dr hab. Tomasz Adamowicz, prof. IMPAN
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
email: T.Adamowicz@impan.pl

Warszawa, 23 września 2024r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR JULII LENCZEWSKIEJ
"Hardy inequalities and nonlocal geometry"

Rozprawa doktorska Pani Lenczewskiej została napisana pod opieką Pana dra hab. Tomasza Grzywnego (PWr) a jej wyniki należą do teorii nielokalnych operatorów i przestrzeni ułamkowych oraz geometrycznej analizy.

Materiał rozprawy jest oparty na następujących trzech artykułach i jednym preprincie:

(1) Krzysztof Bogdan, Tomasz Jakubowski, Julia Lenczewska, Katarzyna Pietruska-Pałuba, *Optimal Hardy inequality for the fractional Laplacian on L^p*, J. Funct. Anal., 282(8): Paper No. 109395, 2022.

(2) Michał Kijaczko, Julia Lenczewska, *Sharp Hardy inequalities for Sobolev–Bregman forms*, Math. Nachr., 297(2):549-559, 2024.

(3) Wojciech Cygan, Tomasz Grzywny, Julia Lenczewska, *Asymptotics and geometric flows for a class of nonlocal curvatures*, arXiv:2308.16660.

(4) Tomasz Grzywny, Julia Lenczewska, *Asymptotic expansion of the nonlocal heat content*, Studia Math., 270(3):339-359, 2023.

Powyższe artykuły ukazały się w rzetelnych lub bardzo dobrych czasopismach, np.: JFA, Math. Nachrichten. Dwie spośród powyższych publikacji napisane są wspólnie z Promotorem rozprawy (w tym jeden również z Wojciechem Cyganem), a pozostałe dwa z, w sumie, czterema Współautorami. Dobrze świadczy to o zdolności do współpracy naukowej Doktorantki.

Opis i ocena pracy

Rozprawa napisana w języku angielskim ma 141 stron, zaś jej bibliografia liczy 142 pozycje. Praca podzielona jest na siedem rozdziałów plus blibliografia oraz indeks oznaczeń, każdy składający się z podrozdziałów adekwatnych do podziału materiału.

Praca doktorska jest napisana w przemyślany sposób i z troską o czytelnika. Na uwagę zasługują liczne nietrywialne przykłady ilustrujące dyskusję rozprawy.

Tematyka rozprawy dotyczy nielokalnych operatorów i związanych z nimi nierówności typu Hardy'ego oraz geometrii zbiorów. Doktorantka rozwija aparat pojęciowy i narzędzia matematyczne niezbędne do geometrycznej analizy w ujęciu operatorów nielokalnych i ułamkowych przestrzeni funkcyjnych. Na szczególną uwagę zasługują wyniki rozdziałów 5-7 leżące na pograniczu badań z obszarów analizy i geometrii, a kontynuacja badań zapoczątkowanych w tych rozdziałach może przyczynić się do dalszego rozwoju teorii potencjału i pojęć krzywizny brzegu obszaru w $\mathbb{R}^n$ lub w bardziej ogólnych przestrzeniach metrycznych z miarą.

Rozdział pierwszy wprowadza czytelnika w tematykę rozprawy i w przejrzysty sposób prezentuje wyniki doktoratu. Podobnie oceniam **rozdział drugi**, w którym dyskutowana jest notacja, podstawowe definicje oraz wstępne rezultaty.

Celem **rozdziału trzeciego** jest dyskusja oraz dowód optymalnej nierówności Hardy'ego dla funkcji L^p (twierdzenia 3.1.1 oraz 3.1.2). Fundamentem rozważań jest uzyskanie tożsamości typu Hardy'ego (3.1.13) dla formy Sobolewa–Bregmana (3.1.7). Podobne tożsamości dla funkcji gładkich o zwartym nośniku uzyskano w pracy [73] w 2008 roku (według spisu literatury rozprawy) oraz dla funkcji klasy L^2 w pracy [27] z 2016-ego roku. Nierówność Hardy'ego dla funkcji L^p wynika natychmiast z tożsamości typu Hardy'ego (patrz dyskusja na str. 17 rozprawy) i jest znana w literaturze (praca [107]). Jednak stała w tej nierówności nie jest optymalna i dopiero twierdzenie 3.1.2 rozprawy skutkuje taką stałą. Jest to możliwe dzięki nowemu podejściu do zagadnienia, które nie łączy nierówności typowych dla funkcji L^2 z tożsamościami algebraicznymi dla funkcji L^p, ale za to wykorzystuje dywergencję Bregmana (3.1.10) i nierówności typowe dla funkcji L^p. Dowód twierdzenia 3.1.1 wynika z lematów pomocniczych, udowodnionych w rozdziałach 3.2.1-3.2.3, dotyczących reprezentacji formy Sobolewa–Bregmana jako granicy form dla operatorów na półgrupach (3.2.20). Natomiast dowód optymalności stałej (twierdzenie 3.1.2) opiera się na technicznych lematach 3.4.1-3.4.3. Kluczowym okazuje się wybór funkcji testującej (3.4.5) i nietrywialne oszacowania całek w formie Sobolewa–Bregmana (str. 31 rozprawy). Zastosowania uzyskanej nierówności obejmują operatory typu Schrödingera (rozdział 3.5).

Wyniki **rozdziału czwartego** są naturalną kontynuacją badań przedstawionych w poprzednim rozdziale i dotyczą uogólnienia nierówności Hardy'ego typu L^p na półprzestrzeń i obszary wypukłe w $\mathbb{R}^n$. Podobne wyniki dla funkcji z L^2 uzyskano w pracy [26]. Dowód twierdzenia 4.1.1 (dla półprzestrzeni) jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.1.1, tzn. pokazanie nierówności Hardy'ego sprowadza się do lematu 4.2.1, dającego reprezentrację formy Sobolewa–Bregmana na półprzestrzeni, zaś dowód optymalności wymaga wyboru ciągu funkcji testujących (4.2.5) i żmudnych oszacowań formy Sobolewa–Bregmana tych funkcji, przedstawionej jako suma sześciu całek po odpowiednich podzbiorach półprzestrzeni (str. 42 rozprawy). Dowód nierówności Hardy'ego dla obszarów wypukłych jest mniej techniczny i estetycznie łączy analizę z geometrią, a wynika z wariantu nierówności Hardy'ego (4.3.3), rozumowania z pracy [111] oraz reprezentacji obszaru poprzez rzuty na przecinające go proste (str. 50 rozprawy).

Rozdział piąty zawiera dyskusję nielokalnych pojemności, jednego z ważniejszych pojęć geometrycznej analizy i analizy na przestrzeniach metrycznych, oraz ich związków z nielokalnymi nierównościami Hardy'ego, Sobolewa oraz pojęciem perymetru zbioru (ang. *perimeter* odpowiada polskiemu słowu *obwód*, które nie oddaje w pełni natury badanego operatora Per). Ostatnie lata przynoszą zainteresowanie tym pojęciem w kontekście ułamkowych przestrzeni Sobolewa (np. prace [130,131]), stąd badania nielokalnych pojemności przedstawione w rozprawie powinny zwrócić uwagę innych badaczy oraz znaleźć zastosowania w badaniach nielokalnych przestrzeni Sobolewa na obszarach o nietrywialnej geometrii, takich jak obszary NTA oraz w zagadnieniach teorii potencjału, na przykład w rozwiązywalności (nielokalnego) zagadnienia Dirichleta dla funkcji i przekształceń harmonicznych. Na szczególną uwagę zasługują: lemat 5.2.1 (o gęstości funkcji klasy C_0^∞ w nielokalnych przestrzeniach Sobolewa W_p^ν) oraz propozycje 5.3.1 i 5.3.4 zawierające podstawowe własności nielokalnych pojemności. Choć dowody tych obserwacji są standardowe dla teorii pojemności, to ich wartość leży w zastosowaniach tych wyników. Kolejne ciekawe wyniki dotyczą nierówności Hardy'ego dla miar z wagami i warunkiem podwajania (twierdzenie 5.4.1 oraz wniosek 5.4.4) zilustrowane przykładami (5.4.5 i 5.4.6). Z wyników tych otrzymujemy twierdzenie typu Sobolewa o zanurzaniu (lemat 5.4.8). Niejako sumą wyników tego rozdziału jest twierdzenie 5.4.11, w którym podano oszacowanie na nielokalną pojemność kuli (wzór 5.4.18) przy założeniu radialności miary. Tego typu wynik być może mógłby posłużyć, na przykład, do uzyskania nielokalnego odpowiednika testu Wienera. Ostatni wynik rozdziału, to twierdzenie 5.5.2, w którym nielokalna pojemność zwartych zbiorów scharakteryzowana została poprzez pojęcie nielokalnego perymetru. Trochę szkoda, że w dyskusji w rozdziale 5.5. nie rozwinięto bardziej geometrycznych wniosków z twierdzenia 5.5.2, np.: dla jakich zbiorów zastosowanie pojemności $\mathrm{Cap}^*_{\nu,1}$ może uprościć obliczenia pojemności $\mathrm{Cap}_{\nu,1}$ oraz w jaki sposób geometria obszaru wpływa na oszacowania Per_ν?

Centralnym obiektem **rozdziału szóstego** jest pojęcie pojemności cieplnej $\mathbb{H}_\Omega$ (ang. *heat content*) i jego własności, zdefiniowane dla zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^d$ o skończonej mierze Lebesgue'a. Głównym wynikiem rozdziału, nawiązującym do pracy [50], jest asymptotyczne rozwinięcie funkcji $\mathbb{H}_\Omega$. W tym celu pokazane są ogólne wyniki dla półgrup miar probabilistycznych (twierdzenia 6.3.3, 6.3.6 i kluczowy wniosek 6.3.8) zdefiniowanych na początku rozdziału szóstego. W przypadku ułamkowego Laplasjanu analogiczne rozwinięcia asymptotyczne przyjmują szczególne postaci (twierdzenia 6.3.10 i 6.3.11), łącząc ze sobą stowarzyszoną pojemność cieplną H_Ω (tzn. $\mathbb{H}_\Omega = |\Omega| - H_\Omega$), klasyczny i nielokalny perymeter zbioru Ω. Dowody tych twierdzeń są techniczne i wykorzystują wcześniejsze obserwacje z prac [50] i [90]. Warto dodać, że tak jak w poprzednich rozdziałach również i w tym przedstawiono przykłady ilustrujące wyniki badań (rozdział 6.3.1). Jedna z motywacji dla badań tego rozdziału, przedstawiona w postaci pytania na str. 89 rozprawy, dotyczy interpretacji dalszych wyrazów asymptotycznego rozwinięcia funkcji $\mathbb{H}_\Omega$ w terminach (nielokalnej) średniej krzywizny. Badaniom nad tym pojęciem poświęcony jest ostatni rozdział pracy doktorskiej Pani Lenczewskiej.

Rozdział siódmy zawiera jedne z istotniejszych wyników rozprawy, których konsekwencje powinny być badane i rozwijane dalej. Prezentacja w tej części doktoratu zaczyna się od przypomnienia definicji krzywizny średniej zbioru klasy C^2 w przestrzeni euklidesowej oraz zdefiniowania różnych jej nielokalnych odpowiedników (7.1.3), (7.1.4) i (7.1.6) a także odpowiedników krzywizny kierunkowej (7.1.9) i (7.1.10). Pomocnicze obserwacje przedstawione w rozdziale 7.2 obejmują reprezentacje nielokalnych krzywizn średnich w ustalonym układzie współrzędnych (propozycja 7.2.1), ułatwiające dowody dalszych wyników, oraz nielokalny odpowiednik klasycznego wzoru (7.1.1) dla krzywizny średniej jako uśrednionej całki z krzywizny kierunkowej (twierdzenie 7.2.2). W propozycji 7.3.1 pokazano, że zaproponowana definicja (7.1.8) krzywizny średniej posiada własności monotoniczności, niezmienniczości ze względu na translacje, a przede wszystkim jednostajnej ciągłości. Ta ostatnia własność pozwala na aproksymację klasycznej krzywizny średniej jej nielokalnym odpowiednikiem H_ϕ przy założeniach (7.1.6) na ϕ. Dzięki tej obserwacji nielokalna krzywizna może znaleźć zastosowania w klasycznych zagadnieniach z geometrii różniczkowej i geometrycznej analizy. Dowód propozycji 7.3.1 w interesujący sposób wykorzystuje definicję H_ϕ i jej podstawowe własności oraz geometrię zbiorów klasy $C^{1,1}$. Co więcej, w połączeniu z wynikami pracy [42], propozycja 7.3.1 implikuje istnienie i jednoznaczność rozwiązań lepkościowych zagadnienia Cauchy'ego (7.3.9). Uzupełnieniem dyskusji w rozdziale 7.3 jest twierdzenie 7.3.6, w którym udowodniono, że nielokalna krzywizna średnia H_ϕ jest pierwszą wariacją nielokalnego perymetru Per_ϕ. Wynik ten czeka jednak na swoje zastosowania nie przedstawione w rozprawie.

Znaczenie i wartość definicji z rozdziału 7.1 pełniej ukazują sie w rozdziale 7.4, gdzie opisane są wyniki dotyczące asymptotyki nielokalnych krzywizn i aproksymacji klasycznej krzywizny średniej. Dowód twierdzenia 7.4.1 jest techniczny i w swej idei naturalny, ale jego konsekwencją jest wniosek 7.4.2, dający łatwo weryfikowalne warunki na miary, skutkujące aproksymacją krzywizny średniej przez jej nielokalne odpowiedniki. Wynik ten dobrze ilustrują przykłady 7.4.7-7.4.9, które dodatkowo pozwalają uzyskać pewne wyniki z prac [42] i [118] jako przypadki szczególne twierdzenia 7.4.1. Kolejną konsekwencją tego wyniku jest stabilność rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (7.3.9) przy lokalnie jednostajnej zbieżności rozwiązań lepkościowych (twierdzenie 7.4.5). Wyniki rozdziału 7.4 uzupełnia dyskusja asymptotyki dla nielokalnych anizotropowych krzywizn oraz ich relacja z nielokalnym anizotropowym perymetrem, w tym odpowiedź na pytanie otwarte postawione w uwadze 4.12 w pracy [42]. Publikacja ta ukazała się w prestiżowym czasopiśmie *Comm. in PDEs* a fakt, że wyniki rozdziału siódmego kilkukrotnie uogólniają lub odpowiadają na pytania postawione w tej pracy, podkreśla wartość i rangę pracy wykonanej przez Doktorantkę oraz Współautorów preprintu [53]. Ponadto, dalsze zastosowania wyników rozdziału siódmego nawiązują do pracy [55], która również ukazała się w prestiżowym *Journal of EMS*.

Uwagi redakcyjne i językowe

Praca jest dobrze zredagowana. Nie znalazłem ani błędów edytorskich, ani błędów typograficznych.

Podsumowanie

Całość rozprawy oceniam pozytywnie. Wyniki w niej zaprezentowane wymagają dobrego zrozumienia postawionych problemów badawczych, wykorzystania narzędzi matematycznych spoza dziedziny operatorów nielokalnych oraz wysokich umiejętności obliczeniowych.

Uważam, że rozprawa Pani mgr Julii Lenczewskiej spełnia ustawowe, a także zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie jej Autorki do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Tomasz Adamowicz

Tomasz Adamowicz