Prof dr hab. Piotr Oprocha
Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Matematyki Stosowanej
al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

e-mail: oprocha@agh.edu.pl

Kraków, 23 września 2024

RECENZJA
rozprawy doktorskiej **mgra Sebastiana Edwarda Kopacza** zatytułowanej
„Dynamics of countable amenable group actions"

Rozprawa doktorska mgra Sebastiana Edwarda Kopacza, będąca przedmiotem tej recenzji, składa się z 77 stron i podzielona została na 4 rozdziały. Została napisana w języku angielskim, pod opieką promotora dr hab. inż. Jacka Serafina i promotora pomocniczego dr inż. Dawida Huczka. Rozprawa dotyczy badań nad własnościami grup ze średnią (amenable group) i ich miar niezmienniczych, w szczególności entropii budowanych nad nimi układów symbolicznych.

Materiał przedstawiony w rozprawie jest spójny tematycznie a przedstawione wyniki dobrze się ze sobą komponują tak pod względem metod jak i obszaru badań. Rozprawę rozpoczyna 2 stronicowe wprowadzenie, po którym następuje rozdział 1 zawierający dość ogólne przedstawienie głównych obiektów matematycznych i narzędzi używanych w rozprawie. Składa się na nie między innymi podsumowanie podstawowej terminologi związanej z grupami ze średnią, w tym różne własności ciągów Følnera; miary niezmiennicze i twierdzenie ergodyczne (w wersji dla grup ze średnią); entropia metryczna; przestrzenie symboliczne i kaflowania itp. Niestety wprowadzenie nie jest w żadnym stopniu kompletne, a co gorsze, nie zawsze pokrywa się z notacją stosowaną dalej w rozprawie.

Główną część merytoryczną rozprawy stanowią kolejne 3 rozdziały. Powstały one w oparciu o prace autora (współautorskie), po jednej pracy na każdy z rozdziałów w kolejności (numeracja prac wg. bibliografii):

[18] Huczek, Dawid; Kopacz, Sebastian. *Factoring strongly irreducible group shift actions onto full shifts of lower entropy.* Groups Geom. Dyn. **18(4)** (2024), 1185–1199.
[17] Huczek, Dawid; Kopacz, Sebastian; Serafin, Jacek. *Residuality of dynamical morphisms for amenable group actions.* Indiana Univ. Math. J. **73(3)** (2024), 855–881.
[23] Kopacz, Sebastian; Serafin, Jacek. *Uniquely ergodic tilings of amenable groups.* 2024. w recenzji

Już na wstępie lektury rozprawy staje się oczywiste, że autor nie poświecił dostatecznie dużo czasu na pełną integrację wyników, ujednolicenie oznaczeń itp. Stwierdzenie "We will denote this concisely by.... except chapter 2 .... as requested by editors of GGD" jest kuriozalne i nie stanowi żadnego wytłumaczenia. Podobnie zdanie "Throughout this paper..." na początku sekcji 3.1.1. czy "The goal of the current work..." na początku sekcji 4.3. Rozprawa doktorska powinna stanowić spójną całość, a to że autor tworzy ją na podstawie wyników z 3 różnych artykułów nie stanowi tutaj przeszkody. Utrzymanie różnych oznaczeń i podejść miałoby uzasadnienie, gdyby rozprawę stanowiły 3 odrębne artykuły na podstawie przepisów ustawy, ale to nie jest sytuacja z którą mamy do czynienia. Takie potraktowanie tematu powoduje, że ocena wyników rozprawy stanowi spore wyzwanie dla czytelnika. Mimo tych trudności, argumenty przedstawione w rozprawie wydają się kompletne i bezbłędne. W trakcie lektury nie natrafiłem na problemy czy istotne luki co przy ocenie merytorycznej jest najważniejszym elementem. Przejdę teraz do omówienia głównych wyników rozprawy w rozdziałach 2,3,4, gdzie doktorant rozwija nowe metody i twierdzenia.

Rozdział 2 koncentruje się na poszukiwaniu faktorów symbolicznych danego układu obniżających entropię. Znanym faktem w jednowymiarowej (tzn nad $\mathbb{Z}$) dynamice symbolicznej jest twierdzenie, że dowolne przesunięcie skończonego typu X można półsprzęgnąć z pełnym przesunięciem na N symbolach, o ile $h(X) \geqslant \log N$. Już w przypadku przesunięć wielowymiarowych $\mathbb{Z}^d$ okazuje się, że twierdzenie działa nadal gdy $h(X) < \log N$ ale może nie zachodzić gdy $h(X) = \log N$. W oczywisty sposób sytuacja grup ze średnią i przesunięć nad nimi jest naturalnym uogólnieniem powyższych rozważań, choć można jednocześnie przypuszczać, że dla tego przypadku potrzebny będzie zupełnie nowy warsztat matematyczny. Tak jest w rzeczywistości, a celem rozdziału jest wykazanie, że twierdzenie zachodzi także dla grup ze średnią (wynik ten zawiera Twierdzenie 2.3.1.). Oczywiście potrzebne są dodatkowe założenia jak aperiodyczność, comparison property czy nieredukowalność, które w jakimś stopniu mają odwzorować własności przesunięć skończonego typu. Główną technikę stanowią kaflowania specjalnego typu oraz pojęcie "markera", stanowiącego koncepcję podobną do markerów dla aperiodycznych przesunięć jednowymiarowych. Preludium do głównego dowodu stanowi Twierdzenie 2.2.2. pozwalające na wybór "markerów". Dowód tego twierdzenia jest długi i technicznie skomplikowany. Stanowi ono podstawę dla dowodu Twierdzenia 2.3.1. pozwalając na odpowiednie przekodowanie kafli, tak by ostatecznie skonstruować stosowny faktor. Rozdział zamyka Twierdzenie 2.3.3. pozwalające zamienić faktor z pełnego przesunięcia na przesunięcie skończonego typu (notabene, w pracy definicja SFT na G chyba nigdzie nie pojawia się).

Rozdział 3 dotyczy układów symbolicznych nad skończonym alfabetem o $s \geqslant 2$ symbolach. Celem jest uogólnienie 3 klasycznych twierdzeń znanych dla homeomorfizmów: finite generator theorem (Thm. 3.2.1/3.2.4), homomorphism theorem (Thm. 3.2.2/3.2.5) oraz isomorphism theorem (Thm. 3.2.3/3.2.6). Twierdzenia te zostają przeformułowane do wersji która umożliwia skorzystanie z twierdzenia Baire'a. W tym celu wykorzystuje się zbiór niezmienniczych miar ergodycznych o pewnych dodatkowych własnościach (joinings), co pozwala na sparowanie zadanej miary μ z odpowiadającą jej miarą o szukanych własnościach. Twierdzenie o izomorfizmie jest zredukowane do wniosku z pozostałych dwóch, w związku z czym jego dowód jest dość szybki. Pozostałe dwa twierdzenia wymagają natomiast sporego nakładu pracy. Tak jak i w przypadku rozdziału 2, istotny element konstrukcji stanowią markery. Dla standardowej dynamiki symbolicznej wystarcza by markery rozmieszczać w ograniczonych odstępach (syndetic) pozostawiając odpowiednio dużo miejsca na dodatkowe symbole. Dla grup ze średnią G idea jest w jakimś sensie podobna (wykorzystuje się markery) jednak nie można liczyć na regularność zagwarantowaną przez $\mathbb{Z}$. Po prostu G może posiadać bardzo nieregularną strukturę, wgląd w którą w jakimś sensie zapewnia ciąg Følnera. Regularne odstępy zostają natomiast zastąpione kaflowaniami, które uzupełnia się w odpowiedni sposób. Dodatkowo, wykorzystuje się lemat o małżeństwach (marriage lemma) który pozwala połączyć bloki z dwóch odpowiednio dobranych zbiorów A,B w pary. Wszystkie te zabiegi mają na celu skonstruowanie otwartych i gęstych zbiorów połączeń, które w przecięciu dają odpowiedni izomorfizm. Dowód ostatniego z trzech twierdzeń jest także mozolny i technicznie skomplikowany. Jak stwierdza autor, jest on mocno inspirowany podejściem w pracy [6] z 2000 roku, jednak wszystkie niezbędne kroki zostały rozpisane i przedstawione w sposób dość przejrzysty. Choć trzeba przyznać, że poziom szczegółowości argumentów jest mocno ograniczony i sprowadza się bardziej do ogólnego komentarza/szkicu dowodu niż ścisłego dowodu matematycznego.

Ostatni rozdział rozprawy skupia się na konstrukcji jednoznacznie ergodycznych (uniquely ergodic) kaflowań dla grup ze średnią G. Główne twierdzenie tego rozdziału mówi, że dla dowolnego zbioru skończonego $K \subset G$ i $\varepsilon > 0$ istnieje takie jednoznacznie ergodyczne kaflowanie o zerowej entropii, że jego kafle są (K, ε)-niezmiennicze. Dowód jest oparty o indukcyjna technikę aproksymacyjną, która w każdym kroku zawężą średnicę zbioru miar niezmienniczych które mogą pojawiać się w skonstruowanym kaflowaniu zadanym przez wszystkie układy kafli w domknięciu orbity tworzonego punktu x_n. W konstrukcji zapewnia się aby ciąg x_n był zbieżny do pewnego x, a stowarzyszone zbiory miar zawierające miary niezmiennicze generowane przez x_n tworzyły ciąg zstępujący. Tym sposobem, docelowy punkt x zadaje układ jednoznacznie ergodyczny. Jednocześnie zapewnia się by entropie topologiczne kaflowań x_n były małe, co przenosi się na zbiór miar poprzez regułę wariacyjną i górna półciągłość funkcji entropii. Przeprowadzona konstrukcja jest pomysłowa i technicznie skomplikowana. Trzeba dobrać szereg stałych i wykonać wiele oszacowań aby wykonać pojedynczy krok konstrukcji. Następnie rozpoczyna się kolejny krok indukcyjny, dbając o to aby powstał ciąg Cauchy'ego x_n a stosowna "informacja" przeniosła się na punkt graniczny x i zbiór miar odpowiednio bliskich x. Sam szkic dowodu przedstawiony w pracy zajmuje 2 strony, a jego realizacja kolejne 10 stron pracy. Aby dowód okazał się sukcesem, potrzebne są także przygotowania w postaci odpowiednich technik konstrukcyjnych i perturbacyjnych. Wprowadzane są one na pierwszych 10 stronach rozdziału 4. Pozwalają one modyfikować kaflowanie w taki sposób by kontrolować jego entropie i średnicę zbioru miar (Lem. 4.2.5) czy przekształcać quasi-kaflowanie w kaflowanie (Lem. 4.2.7.) kontrolując niezmienniczość kafli względem zbioru K.

Jak widać z powyższych opisów, rozprawa doktorska zawiera dowody o wysokim stopniu skomplikowania. Mimo, że wiele z przedstawionych twierdzeń inspirowanych jest intuicjami dla dynamiki symbolicznej nad $\mathbb{Z}$, dowody w żadnej mierze nie są prostą modyfikacją znanych argumentów. Autor buduje zaawansowany warsztat dowodowy i opiera się niejednokrotnie na wynikach najnowszych badań dotyczących kaflowań. Dowody są techniczne, a rozumowania i konstrukcje prowadzone przez wiele stron. W mojej ocenie zgromadzony materiał prezentuje bardzo wysoki poziom merytoryczny. Niestety autorowi nie udało się uniknąć usterek czy niedociągnięć, co można poniekąd tłumaczyć poziomem skomplikowania prezentowanych rozumowań.

Poniżej przedstawiam listę usterek które moim zdaniem wymagają komentarza/wyjaśnienia ze strony autora:

6^{15}: "Moreover, if G is amenable then it is a well known..." informuje czytelnika o istnieniu ciągu Følnera o pewnych zadanych własnościach. W części dowodów własności te są wykorzystywane w innych nie. Przy czym, jeśli pewne obiekty (np. bloki) zdefiniuje się na ustalonym ciągu i rozpocznie pewną konstrukcję, to nie można go potem zmienić. W pracy często brakuje precyzji w tym zakresie. Czytelnik często dowiaduje się w połowie dowodu, że dana własność ciągu Følnera jest konieczna. Dobrą praktyką byłoby ustalenie na początku ciągu o zadanych własnościach które są konieczne, a jeśli założenia są różne w różnych twierdzeniach, powinny być wypisane explicite. Przykładowo w 58^{11} korzystamy z symetryczności ciągu Følnera. Na stronie 72_4 wprost pojawia się "Finally, without loss of generality we impose an additional assumption on the family of Følner set...". W pracy ciężko się zorientować jakie założenia w danym momencie obowiązują.

6_3: Do przeprowadzenia rachunków i Remark 1.0.6 potrzebne jest "we assume that K contains identity element". Tymczasem po Definition 1.0.3 autor stwierdza "Often K will contain identity element". Zatem dopuszcza się sytuacje $e \notin K$. To czyni Remark 1.0.6 co najmniej nieprecyzyjną. Wypadałoby dopisać $e \in K$ w jej wypowiedzi lub/i kontrolować sytuacje w których to założenie jest konieczne.

8_3: Stwierdzenie "Equivalently, we can define..." nie jest trywialnym faktem. Wypadałoby podać cytowanie stosownego twierdzenia.

16_{12}: Definicja 2.1.2 wygląda na źle postawioną. Jeśli $e \in P$ to dla każdego t zachodzi $B(tp) = B(t)$ bez względu na blok B. To w świetle stawianej definicji oznacza, że nie istnieją aperiodyczne X.

17_{19}: Twierdzenie 2.1.5. operuje na konkretnym ciągu Følnera, przy czym nie wiadomo czy jest on ustalany na początku czy też taki ciąg istnieje. To powoduje, że wypowiedź twierdzenia jak i jej późniejsze zastosowania są nieprecyzyjne. Jest to szczególnie istotne w kontekście wspomnianej wcześniej uwagi odnośnie 6^{15}.

34^9: Wniosek 3.1.7. wydaje się istotny dla dalszych rozumowań w pracy. Dlaczego został podany bez dowodu?

36^3: Lemat 3.1.10. jest niezgodny z przyjętą konwencją. Wszystkie podziały pojawiające się wcześniej są skończone i było to założenie także przy definicji $H(P)$ czy $H(P|Q)$. Jeśli konieczne jest wykorzystywanie podziałów przeliczalnych, to należałoby przeredagować definicje na stronie 8 oraz 34.

36_{13}: Oszacowanie $(1-t)\xi(B_P)$ otrzymane z linii powyżej wymaga dokładniejszego uzasadnienia.

49_{11}: Oszacowanie całki po $X \setminus A$ przez ε_1 wymaga dokładniejszego uzasadnienia.

52_5: Do tego momentu pojawiły się już co najmniej 2 różne metryki d na przestrzeni $\mathcal{M}(X)$. Tymczasem, we wskazanym akapicie pojawia się stwierdzenie, że nie będziemy używać żadnej z tych metryk a oprzemy się o Fakt 4.2.1. Jest to duża niekonsekwencja. Skoro wybraliśmy już konkretną metrykę, warto byłoby dla ustalenia uwagi oprzeć się już o nią. Nawet jeśli nie podamy dokładnych zależności pomiędzy η, D i ε. Choć metryka ze strony 32 powinna pozwolić na podanie stosownych zależności.

73^{16}: Jak argumentacja 1,2,3 podana poniżej prowadzi do konkluzji, że $\hat{x}_{n+1}$ jest ε_k-blisko do μ_k. Zabrakło głównego argumentu/wyliczenia.

74_3: W ostatniej linii dowodu czytelnik jest informowany, że "The proof of Lemma 4.2.5. remains the same, with a possible better restriction....". To oznacza, że po przejściu całej procedury zmieniamy cały dowód kluczowego lematy by główny dowód się udał. Czy nie dało się tego przewidzieć wcześniej?

Inne drobne niedociągnięcia/błędy:

5_{12}: Błędny rodzajnik "a the"

5_2: W pracy nie potrafię znaleźć definicji $\ell_\infty(G)$

7^2: Powinno być "is" zamiast "if"

7^{20}: Jako, że G jest grupą, w definicji miary niezmienniczej można użyć gA w miejsce $g^{-1}A$. Użycie elementu odwrotnego nic nie wnosi, poza odniesieniem do sytuacji klasycznej dla odwzorowań ciągłych (która nie jest i tak poruszana).

7_{19} : Dość niefortunny dobór oznaczeń $\mathcal{M}_G$ i $\mathcal{M}_E$ dla oznaczenia zbioru miar niezmienniczych dla G i ergodycznych dla G (a nie jak można by przypuszczać, niezmienniczych dla E). Bezpieczniejsze byłoby użycie np. oznaczenia $\mathcal{M}_G^e$.

7_8 : Dla pełności obrazu warto dodać "there exists a G-invariant Borel" *probability* "measure".

8^3 : Nie potrafię odnaleźć definicji "G-invariant" dla funkcji w $L^1(\mu)$. Podobnie oznaczenie $\mathbf{1}_P$ nie jest wyjaśnione.

8^3 : Brak założenia, że elementy podziału są nietrywialne, tzn. $\mu(P_i) > 0$, prowadzi do problemów w definicjach $H(P)$ i $H(P|Q)$.

9_5: "(see [21])" - dobrą praktyką jest podawanie dokładnego umiejscowienia cytowanego rezultatu. Inaczej czytelnik musi przejrzeć całą monografię czy pracę naukową w poszukiwaniu wyniku który ma zastosowanie. Szczególnie ma to znaczenie w przypadku prac o charakterze monograficznym (jak rozprawa doktorska) które stanowią pewną zamkniętą całość.

10^{15} : Powinno być "$gX \subset X$" *for every* $g \in G$.

10_{15} : Powinno być $D' = Dg$.

10_4: Formalnie B' jest blokiem, więc $g \in B'_D$ nie ma sensu. Powinno być albo D'_D albo stosowny komentarza.

16^{12} : Nadmiarowy nawias "))".

16_{18} : Powinno być $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$.

22_{10}: Czy K' było wcześniej zdefiniowane?

30: Początek sekcji 3.1.1, a szczególnie 2 akapit stanowią powtórzenie elementów z rozdziału 1.

31^{11}: W rozdziale 1 zdefiniowano dolna i górną gęstość Banacha dla podzbiorów G. Nie pojawia się tam definicja dla podzbiorów X, natomiast czytelnik w tym miejscu jest odsyłany do [8]. Jest to istotny brak konsekwencji.

31_{22}: Powinno być $\mathcal{T}'_x$ zamiast $\mathcal{T}'x$.

32_{12}: Definicja metryki dla miar która pojawia się w tym miejscu jest istotnie różna od metryki na stronie 7. Trudno stwierdzić czemu nie pojawia się w rozdziale 1.

33^1: Twierdzenie 3.1.4 jest powtórzeniem identycznego twierdzenia 1.0.7 z rozdziału 1.

34: Entropia została wprowadzona już na stronie 8, choć w tym miejscu pojawiają się pewne różnice (np. definicja $H_n(P)$. Jaki jest powód przytaczania definicji w tym miejscu zamiast odnośnika do rozdziału 1?

37^{13}: Definicja $\mathcal{B}_n$ przedstawiona przy pomocy P, Q jest dość zawiłą metodą powiedzenia, że chodzi o wszystkie możliwe bloki w produkcie alfabetów, jak to jest wymagane w definicji metryki d na stronie 32.

37_1: "These are the same partitions..." - po co czekać aż do strony 40 aby je zdefiniować bardziej formalnie?

39_2: Jako, że kolejność jest istotna warto napisać $Z = X \times Y$ tym bardziej, że X pojawia się później niż Y. Co więcej, taki precyzyjny opis pojawia się dopiero na stronie 40. W tym miejscu słowna prezentacja Z jest zbyteczna i niepotrzebna do wypowiedzi trzech kolejnych twierdzeń.

41^{14}: W pracy nie ma twierdzeń 3.5. i 3.6.

52_{14}: Pierwszy akapit jest powtórzeniem definicji ze strony 7.

55^7: Warto byłoby podać numer lematu z rozprawy który uzasadnia możliwość wyboru $\mathcal{L}$.

55^9: Gdzie zdefiniowano $U(y)$? W rozdziale 1 pojawia się $U(\mathcal{T})$ ale nie $U(y)$.

58_3: Definiujemy z nie $\hat{z}$ które jest dane.

68^2: "if in the proof of Lemma 4.2.5 we change" - lematy powinny być tak wypowiedziane, by nie było trzeba powtarzać części ich dowodów w zupełnie innych założeniach i kontekście ale stosować wprost.

68^{10}: "we define $\eta = \eta_1$ in Lemma.4.2.5" - w tym lemacie nie pojawia się η.

68^{11}: "Without loss of generality we improve" - zmiana stałej na mniejszą może mieć znaczący wpływ na dalsze rozumowania. Nie jest jasne co powstrzymało autora by przyjąć mniejszą stałą η_1 już na samym początku rozważań.

68^{14}: "Now we use Lemma 1.0.19 with proper parameters" - czyli z jakimi dokładnie? Co nas powstrzymuje by je opisać? Ten sam nieprecyzyjny opis powtarzany/kopiowany jest dalej, m.in. na stronie 70.

68^{17}: Powinno być $S_1 \in$ zamiast $S \in$. We wzorze powyżej S nie występuje. Podobny komentarz dotyczy 71^3 itd.

68^{17}: "By Lemma 4.2.4 we get that for any shape..." - w tym lemacie miara μ_1 nie występuje. Wypadałoby dodać zdanie komentarza jak otrzymać bliskość miary. Cały schemat jest potem powtarzany wielokrotnie, jednak w pierwszym kroku dobrze byłoby podać wartości parametrów, m.in. γ i ω_i które stosujemy.

69^9: Bloki testowe $\mathcal{B}_n$ są niezwykle ważne dla całej konstrukcji. Niestety trudno doszukać się w pracy ich formalnej definicji (choćby na stronach 63-65).

69^{20}: Brakuje ( ) przy 4.10.

W mojej opinii przedstawiona rozprawa, pomimo wskazanych wcześniej drobnych niedociągnięć spełnia z nawiązką wymagania stawiane w Ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*, rozszerzając w sposób istotny i głęboki wiedzę na temat własności miar niezmienniczych i entropii dla działań grup ze średnią. W pracy pojawiają się długie, zaawansowane rozumowania o wysokim stopniu skomplikowania. Dodatkowo wyniki przedstawione w rozprawie zdecydowanie znajdują się w czołówce tematyki badawczej związanej z działaniami grup topologicznych na przestrzeniach zwartych. **W związku z powyższym, wnioskuje o przyjęcie rozprawy doktorskiej i dopuszczenie mgra Sebastiana Edwarda Kopacza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Ze względu na wskazane powyżej usterki redakcyjne i kompozycyjne **nie** wnoszę o wyróżnienie rozprawy.