^d \cap \mathbb{Z}^d$, gdzie $N \geqslant 1$ mają dla wszystkich d podobne geometryczne i kombinatoryczne własności jak w przypadku $d = 1$. W szczególności $\mathbb{Z}^d$ może być pokryta przy pomocy parami rozłącznych translacji d-wymiarowej kostki $\mathbb{I}^d$. Pokrycie takie nazywamy kafelkowaniem (ang. tilling). Niestety, w przypadku ogólnych grup ze średnią tracimy przemienność działania. Brak przemienności znacznie zwiększa liczbę możliwych przypadków, które należy rozważyć przy przenoszeniu rozumowań z przypadku klasycznego. Jest to szczególnie widoczne przy korzystaniu z pojęcia znacznika (ang. marker). Co więcej, tracimy też możliwość kafelkowania działającej grupy przy pomocy translacji jednego zbioru (zwanego kształtem). Takie kafelkowanie jest nam potrzebne dla rozbicia orbity na niezależne części, które mogą być prawie niezmiennicze dla ustalonego podzbioru skończonego. Przy wielu konstrukcjach mając podział orbity możemy każdą z komórek takiego podziału wypełniać niezależnie mając pewność, że zachowanie pewnych wielkości będzie średnią po zachowaniu tej wielkości w poszczególnych komórkach i średnia ta jest możliwa do kontrolowania przez odpowiednie wypełnienie komórek.

Pytanie, czy dla każdej grupy mierzalnej istnieje taki pojedynczy kształt jest cały czas otwarte. Wielu problemów związanych z przenoszeniem wyników z teorii klasycznej na działania przeliczalnych grup ze średnią zostało przezwyciężonych dzięki wprowadzeniu przez Ornsteina i Weissa pojęcia kwazikafelkowań (ang. quasi-tilings). Pojęcie kwazikafelkowania odgrywało (i nadal odgrywa) fundamentalną rolę w rozwoju teorii ergodycznej wykraczającej poza działanie pojedynczego przekształcenia. Dopiero niedawno Downarowicz, Huczek i Zhanga udowodnili istnienie kafelkowania (o skończonej liczbie kształtów z dobrymi własnościami prawie niezmienniczości i zerową entropią[3]) dla każdej przeliczalnej grupy ze średnią. Wynik ten otworzył nowe możliwości w badaniu działań przeliczalnych grup ze średnią.

Wyniki w rozprawie pana Sebastiana Kopacza łączą przed wszystkim użyte metody badawcze, tzn. konsekwentne używanie technik związanych z kafelkowaniem i kwazikafelkowaniem przeliczalnych grup ze średnią do badania generowanych przez działania

[3] Generującego układ symboliczny o zerowej entropii topologicznej.

Wydział Matematyki
i Informatyki

Instytut Matematyki

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

takich grup układów dynamicznych. Otrzymane wyniki trudno nazwać zaskakującymi. Ich wartość polega na ich ogólności (wyniki z rozdziałów 2 i 4) lub elegancji rozumowania (dowody z rozdziału 3). I właśnie to uważam za główny rezultat ocenianej rozprawy: otrzymanie optymalnych wyników dla ogólnej klasy układów dynamicznych przy użyciu technicznie zaawansowanych i dalece nietrywialnych metod. Dowody przedstawionych w rozprawie twierdzeń wymagają ogromnej biegłości w myśleniu w kategoriach kafelkowań i kwazikafelkowań.

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Konkluzja

W mojej ocenie omawiana tu rozprawa doktorska pana Sebastiana Kopacza pt. *Dynamics of countable amenable group actions* zawiera oryginalne rozwiązania nietrywialnych problemów matematycznych i **zdecydowanie spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim przez ustawę z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.)**. Praca doktorska Sebastiana Kopacza stanowi wkład w rozwój teorii układów dynamicznych zadanych przez działania grup ze średnią na zwartych przestrzeniach topologicznych oraz na przestrzeniach probabilistycznych.

Wydział Matematyki
i Informatyki

Instytut Matematyki

Nie mam najmniejszych wątpliwości, że pan Sebastian Kopacz posiada wiedzę teoretyczną i zna metody niezbędne do samodzielnego prowadzenia badań naukowych w dziedzinie układów dynamicznych. Wnoszę więc o dopuszczenie pana Sebastiana kopacza do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Dominik Kwietniak

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl