

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ
'TREES, IDEALS
AND CARDINAL INVARIANTS OF THE REALS'

ALEKSANDER CIEŚLAK

Celem zaprezentowanej pracy jest analiza współczynników kardynalnych powiązanych z wybranymi rodzajami drzew oraz definiowalnymi ideałami na zbiorach przeliczalnych. Praca składa się z trzech głównych rozdziałów. Pierwszy zawiera listę typów badanych drzew wraz z ich podstawowymi własnościami, oraz kalkulację współczynników kardynalnych powiązanych z Borelowskimi ideałami tych drzew. Do badanych drzew należą uogólnienia drzew Sacksa, Millera i Lavera, oraz pseudo-drzewa powiązane z ideałem domkniętych zbiorów miary zero. Rozdział drugi zawiera oszacowania współczynników kardynalnych ideałów drzewiastych dla wspomnianych typów drzew. Główny nacisk położony jest na addytywności, coveringi, kofinalności, 'incompatibility shrinking number' oraz 'antichain number'. Rozdział trzeci zawiera analizę współczynników kardynalnych powiązanych z ideałami na zbiorach przeliczalnych. Główny nacisk położony jest na ω -wersje klasycznych współczynników, $+$ -coveringi oraz wielkości antylańcuchów algebry $\mathcal{P}(\omega)$ modulo ideał. Przeanalizowany zostaje również ideał splitujący. Zaprezentowana praca kontuuje wątki badane przez takich matematyków jak Brendle, Hrušák, Khomskii, Sabok, Spinas, Steprāns, Rosłanowski, Wohofsky czy Zapletal.

W rozdziale pierwszym wspomniane zostają wszystkie podstawowe definicje potrzebne w zaprezentowanej pracy. W szczególności, przypomniane zostają klasyczne współczynniki kardynalne, systemy relacyjne, podstawowe pojęcia związane z ideałami na zbiorach przeliczalnych oraz podstawowe definicje dotyczące drzew czy forsyngu.

Rozdział drugi zawiera podstawowe definicje dotyczące drzew i ideałów drzewiastych. Dyskutowane są następujące typy drzew:

- dwa typy drzew dodające liczbe "bounded infinitely equal" - $\mathbb{IE}_F$ oraz $\mathbb{S}_F$,
- dwa typy drzew dodające liczbe "infinitely equal" na przestrzeni Baire'a - $\mathbb{IE}$ oraz $\mathbb{FM}$,
- drzewa Millera oraz Lavera splitujące pozytywnie względem ideałów $\mathcal{I}$ - $\mathbb{M}_{\mathcal{I}}$ oraz $\mathbb{L}_{\mathcal{I}}$,
- drzewa 'splitting tree' $\mathbb{SP}$ dodające 'splitting real' oraz drzewa $\mathbb{ED}_F$ dodające 'bounded eventually different real',
- schematy Hurewicz - pojęcie pseudo-drzewa powiązane z ideałem domkniętych zbiorów miary zero.

Dla każdego ze wspomnianych typów drzew zaprezentowana zostaje fuzja, ciągłe czytanie nazw, powiązana dychotomia oraz policzone zostają współczynniki części

Borelowskiej ideału drzewiastego.

Rozdział trzeci zawiera rozważania dotyczące współczynników kardynalnych ideałów drzewiastych dla wspomnianych typów drzew. W sekcji pierwszej dowodzone jest że typ liczby dodawanej przez forcing drzewiasty implikuje ograniczenia górne na 'covering number' powiązanego ideału. Dowiedzione zostaje, że typ drzew $\mathbb{L}_{\mathcal{J}}$ nigdy nie dodaje 'random real' oraz że $\mathbb{L}_{\mathcal{E}\mathcal{D}_{f,i}}$ ma własności Lavra. Pokazujemy również, że dla ideałów mizernych $\mathcal{J}$, zarówno $\mathbb{L}_{\mathcal{J}}$ jak i $\mathbb{M}_{\mathcal{J}}$ dodaje 'groupwise dense real'. Jako wniosek otrzymujemy że dla takich ideałów niesprzeczna jest nierówność $\text{cov}(\mathcal{I}(\mathbb{T})) < \text{add}(\mathcal{M})$. W sekcji drugiej rozważany jest 'incompatibility shrinking number' $is(\mathbb{T})$. Współczynnik ten odgrywa istotną rolę w badaniu addytywności, kofinalności oraz 'antichain number'. Dowodzimy, że

- $is(\mathbb{T}) = \text{add}(\mathcal{M})$ dla typów drzew dodający liczbę Cohena,
- $is(\mathbb{T}) \geq \text{cov}(\mathcal{M})$ dla drzew $\mathbb{IE}_F$ oraz $\mathbb{S}_F$,
- $is(\mathbb{T}) \geq \min\{\mathfrak{b}, \text{cov}_+(\mathcal{J})\}$ dla drzew $\mathbb{M}_{\mathcal{J}}$ i $\mathbb{L}_{\mathcal{J}}$,
- $is(\mathbb{T}) \geq \min\{\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{I}_B(\mathbb{T}))\}$ dla drzew $\mathbb{M}_{\mathcal{J}}$.

Sekcja trzecia zawiera szereg oszacowań dolnych dla 'antichain numbers' $\mathfrak{a}(\mathbb{T})$ dla rozważanych typów drzew. W szczególności dowodzimy, że:

- $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{a}(\mathbb{S}_F) \cdot \mathfrak{a}(\mathbb{IE}_F)$,
- $\min\{is^*(\mathbb{ED}_F), \text{cov}(\mathcal{M})\} \leq \mathfrak{a}(\mathbb{ED}_F)$,
- $\min\{\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{I}_B(\mathbb{M}_{\mathcal{J}}))\} \leq \mathfrak{a}(\mathbb{M}_{\mathcal{J}})$
- $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}(\mathbb{PE})$.

W sekcji czwartej rozważane zostają addytywności ideałów drzewiastych. Wyniki tej sekcji są uogólnieniami znanych metod. Przy założeniu $\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, dowodzimy ogólne twierdzenie mówiące, że istnieć projekcji drzew na system relacyjny $\mathcal{R}$, w naturalny sposób daje oszacowanie górne $\text{add}(\mathcal{I}(\mathbb{T}))$ postaci $\mathfrak{b}_{\sigma}(\mathcal{R})$. Następnie dowodzimy, że:

- $\mathbb{IE}_F$ i $\mathbb{S}_F$ mają $\mathfrak{b}$ -projekcje oraz $\mathfrak{s}$ -projekcje,
- $\mathbb{M}_{\mathcal{J}}$ i $\mathbb{L}_{\mathcal{J}}$ mają $\mathfrak{b}$ -projekcje,
- $\mathbb{M}_{\mathcal{J}}$ ma $\mathfrak{s}$ -projekcje,

W sekcji piątej dowodzimy więcej oszacowań na addytywność ideałów drzewiastych. Rezultaty tej sekcji stanowią uogólnienia klasycznych dowodów dla drzew Sacka, Millera oraz Lavra. Wpierw dowodzimy, że nierówność $\mathfrak{t} \leq \text{add}(\mathbb{L}_{\mathcal{J}})$ zachodzi dla ideałów F_{σ} . Pokazujemy, że 'nigdzie-dystrybutywność' drzew $\mathbb{T}$ daje naturalne oszacowanie górne dla $\text{add}(\mathcal{I}(\mathbb{T}))$, a następnie dowodzimy, że:

- $\mathbb{IE}_F$ oraz $\mathbb{S}_F$ są $\mathfrak{b}$ -nigdzie-dystrybtywne,
- $\mathbb{M}_{\mathcal{J}}$ oraz $\mathbb{L}_{\mathcal{J}}$ są $\mathfrak{h}_{\mathcal{J}}$ -nigdzie-dystrybtywne dla mizernych ideałów posiadających drzewo bazowe.

Używając tych rezultatów dowodzimy niesprzeczność $\text{add}(\mathcal{I}(\mathbb{T})) < \text{cov}(\mathcal{I}(\mathbb{T}))$. W ostatniej, szóstej sekcji analizowane są kofinalności ideałów drzewiastych przy użyciu metod wypracowanych w pracy autorów Brendle Khomskii, Wohofsky. W szczególności dowodzimy, że typ drzew $\mathbb{L}_{\mathcal{J}}$, gdzie $\mathcal{J}$ jest nigdzie-maksymalnym P -ideałem, ma własność 'constant or 1-1 property', by jako wniosek otrzymać nierówność $\text{cof}(\mathcal{I}(\mathbb{L}_{\mathcal{J}})) > \mathfrak{c}$.

Rozdział czwarty zawiera rozważania dotyczące współczynników kardynalnych definiowalnych ideałów na zbiorach przeliczalnych. W sekcji pierwszej gromadzimy

wszystkie klasyczne ideały rozważane w tej pracy. Głównie są to ideały Borelowskie, analityczne P -ideały oraz ideały typu F_σ . W tej sekcji wyliczone zostają ω -wersje klasycznych współczynników tych ideałów. W sekcji drugiej oraz trzeciej rozważane są dwa szczególne ideały, 'splitting ideal' oraz 'infinitely equal' ideał. Wyliczone zostają ich współczynniki kardynalne oraz ich pozycja w porządku Katetova. Jako rezultat, otrzymujemy nowe ograniczenie górne coveringu ideału zbiorów asymptotycznej gęstości zero. W sekcji czwartej badany jest współczynnik cov_+^ω oraz dowodzone są kolejne rezultaty dotyczące coveringu wybranych ideałów. W sekcji piątej podane zostaje oszacowanie dolne dla współczynnika 'antichain number' algebry $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$. Jako wniosek otrzymujemy wzmocnienie oszacowania Steprāns'a na 'antichain number' ideału nwd.

Główny wkład tej pracy stanowi:

- wyizolowanie oraz analiza współczynnika kardynalnego 'incompleteness shrinking number', którego wyliczenie daje częściowe rozwiązanie problemu postawionego przez badaczy Brendle, Khomskii and Wohofsky,
- kalkulacja współczynników Borelowskiej części ideałów drzewiastych drzew $\mathbb{M}_{\mathcal{I}}$ oraz $\mathbb{L}_{\mathcal{I}}$,
- analiza współczynników kardynalnych ideałów drzewiastych,
- wyliczenie ω -wersji klasycznych współczynników ideałów na zbiorach przeliczalnych,
- oszacowanie dolne dla 'antichain number' algebry $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ dla szerokiej klasy ideałów definiowalnych. W szczególności dowodzimy, że $\mathfrak{a}(\text{nwd}) \geq \text{add}(\mathcal{M})$ co wzmacnia oszacowanie podane przez Steprāns inną metodą niż ta opracowana przez Cancino Manríquez'a,
- analiza ideału 'splitting ideal', która prowadzi do nowego oszacowania górnego coveringu ideału zbiorów asymptotycznej gęstości zero.

