dr hab. Aneta Wróblewska-Kamińska
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa, Polska
awrob@impan.pl

Warszawa, 2024

Recenzja pracy doktorskiej „Nonautonomous Linear Differential Equations with Delays and Skew-product Dynamical Systems" autorstwa pana Marka Piotra Kryspina

Wstęp

Pan magister Marek Piotr Kryspin w przedstawionej pracy doktorskiej skupia się przede wszystkim na analizie ciągłej zależności od parametrów rozwiązań linowych równań typu parabolicznego z opóźnieniem. Rozważane przez niego opóźnienie jest zarówno stałe, ale też zależne od czasu.

Rozprawa oparta jest na trzech pracach opublikowanych w miedzynarodowych recenzowanych czasopismach oraz nieopublikowanych jeszcze rezultatach. Ten fakt świadczy pozytywnie o samej rozprawie. Są to wyniki powstałe we współpracy z promotorem Januszem Mierczyńskim oraz z Sylvią Novo, Rafaelem Obayą, a także samodzielne. Wspomniane publikacje to: *Parabolic differential equations with bounded delay*, M. Kryspin, J. Mierczyński, Journal of Evolution Equations (2023); *Systems of parabolic equations with delays: continuous dependence on parameters*, M. Kryspin, J. Mierczyński, Journal of Differential Equations (2024); *Oseledets decomposition on sub semiflows*, M. Kryspin, Electronic Journal of Differential Equations (2024). Rezultaty dostępne w tym momencie w repozytorium arxiv.org to: *Two dynamical approaches to the notion of exponential separation for random systems of delay differential equations*, M. Kryspin, J. Mierczynski, S. Novo, R. Obaya (2023).

Rozprawa jest obszerna - zajmuje 175 stron, składa się z ośmiu rozdziałów: wprowadzenia, wiadomości wstępnych z notacją, pięciu rozdziałów zasadniczych dla pracy zawierających rezultaty i dowody. Pracę dopełniają rozważania o możliwych rozszerzeniach, dwa krótkie dodatki, bibliografia oraz indeks symboli.

Omówienie pracy

Pierwszy rozdział to rzetelne wprowadzenie. Opisuje on motywacje oraz rezultaty rozprawy. Zawiera sformułowanie problemów, dość szczegółowo, acz zwięźle przedstawia problemy i metodologię postępowania w ich rozwiązaniu. Autor rozprawy krótko odnosi się do literatury, podając przegląd wiedzy i metodologii w dziedzinie. To co cenne w tej części, to jasny sposób przedstawienia zasadniczych elementów pracy oraz wykorzystywanych metodologii. Dzięki temu czytelnik jest w gładki sposób może przejść do dalszych części pracy.

Rozdział drugi to wprowadzenie potrzebnej w dalszej części notacji, części narzędzi i podstawowych twierdzeń.

W rozdziale 3, rozważany jest układ n parabolicznych równań różniczkowych, gdzie stałe opóźnienie pojawia się w członie zerowego rzędu (tak jak w całej rozprawie). Problem postawiony jest na obszarze ograniczonym D (o gładkim brzegu) w Euklidesowej przestrzeni N wymiarowej. Człon eliptyczny jest w postaci dywergencyjnej. Człony zerowego rzędu, w tym człon z opóźnieniem, traktowane są jako zaburzenie. Układ uzupełniony jest o dane początkowe zdefiniowane na odcinku czasowym odpowiadającym opóźnieniu. Główne równanie rozumiane jest w abstrakcyjnym sensie (Cauchy'go), tj. rozwiązanie u jest funkcją jednej zmiennej t o wartościach w przestrzeni Banacha $L^p(D; R^N)$ co pozwala na zdefiniowanie, tzw. rozwiązań mild (ang.), zamiast klasycznych słabych. Jest to naturalne dla układów dynamicznych generowanych przez równania rozważane w rozdziale 3 i 4. Rozwiązania typu mild są tu ciągłymi funkcjami zadanymi jako całki oparte o operator, który rozwiązuje układ równań tylko z członami pierwszego i drugiego rzędu, a człony zerowego rzędu pojawiają się jako parametry (zaburzenia). Układy rozważane są z zerowymi warunkami Dirichleta na brzegu, ale również z bardziej ogólnymi typu Robin (włączając warunek Neumanna). W rozdziale 3 wykazano istnienie oraz jednoznaczność rozwiązań (mild solutions) oraz ciągłą zależność od parametrów, tj.: danych początkowych (z historią), współczynników w liniowym członie eliptycznym, parametrów (współczynników) przy członach pierwszego oraz zerowego rzędu oraz parametrów przy warunku brzegowym. Wynik ten oznacza, że małe zaburzenia w parametrach układu prowadzą jedynie do małych zmian w rozwiązaniach (mild solutions). Wykazano również regularyzację - poprawę klasy

AWK

całkowalności - rozwiązań w czasie. Jeśli rozwiązania mają wartości w przestrzeni L_p to po pewnym czasie T_1, wartości te należą do L_q gdzie $q > p$. Rozdział ten skupia się na opóźnieniu stałym w czasie. Opóźnienie jest obecne w członie zerowego rzędu.

W rozdziale 4 rozwiązany jest podobny problem jak w rozdziale 3, jednak opóźnienie ma bardziej ogólną formę i zależy od czasu, przy czym jest ograniczone ($0 \leq R(t) \leq 1$). Jednocześnie by zagadnienie było dobrze postawione od danych początkowych, wymagana jest wyższa regularność - ciągłość po czasie na odcinku $[-1, 0]$. Do układu dodano również wyraz zerowego rzędu bez opóźnienia. Rezultatem tego rozdziału ponownie jest istnienie, jednoznaczność rozwiązań typu mild oraz ich ciągła zależność od parametrów: współczynników w operatorze eliptycznym, współczynników przy wyrazach pierwszego i zerowego rzędu, współczynników przy danych na brzegu oraz parametru związanego z opóźnieniem.

W obu powyższych rozdziałach by pokazać istnienie rozwiązań wykorzystano metodę punktu stałego lokalnie w czasie, następnie dzięki odpowiednim oszacowaniom przedłużono rozwiązania do globalnych. Wprowadzenie odpowiedniej topologii (słabej-*) i zastosowanie metod prezwartościowych pozwala na uzyskanie ciągłej zależności od danych. Najpierw od danych początkowych, następnie od parametrów i opóźnienia, ostatecznie całościowo. Wykorzystano teorię operatorów sprzężonych. Rozważania bazują na teorii równań liniowych bez opóźnienia a następnie, ponieważ opóźnienie jest w członie zerowego rzędu, traktowane jest ono jako zaburzenie.

Rezultat z rozdziału 5 to kolejny krok w kierunku uogólnienia opóźnienia - tym razem rozważane jest ono w formie miary ze znakiem. Równanie jest natomiast uproszczone w porównaniu z dwoma poprzednimi rozdziałami i zamiast równania cząstkowego mamy tu do czynienia z nieautonomicznym linowym równaniem zwyczajnym. Warunek początkowy to funkcja ciągła. W tej części pracy ponownie wykazano, że równanie posiada jednoznaczne rozwiązanie i zależy ono w sposób ciągły od odwzorowań o wartościach w miarach reprezentujących opóźnienie. Tu metodologia oparta jest na twierdzeniach dotyczących ciągłej zależności punktów stałych dla operatorów kontrakcji od parametrów.

Kolejna część to jeszcze ogólniejsze rozważania. Parametry w równaniu nie zależą od czasu bezpośrednio, ale są związane pewną abstrakcyjną przestrzenią probabilistyczną, a rozważane problemy związane są z losowym układem równań różniczkowych.

Rozdział 6 to abstrakcyjny rezultat związany bardziej z ogólną teorią a nie bezpośrednio równaniami różniczkowymi. Przedstawiona jest koncepcja dekompozycji Oseledetsa. Jest to wprowadzenie do następnego rozdziału.

Rozdział 7 natomiast dotyczy istnienia eksponencjalnej separacji typu II dla układu równań różniczkowych na przestrzeni Banacha.

Metodologia tej części pracy opiera się na obserwacji, że jeśli w jednej przestrzeni istnieją nieimiennicze podprzestrzenie, to podobne typy nieimienniczych podprzestrzeni będą również istnieć w przestrzeniach w włożonych w nich w sposób ciągły oraz że wykładniki Lapunowa w przestrzeni włożonej nie ulegają zmianie. Jeśli chodzi o istnienie i skończoność wykładników Lapunowa losowych równań różniczkowych, autor korzysta z ergodycznego twierdzenia Birkhoffa i subaddytywnego ergodycznego twierdzenia Kingmana. Aby zrozumieć asymptotyczne zachowanie rozwiązania, stosuje teorię związaną z "generalized principal Floquet subspaces", rozkładem Oseledetsa i uogólnioną separacją wykładniczą. Rozdział 7 pracy w istotnej części oparty jest na wykorzystaniu teorii rozwiniętej wcześniej przez promotora - J. Mierczyńskiego.

Następna część pracy to krótka dyskusja możliwych rozszerzeń pracy (rozdział 8), Appendix A, B - część ta to uzupełnienie odpowiednio poprzednich trzech rozdziałów.

Praca kończy się bibliografią zawierającą 102 pozycji, które odnoszą się do treści pracy w odpowiedni sposób.

Opinia

Pan Marek Kryspin odpowiada w swojej pracy na fundamentalne i naturalne pytania pojawiające się przy analizie równań z opóźnieniem - istnienie, jednoznaczność, jak zmieniają się rozwiązania przy zaburzaniu danych i parametrów. W mojej opinii atutem tej pracy jest jej spójność. Obrana problematyka jest rozwijana przez zdawanie kolejnych pytań i znajdowanie na nie odpowiedzi. Praca ewoluuje od prostszych do trudniejszych zagadnień, co pozwala stopniowo zapoznać się z tematyką, trudnościami, technikami. Pokazuje to też proces w jakim pan Kryspin rozwijał swój matematyczny warsztat.

W mojej opinii cała rozprawa napisana jest na bardzo dobrym poziomie. Rozważane zagadnienia przedstawione są w sposób przejrzysty i bardzo szeroki. Widoczne jest, że praca wymagała głębokiego zrozumienia wykorzystywanych technik i metod z teorii równań różniczkowych, analizy matematycznej i funkcjonalnej. Autor wykazuje dobrą ogólną wiedzę teoretyczną w swojej dyscyplinie. Również w osobistym kontakcie, podczas referatów i rozmów naukowych umiejętnie argumentuje swoje tezy.

Podjęta tematyka dotyka fundamentalnych problemów. Tematyki są nietrywialne. Rezultaty zawarte w pracy w mojej opinii są interesujące również dla szerszego grona naukowego. Choć dla mnie osobiście teoria nielinowych równań jest bardziej fascynująca.

MG

Redakcja rozprawy jest bardzo czytelna, przejrzysta, dokładna. Układ pracy, podział na podrozdziały oraz ich zawartość ułatwia zapoznanie się z treścią i jej zrozumienie. W sposób jasny przedstawione są metodologie, argumenty oraz kolejne rozszerzenia problemu. Kilka znalezionych przeze mnie nieścisłości nie umniejsza wartości całej rozprawy. Poniżej przedstawię kilka drobnych uwag i pytań.

1.) W rozdziale 3 nasuwa się naturalne pytanie pytanie czy rozwiązania znajdują się w przestrzeniach typu Soboleva?

2.) Nie jest jasne, dlaczego na stronie 51 przy oszacowaniu I_1 po drugiej nierówności pojawił się współczynnik n^2K.

3.) Czy w rozważaniach związanych z rozdziałem 4, gdy opóźnienie zmienia się w czasie, dopuszczalne jest by wraz z czasem ograniczenie górne na $R(t)$ mogło ono rosnąć, np. tak by ująć całą historię?

4.) W rozdziale 5 mamy ogólniejsze opóźnienie, ale równanie jest już w bardzo uproszczonej formie. Czy można rozważać układ równań cząstkowych jak w rozdziałach 3 i 4?

5.) Na poziomie redakcyjnym znalazłam kilka (nielicznych) błędów interpunkcyjnych. W zdaniu poniżej równania (3.3.7) brakuje orzeczenia. Brak kropki na końcu zdania przy formule (3.4.8). Na środku strony 76, przy przypisaniu wartości ζ dwie ostatnie równości są identyczne. W niektórych miejscach przy przechodzeniu do granicy w ciągach o kilku indeksach brakuje mi wyraźnego dopisku z jakim parametrem przechodzi się do granicy w danym kroku. W pierwszym zdaniu rozdziału 5.4 brakuje: for $i = 1, ..., n$. W rozdziale 2.1.2 przy definicji słabej-* mierzalności dodałabym: for each $x \in X$.

Konkluzja

Wyniki uzyskane w przedstawionej przez magistra Marka Piotra Kryspina pracy doktorskiej oceniam pozytywnie. Podjęte przez niego problemy naukowe zostały rozwiązane w sposób oryginalny. Praca jest przejrzysta i dokładna.

W swojej rozprawie wykazuje on znajomość teorii, metod oraz dorobku nauki w dyscyplinie matematyka.

Potrafi odnieść się i ocenić dotychczasowy dorobek naukowy w dziedzinie oraz krytycznie porównać swoje wyniki z dostępnymi rezultatami.

W mojej opinii pan Kryspin swoją pracą wykazuje, że jest matematykiem potrafiącym w dużym stopniu samodzielnie powadzić pracę naukową. Skutecznie rozwija on swoje matematyczne zainteresowania, czym przyczynia się do rozwoju dziedziny.

Uważam, że przedstawiona rozprawa „Nonautonomous Linear Differential Equations with Delays and Skew-product Dynamical Systems" pana Marka Piotra Kryspina spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Aneta Wróblewska - Kamińska

dr hab. Aneta Wróblewska-Kamińska